

Calcul du PGCD

Définition :

Le PGCD (Plus Grand Diviseur Commun) de deux entiers est le plus grand nombre capable de diviser 2 entiers de manière complète sans laisser de reste et ceci doit être valable pour le premier comme pour le deuxième de ces entiers.

Exemple 1 :

Le PGCD de 12 et de 18 c'est 6.

Comment peut on arriver à définir ce PGCD ?

On utilise la décomposition en facteur premier pour réaliser un tel calcul

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$

J'utilise une fois chaque facteur présent dans les 2 nombres décomposés

Le facteur 2 et le facteur 3 sont présents dans la décomposition de 12 et 18

Donc je prends 2 et 3 que je multiplie pour obtenir le PGCD

$$2 \cdot 3 = 6$$

Exemple 2 :

Le PGCD de 120 et de 630

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Dans cet exemple on remarque les facteurs communs sont :

2 3 et 5 Le 7 n'est pas utilisé car il n'est pas présent dans les deux Décomposition.

$$\text{PGCD de 120 et 630} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

120 se divise par 30 le quotient est 4

630 se divise par 30 le quotient est 21

Application

Si je dois transformer la fraction $\frac{120}{630}$ je sais que je peux diviser par 30 et ma fraction sera complètement réduite en $\frac{4}{21}$

Remarque :

Si nous sommes en présence de deux décompositions et que le résultat de ces décompositions nous donne des facteurs premiers répétés avec des exposants différents, on doit prendre les facteurs premiers qui ont le plus petit exposant.

Exemple :

Je dois trouver le PGCD de 13824 et 1440

Je décompose en facteur premier ces 2 nombres :

$$13824 = 2^9 \cdot 3^3 \quad \text{et} \quad 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Je remarque que j'ai le facteur 2 et le facteur 3 apparaissent dans ces décompositions avec des exposants qui ont une valeur différente.

Dans ce cas, je prends les facteurs dont l'exposant est le plus petit.

Pour réaliser le PGCD ci-dessus, je prendrai donc le 2^5 car il est plus petit que le 2^9
Et le 3^2 car il est plus petit que le 3^3 .

Résultat de cette recherche de PGCD.

PGCD de 13824 et 1440

$$2^5 \cdot 3^2 = 32 \times 9 = 288$$

Contrôle

$$13824 : 288 = 48 \quad 1440 : 288 = 5$$

Règle à retenir pour calculer un PGCD.

1. Il faut prendre les facteurs premiers communs aux nombres originaux
2. Il faut choisir les facteurs qui ont le plus petit exposant
3. Si il n'y a pas d'exposant, cela veut dire que c'est un facteur est a la puissance ¹.
4. Multiplier ces facteurs pour obtenir un produit.
5. Utiliser ce produit comme diviseur commun pour les nombres originaux.