Chapitre 1
Limite de fonctions

1.1 Notion de limite

1.1.1 Introduction et définitions

Selon le domaine d'études considéré, le mot proche peut avoir des interprétations différentes. Un physicien nucléaire estimera proche une valeur de quelques picomètres, soit 10^{-12} mètres. Vous êtes proche de l'école lorsque vous vous trouvez à 10 mètres de celle-ci. Un astronome peut mesurer des proximités en années lumières [1].

La proximité est relative. Cependant, les développements liés au calcul différentiel (que nous étudierons dans le chapitre 3) a entrainé la nécessité de pouvoir *"quantifier"* la proximité afin de s'affranchir de la perception subjective de chacun. La notion de *"limite d'une fonction"* a émergé dans le courant du XVIIIème siècle et sa formalisation a permis d'utiliser la notion de proximité en mathématique, ce qui était nécessaire pour démontrer un bon nombre de résultats.

Nous allons voir comment appréhender la notion de *"limite"*, qui est un concept important pour la suite du cours de 3ème et 4ème année. Nous verrons différentes techniques pour *"calculer"* des limites de fonctions. Bien qu'il existe une définition formelle de limite d'une fonction (qui ne sera abordée que par les élèves de niveau 2 en fin de chapitre), l'utilisation d'une telle définition dans les démonstrations des théorèmes est trop complexe pour le cadre de notre cours. C'est pourquoi ces théorèmes ne seront pas démontrés.

A titre d'introduction, étudions la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x + 8}{4 - 2x}$.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ et si nous remplaçons x par 2 nous obtenons $\frac{0}{0}$ qui est une opération indéterminée (indétermination).

Cependant, la fonction f est définie *"autour"* de $x = 2$, ce qui nous permet d'étudier le comportement de la fonction f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de 3 :

x	$f(x)$
$1,5$	$2,75$
$1,9$	$2,95$
$1,99$	$2,995$
$1,999$	$2,9995$
$1,9999$	$2,99995$
$\ldots$	$\ldots$

x	$f(x)$
$2,5$	$3,25$
$2,1$	$3,05$
$2,01$	$3,005$
$2,001$	$3,0005$
$2,0001$	$3,00005$
$\ldots$	$\ldots$

De toute évidence, lorsque la valeur de x se rapproche de 2, alors la valeur de $f(x)$ se rapproche de 3.

Attention cependant au fait qu'un tableau ne constitue pas une justification suffisante pour pouvoir affirmer ce lien. Rien ne garantit (pour l'instant) que si nous choisissons une décimale supplémentaire pour la valeur de x, la fonction ne changera pas de comportement.

1. Une année lumière est la distance que la lumière parcourt en une année, soit environ 10'000 milliards de kilomètres.

De manière générale, nous souhaitons étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus proche d'une certaine valeur a. Nous nous baserons sur les deux définitions suivantes :

Définition 1.1

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle d'une variable réelle (i.e. $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$).

On dira que $L \in \mathbb{R}$ ***est la limite de la fonction*** f ***lorsque*** x ***tend vers*** a ***si*** :

1) la valeur de $f(x) \in B$ se rapproche de L lorsque x se rapproche/va vers a.

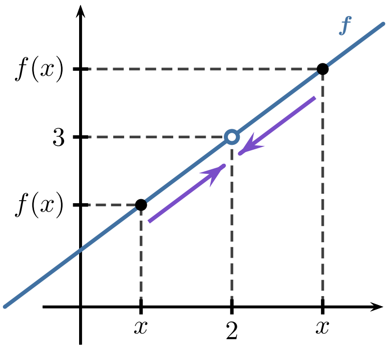
2) on peut choisir x de manière à ce que $f(x)$ soit aussi proche que l'on veut de L.

Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et on dit que "f tend vers L quand x tend vers a".

EXEMPLE : Au vu des constatations que nous avons faites concernant la fonction f de la page précédente, nous pouvons aisément supposer que :

$$\lim_{x \to 2} \frac{-x^2 - 2x + 8}{4 - 2x} = 3$$

En effet, quelle que soit la manière dont on fait s'approcher x de la valeur 2, les images s'approchent de la valeur 3 et il est possible de choisir x de façon à ce que $f(x)$ soit aussi proche que l'on veut de 3.



Définition 1.2

Soit $f : A \to B$ une fonction réelle d'une variable réelle.

On dira que $+\infty$ ***(ou*** $-\infty$***) est la limite de la fonction*** f ***lorsque*** x ***tend vers*** a ***si*** :

1) la valeur de $f(x) \in B$ devient de plus en plus grande positivement (respectivement négativement) lorsque x se rapproche/va vers a.

2) on peut choisir x de manière à ce que $f(x)$ soit aussi grand positivement (respectivement négativement) que l'on veut.

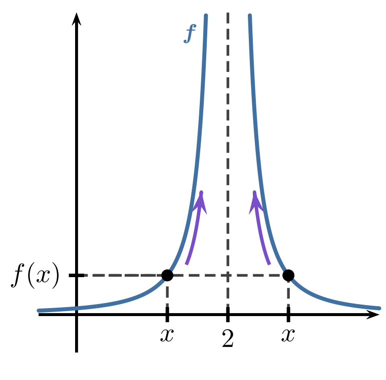
Dans ce cas on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty)$ et on dit que *"f tend vers plus (respectivement moins) l'infini quand x tend vers a"*.

EXEMPLE : Prenons la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{3(x-2)^2}$.

Alors :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

En se référant à la définition 1.2, on constate que la fonction *"grandit"* lorsque x se rapproche de la valeur 2 et qu'il est possible de choisir x de manière à ce que $f(x)$ soit aussi grande (positivement) que l'on veut.



Ce qu'il faut retenir des définitions ci-dessus c'est qu'elles rendent compte du fait que les images d'une fonction f *"s'approchent infiniment"* de la valeur L si x *"s'approche infiniment"* de a [2].

Les remarques ci-dessous sont très importantes pour la compréhension de la suite du chapitre !

Remarques 1.

i) La valeur de a peut être un nombre réel aussi bien que $+\infty$ ou $-\infty$. Dans ces deux derniers cas, nous dirons pour le point 1) des définitions ci-dessus que *"x va vers"* l'infini.

ii) Pour que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, il faut que $f(x)$ s'approche de L quelle que soit la manière dont x s'approche de a. En particulier, $f(x)$ doit s'approcher de L **indépendamment** du fait que x s'approche de a par des **valeurs inférieures** à a ou **supérieures** à a.

iii) Dans le calcul d'une limite de fonction, x doit pouvoir s'approcher de a mais ne prendra jamais la valeur de a. Il n'est pas nécessaire que la fonction soit définie en a.

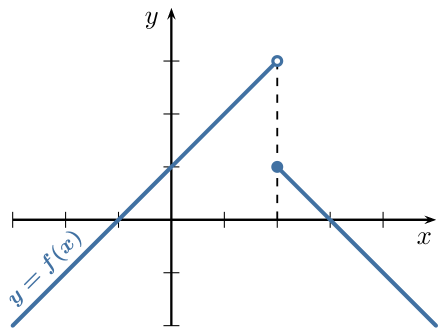
iv) Pour la cohérence de la définition, il faut que la fonction soit définie *"autour"* de la valeur a. Nous dirons aussi que la fonction doit être définie au **voisinage** de la valeur a.

Les considérations précédentes nous amènent au théorème suivant qui sera admis sans démonstration.

Théorème 1.1
Si elle existe, la limite d'une fonction est unique.

Autres exemples intuitifs de limite

1) Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 3-x & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.



Alors $\lim_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.

Si x tend vers 2 par des valeurs supérieures à 2 alors $f(x)$ s'approche de 1. Par contre si x tend vers 2 par des valeurs inférieures à 2 alors $f(x)$ s'approche de 3.

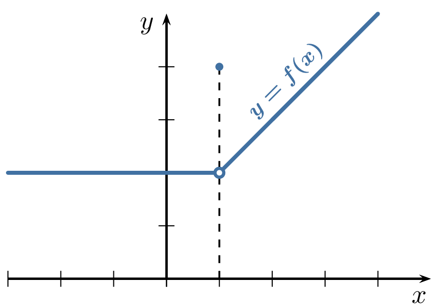
Comme la valeur de la limite doit être indépendante de la manière dont x s'approche de 2, nous concluons que la limite n'existe pas.

2) Soit la fonction donnée par $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Alors $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

Que x s'approche de 1 par des valeurs inférieures ou supérieures à 1, le comportement de la fonction est le même : $f(x)$ s'approche de 2.

Remarquons également que, bien que la limite existe, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. En effet, $f(1) = 4$.



2. Il est possible formaliser ces deux définitions en langage mathématique. Pour les élèves de niveau 2, nous y reviendrons en fin de chapitre.

Remarque 2.

Il arrive souvent que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ mais il faut être attentif au fait que cela n'est pas toujours le cas. **La valeur de $f(a)$ n'a aucune incidence sur la valeur de la limite**. La fonction peut même ne pas être définie en $x = a$. Les liens qui existent entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $f(a)$ seront traités au chapitre suivant.

Dans les exercices ci-dessous, on pourra examiner le comportement d'une fonction à l'aide d'un tableau de valeurs et les esquisses des graphiques se feront dans un repère non-normé mais en indiquant les valeurs importantes.

Exercices

Exercice 1.1

Soit la fonction définie $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 9}{\sqrt{x-5} - 2}$.

a) Calculer $f(9)$.

b) A l'aide d'un tableau de valeurs, examiner le comportement de $f(x)$ lorsque la valeur de x s'approche de 9.

Exercice 1.2

Soit la fonction définie par $f(x) = x \cdot \sin(\pi \cdot x)$.

Calculer $f(x)$ pour $x = 1$; 10 ; 100 ; 1000.

Peut-on déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Exercice 1.3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Faire une hypothèse sur la valeur des limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c) Donner une esquisse du graphique de f.

Exercice 1.4

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{N} \\ x & \text{autrement} \end{cases}$$

a) Faire une hypothèse sur la valeur des limites suivantes :

i) $\lim\limits_{x \to 1/2} g(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ iii) $\lim\limits_{x \to 4{,}99} g(x)$

b) Donner une esquisse du graphique de g.

Exercice 1.5

Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

a) Calculer : $h(3)$; $h(7/8)$; $h(\sqrt{2})$.

b) Faire une hypothèse sur la valeur de $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$.
Justifier votre réponse en utilisant la définition de limite.

c) Comment peut-on tracer une esquisse de la fonction h ?

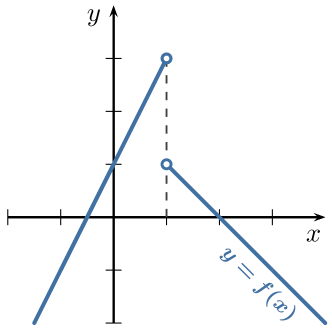
1.1.2 Limites à gauche et limites à droite

Comme nous avons vu précédemment, il est intéressant de connaître la valeur de la limite d'une fonction lorsque x s'approche de la valeur a par la gauche ou par la droite, c'est-à-dire par des valeurs plus petites ou plus grandes que a. On note :

i) $x \to a^-$ pour indiquer que x tend vers a par la gauche ($x < a$).

ii) $x \to a^+$ pour indiquer que x tend vers a par la droite ($x > a$).

Exemples : **1)** Soit la fonction donnée par $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2-x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$. Alors :



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x+1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2-x) = 1$$

Il est donc possible de conclure que $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

Remarquons également au passage que la fonction f n'est pas définie au point $x=1$.

2) Soit la fonction donnée par $f(x) = 3x-1$. Alors :

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = 17 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 6^+} f(x) = 17.$$

De plus, nous avons aussi que $\lim_{x\to 6} f(x) = 17$.

Au vu des constatations faites ci-dessus, il apparaît raisonnable de comprendre le théorème suivant, que nous énonçons sans démonstration :

Théorème 1.2

$\lim_{x\to a} f(x)$ *existe si et seulement si* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Dans ce cas on a $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

En particulier, le théorème ci-dessus implique que si $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ alors $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

D'ailleurs, lorsque nous montrerons qu'une limite n'existe pas, c'est souvent ce que nous ferons ; nous vérifierons que les limites à gauche et à droite ne coïncident pas.

Remarque 3.

Il n'est bien entendu pas possible de s'intéresser à la limite à droite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$ ou à la limite à gauche quand x tend vers $-\infty$. Dans ces cas, le théorème 1.2 est adapté en enlevant l'égalité qui n'a pas de sens.

Exercices

Exercice 1.6

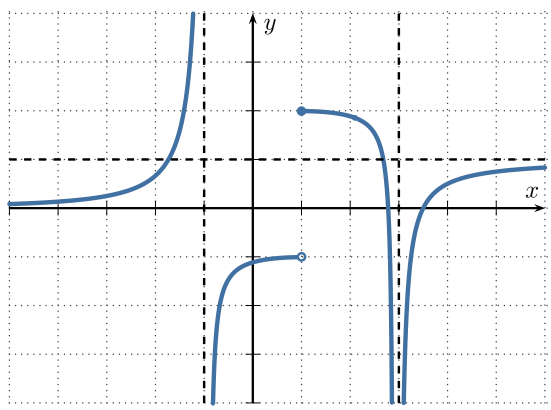
Déduire les limites suivantes à l'aide de la représentation graphique de f ci-contre.

a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

g) $\lim_{x\to -1} f(x)$ h) $\lim_{x\to 3} f(x)$



Exercices

Exercice 1.7

Pour chaque item, esquisser un graphique de la fonction f vérifiant les conditions données :

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ et $f(2) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$ et $3 \notin D_f$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ et $1 \in D_f$

d) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = 5$

Exercice 1.8

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(\pi \cdot x)}{x}$. *(x en radians)*

a) Calculer $f(x)$ pour $x = 4$; 3 ; 2 ; 1.

b) Faire une hypothèse concernant la valeur de $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ en vous basant sur les calculs de l'item précédent.

c) Etudier $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ à l'aide d'un tableau.

1.1.3 Exemples fondamentaux de limite.

Les 4 exemples qui suivent constituent la première base qui va nous permettre de calculer certaines limites. Nous nous en servirons librement lors du calcul de limites plus complexes.

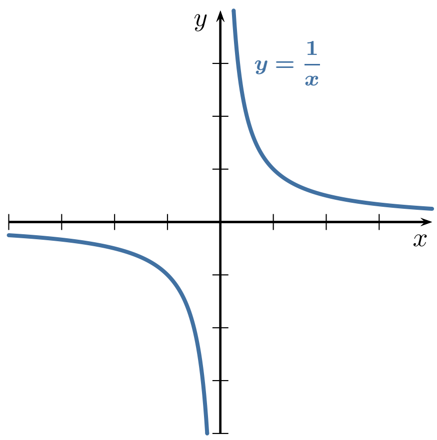
1) Soit la fonction $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ (fonction constante). Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$ quelle que soit la valeur de a.

EXEMPLE : $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$; $\lim\limits_{x\to 0} 9 = 9$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

2) Soit la fonction $f(x) = x$. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$ quelle que soit la valeur de a.

EXEMPLE : $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$; $\lim\limits_{x\to \pi} x = \pi$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

3) Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



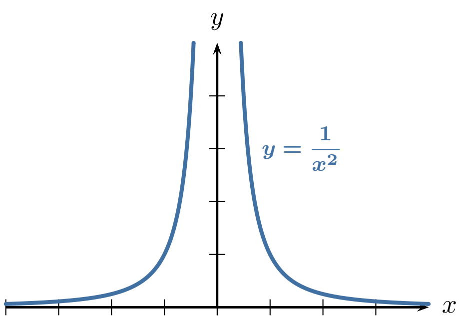
On remarque que si x s'approche de 0 par des valeurs négatives, alors $1/x$ devient très grand négativement.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Par contre, si x s'approche de 0 par des valeurs positives, alors $1/x$ devient très grand positivement.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

4)



Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

En effet, que x s'approche de 0 par des valeurs inférieures ou supérieures à 0, la valeur de $1/x^2$ devient de plus en plus grande positivement. De plus, il est possible de choisir x suffisamment proche de 0 pour que la valeur de $f(x)$ soit aussi grande que l'on veut.

1.2 Propriétés des limites

Les propriétés qui suivent sont très utiles dans le calcul de limites, mais leur utilisation est assujettie à certaines conditions dont fait l'objet la très importante remarque 4 ci-après. La démonstration de ces propriétés nécessite l'introduction d'une définition plus rigoureuse de ce qu'est une limite, c'est pourquoi elle ne seront pas démontrée en niveau 1 et brièvement abordées en fin de chapitre en niveau 2.

i) $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ où k est une constante réelle.

ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

iv) Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

v) Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to b} f(y)$

vi) Si dans un voisinage de a on a $f(x) < g(x)$ (pour tout x dans le voisinage), alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Lorsque la valeur des limites est un nombre réel (voir définition 1.1), les opérations ci-dessus sont les opérations usuelles sur les nombres réels. Afin de pouvoir appliquer les propriétés ci-dessus à la définition 1.2, il est nécessaire de définir certaines opérations avec les infinis. Ainsi :

i) $a + \infty = +\infty$ et $a - \infty = -\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

ii) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

iii) $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ (en fonction de la règle des signes) pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

iv) $(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$ (en fonction de la règle des signes)

v) $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

vi) $\dfrac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$ (en fonction de la règle des signes) pour tout $a \in \mathbb{R}^*$

Les opérations suivantes sont indéterminées et ne permettent pas de conclure un résultat :

$(+\infty)+(-\infty)$	$0\cdot(\pm\infty)$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$0^{\pm\infty}$	0^0	$1^{\pm\infty}$	$(\pm\infty)^0$

Remarque 4.

Pour pouvoir utiliser les propriétés des limites ci-dessus il faut que les limites de $f(x)$ et de $g(x)$ existent ET que l'opération entre les limites soit définie.
Si l'utilisation des propriétés lors d'un calcul amène à une indétermination, alors c'est qu'on ne pouvait pas utiliser les propriétés de cette manière. Il faut donc utiliser d'autres moyens pour déterminer la limite cherchée.

Exemples de calculs de limite en utilisant les propriétés :

i) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x+4}\right) \underset{p.iv)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)} \underset{p.iii)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+4)} \underset{p.ii)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x)}{\lim\limits_{x\to 2}(x)+\lim\limits_{x\to 2}(4)} \overset{exf\ 2)}{\underset{exf\ 1)}{=}} \frac{2\cdot 2}{2+4} = \frac{2}{3}$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(6-x)^2} \underset{p.iv)}{=} \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6-x)^2} \overset{exf\ 1)}{\underset{p.v)}{=}} \frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty}y^2} = 0$$

iii) $$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x) \underset{p.ii)}{=} \lim_{x\to-\infty}(x^3)+\lim_{x\to-\infty}(x) \underset{p.iii)}{=} \left(\lim_{x\to-\infty}(x)\right)^3+\lim_{x\to-\infty}(x) \underset{exf\ 2)}{=} -\infty$$

Exercices

Exercice 1.9

Calculer les limites en utilisant les propriétés et les exemples fondamentaux.
Justifier chaque égalité.

a) $\lim\limits_{x\to-7}(x^2+2x+3)$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+10)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-x$

e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+2}{(x+3)^2}$

Exercice 1.10

Calculer les limites à gauche et à droite en utilisant les propriétés et les exemples fondamentaux.

a) $\lim\limits_{x\to 2^\pm}\dfrac{-x}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to-3^\pm}\dfrac{x^2}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 5^\pm}\dfrac{x^2+1}{(x-5)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0^\pm}\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 6^\pm}\dfrac{x-6}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-1^\pm}\dfrac{x+1}{x+1}$

1.3 Calculs de limites

1.3.1 Les cas déterminés

Le calcul d'une limite peut s'avérer complexe. Cependant, les propriétés décrites à la section précédente permettent de "régler" plusieurs cas particuliers simples énoncés dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.3

Soit $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ une fonction polynômiale et $a \in \mathbb{R}$ un nombre quelconque.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. En particulier la limite existe.

Démonstration :

A l'aide des diverses propriétés, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n\right) = \\
\textit{(propriété ii)} \quad &= \lim_{x\to a}(a_0)+\lim_{x\to a}(a_1x)+\ldots+\lim_{x\to a}(a_{n-1}x^{n-1})+\lim_{x\to a}(a_nx^n) = \\
\textit{(propriété i)} \quad &= \lim_{x\to a}(a_0)+a_1\lim_{x\to a}(x)+\ldots+a_{n-1}\lim_{x\to a}(x^{n-1})+a_n\lim_{x\to a}(x^n) = \\
\textit{(propriété iii)} \quad &= \lim_{x\to a}(a_0)+a_1\lim_{x\to a}(x)+\ldots+a_{n-1}(\underbrace{\lim_{x\to a}x\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a}x}_{n-1\text{ fois}})+a_n(\underbrace{\lim_{x\to a}x\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a}x}_{n\text{ fois}}) = \\
\textit{(ex. fondamental 1) et 2))} \quad &= a_0+a_1a+\ldots+a_{n-1}a^{n-1}+a_na^n = f(a)
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.

Il est important de remarquer qu'au moment où nous avons utilisé chacune des propriétés ci-dessus, nous ne savions pas encore si nous pouvions les utiliser car, formellement, nous ne savions pas encore si les limites obtenues existaient et si les opérations résultantes étaient définies (voir remarque 4). Nous ne pouvons justifier de l'utilisation de ces propriétés qu'en fin de calcul parce que nous obtenons bien un résultat défini !

La démonstration du théorème 1.4 ci-dessous est laissée en exercice et le théorème 1.5 sera admis sans démonstration.

Théorème 1.4

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *une fonction avec* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *des polynômes. Alors quel que soit le nombre* a *tel que* $Q(a) \neq 0$*, nous avons*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

En particulier la limite existe.

Théorème 1.5

Quel que soit le nombre a ***appartenant au domaine de définition*** *de chacune des fonctions considérées, nous avons :*

$$\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a) \quad ; \quad \lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a) \quad ; \quad \lim_{x \to a} \tan(x) = \tan(a)$$

$$\lim_{x \to a} \ln(x) = \ln(a) \quad ; \quad \lim_{x \to a} e^x = e^a \quad ; \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

En particulier chacune des limites existent.

Voici ce qu'il faut retenir des théorèmes 1.3, 1.4 et 1.5 : pour calculer une limite d'une fonction *"usuelle"* lorsque x tend vers une valeur **du domaine de définition** de la fonction, il suffit d'évaluer la fonction en cette valeur.

Cas particulier : $\lim\limits_{x \to a^\pm} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{k}{0}$ et $k \neq 0$.

Lorsque le dénominateur d'une fraction tend vers 0 mais que son numérateur tend vers un nombre non-nul, il est souvent utile d'isoler le *"facteur"* du dénominateur qui tend vers 0 afin d'étudier son comportement de manière indépendante du reste de la fraction.

Exemples : **1)** $\displaystyle \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+x+1}{x-1} \cdot \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} =$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+x+1}{x-1} \cdot \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Remarquons que les limites existent et que les opérations entre elles sont définies. Ainsi nous pouvions utiliser les propriétés tel que nous l'avons fait.

2) $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}+5}{(x-4)^2} = \lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x}+5\right) \cdot \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \lim_{x \to 4} \left(\sqrt{x}+5\right) \cdot \lim_{y \to 0} \frac{1}{y^2} =$

$$= 7 \cdot (+\infty) = +\infty$$

1.3.2 Montrer qu'une limite n'existe pas

Dans la grande majorité des cas que nous allons rencontrer, pour montrer qu'une limite n'existe pas, il suffit de montrer que la limite à gauche et la limite à droite ne coïncident pas. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

Nous venons de voir ci-dessus que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$. Le calcul

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x+1}{x-1} \cdot \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\cdot(-\infty) = +\infty$$

montre que la limite à gauche et la limite à droite diffèrent. En vertu du théorème 1.2, nous concluons que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ n'existe pas.

Exercices

Exercice 1.11

Démontrer le théorème 1.4 à l'aide des propriétés et des résultats connus.

Exercice 1.12

Calculer les limites en utilisant les propriétés, les exemples fondamentaux et les théorèmes 1.3 et 1.4.

a) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{1}{x+6}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2-2x-1\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3}{x^2+2}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-8}{(x-4)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7}{-x-5}$

Exercice 1.13

Calculer la limite suivante en justifiant chaque égalité.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x+8}{x^3+7x^2+15x+9}$$

Exercice 1.14

Calculer les limites suivantes en justifiant chaque égalité.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2-x+3}{x^6-2x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x+8}{x^2+4x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-5x^2-x-5}{x^2-x^4}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin(x)}$

1.3.3 Les cas indéterminés.

En pratique, les cas exposés au paragraphe précédent ne posent pas de problème. Il est néanmoins très fréquent de s'intéresser aux cas où x tend vers des valeurs extérieures au domaine de définition de la fonction [3] ou encore quand x tend vers l'infini.

En effet, il est fréquent - *et c'est justement les cas intéressants !* - que la détermination de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ne puisse pas se faire par le simple calcul de $f(a)$ car ce dernier amène à une opération indéterminée du type $\frac{0}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou encore $\infty-\infty$.

Ci-dessous nous allons étudier quelques cas particuliers pour lesquels il est possible de *"lever"* l'indétermination ; à savoir pour lesquels il existe des astuces permettant de calculer la limite en contournant l'indétermination.

3. Attention cependant au fait que, comme nous l'avons déjà souligné à la remarque 1, la fonction doit être définie autour du point vers lequel tend x.

Indétermination du type $\dfrac{0}{0}$: simplification par factorisation

Lorsque nous sommes confrontés à une indétermination du type $\frac{0}{0}$, nous pouvons essayer de factoriser le numérateur et le dénominateur afin de simplifier le(s) facteur(s) qui créent l'indétermination.

Exemple : $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-2x-12}{x^2-8x+15} = \lim_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}(x-5)} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x+2)}{x-5} = -5.$

La simplification du facteur $(x-3)$ est possible car x ne vaut jamais 3 (cf le point iii) de la remarque 1) et donc $x-3$ ne vaut jamais 0. La dernière égalité se justifie à l'aide du théorème 1.4.

Indétermination du type $\dfrac{0}{0}$: amplification par le conjugué

Lorsque l'indétermination est du type $\frac{0}{0}$, la factorisation n'est pas toujours possible car la fonction peut contenir des racines. En amplifiant la fraction judicieusement, il sera possible de simplifier le facteur qui crée l'indétermination.

Exemple : $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x\to 4}2(\sqrt{x}+2) = 8.$

Le terme $(\sqrt{x}+2)$ est appelé **le conjugué** de $(\sqrt{x}-2)$. La simplification du facteur $(x-4)$ est possible car x ne vaut jamais 4 et la dernière égalité se justifie à l'aide des propriétés et du théorème 1.5.

Exercices

Exercice 1.15

Calculer les limites suivantes en factorisant les expressions.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-2x-8}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2+4x+3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{x^2-6x-7}{x^2-9x+14}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to -5}\frac{x^3+5x^2}{x^3+4x^2-5x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2+2x+4}{3x^2+4x-4}$

Exercice 1.16

Calculer les limites suivantes en amplifiant judicieusement les fractions.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 10}\frac{x^2-9x-10}{\sqrt{x+6}-4}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -6}\frac{2x^2+9x-18}{\sqrt{x+10}-2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-\sqrt{3x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+24}-5}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-5}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x}$

Indétermination du type $\infty-\infty$: mise en évidence forcée de x^n

Lorsque x tend vers l'infini dans un polynôme, l'application immédiate des propriétés peut mener à une opération du type $\infty-\infty$. La mise en évidence de x^n permet de lever l'indétermination.

Exemple : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^3-x^2-5x+10\right) = \lim_{x\to -\infty}\left[x^3\cdot\left(-2-\tfrac{1}{x}-\tfrac{5}{x^2}+\tfrac{10}{x^3}\right)\right] =$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x^3\right)\cdot\lim_{x\to -\infty}\left(-2-\tfrac{1}{x}-\tfrac{5}{x^2}+\tfrac{10}{x^3}\right) = -\infty\cdot(-2) = +\infty$$

Cet exemple montre qu'en réalité la limite à l'infini (positif ou négatif) d'un polynôme ne dépend que de son monôme de plus grand degré.
Ainsi, dans l'exemple précédent on peut ramener le calcul de la limite à $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^3\right) = +\infty$.

Indétermination du type $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$: mise en évidence forcée de x^n

Lorsque x tend vers l'infini, nous pouvons avoir une indétermination du type $\pm\infty/\pm\infty$. S'il s'agit d'une fraction rationnelle, la mise en évidence de x^n, où n est le degré du dénominateur, permet de lever l'indétermination :

Exemple : $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-7}{x^4-x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^4}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{7}{x^4}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}=0.$$

C'est un bon exercice de détailler le calcul de la dernière égalité à l'aide des propriétés des limites afin de s'apercevoir que les limites intermédiaires existent et que toutes les opérations sont définies.

Exercices

Exercice 1.17

Calculer les limites suivantes en utilisant la mise en évidence forcée.

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^3-3x^2+1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-1}{x^4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-x^4-9x^3-50\right)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x-3}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{2x^3}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+3}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^8-x^2\right)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\sin(x)}{x^3-1}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-1}$

Exercice 1.18

Pour $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, que peut-on dire du résultat de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ si :

a) $\deg(P)<\deg(Q)$? *(donner un exemple)*

b) $\deg(P)=\deg(Q)$? *(donner un exemple)*

c) $\deg(P)>\deg(Q)$? *(donner un exemple)*

Exercice 1.19

Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{2x^2-4x-6}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-9}{x^2-4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3x+2}{x^3+x^2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{x^2-8x-9}{\sqrt{x-5}-2}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{x-5}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{2x^2+9x+4}{x^2+8x+16}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2x^3-3x^2$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-1}{x^2+4x+4}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^2+6x+9}$ l) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5x+6}-4}{\sqrt{x+7}-3}$

Exercice 1.20

Trouver deux fonctions f et g telles que :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=5$$

1.3.4 Limite trigonométrique

Parmi les indéterminations du type $\frac{0}{0}$, celle engendrée par $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est un cas intéressant. Le théorème ci-dessous montre comment lever cette indétermination.

Théorème 1.6

Au voisinage de 0, la fonction $\sin(x)$ se comporte comme la fonction x, c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1 \qquad (x \text{ en radians})$$

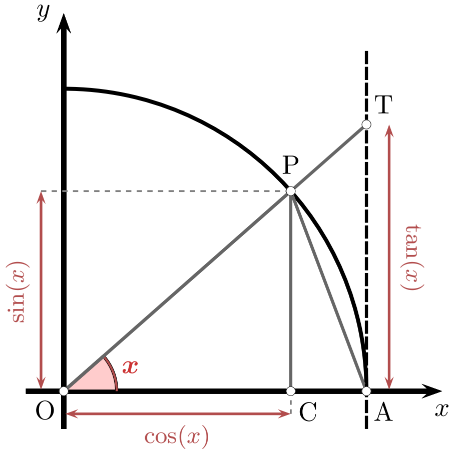
Démonstration :

Selon le théorème 1.2, il faut montrer que la limite à gauche et la limite à droite coïncident et sont égales à 1. Comme nous allons le voir, seul le calcul de la limite à droite est délicat. Le calcul de la limite à gauche se fait ensuite facilement en faisant un changement de variable.

Limite à droite :

Comme x s'approche de 0 par des valeurs positives, nous considérons que x est tel que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nous nous plaçons alors sur le premier quadrant du cercle trigonométrique et nous constatons, géométriquement, les inégalités suivantes :

Aire du triangle OAP < Aire du secteur OAP < Aire du triangle OAT



$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{CP}}{2} & < & \dfrac{x\cdot \text{rayon}^2}{2} & < & \dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{AT}}{2} \\
\dfrac{1\cdot\sin(x)}{2} & < & \dfrac{x\cdot 1^2}{2} & < & \dfrac{1\cdot\tan(x)}{2} \\
\sin(x) & < & x & < & \tan(x) \\
1 & < & \dfrac{x}{\sin(x)} & < & \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)} \\
1 & < & \dfrac{x}{\sin(x)} & < & \dfrac{1}{\cos(x)} \\
1 & > & \dfrac{\sin(x)}{x} & > & \cos(x) \\
\lim\limits_{x\to 0^+} 1 & \geqslant & \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x)}{x} & \geqslant & \lim\limits_{x\to 0^+}\cos(x)
\end{array}$$

définitions dans le cercle trigonométrique

$\cdot 2$

$\div \sin(x)$ *(> 0 si* $x \in]0; {}^{\pi}/_{2}[$*)*

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Application de la fonction ${}^{1}/_{x}$ *(décroisante sur* $]0; {}^{\pi}/_{2}[$*)*

Passage à la limite (propriété vi))

En calculant les membres de gauche et de droite de l'inégalité, on obtient :

$$1 \geqslant \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} \geqslant 1$$

Ce qui implique, par encadrement, que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Limite à gauche :

En effectuant le changement de variable $y = -x$ (propriété v) des limites), en utilisant la propriété trigonométrique $\sin(-x) = -\sin(x)$ ainsi que le résultat obtenu ci-dessus, nous obtenons :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{-\sin(y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(y)}{y} = 1$$

Nous avons montré que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Le théorème 1.2 permet de conclure. ■

Le théorème 1.6 permet de lever certaines indéterminations trigonométriques du type $\frac{0}{0}$. Il sera cependant souvent nécessaire d'employer des relations trigonométriques ou des astuces de calcul pour transformer la fonction dont on cherche la limite, ceci dans le but de faire apparaître la fraction $\frac{\sin(x)}{x}$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{\sin(2x)}{2x} \underset{p.i)}{=} 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x} \underset{p.v)}{=} 2\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y} = 2\cdot 1 = 2.$

Corolaire 1.7

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad (x \text{ en radians})$$

Démonstration :

La démonstration de ce résultat se fait rapidement en utilisant quelques propriétés et relations (déjà bien connues) afin de se ramener à l'utilisation du théorème 1.6.

L'astuce consiste à amplifier la fraction par le conjugué de $\cos(x)-1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}\right) \\
&\qquad \textit{Réduction} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x\cdot(\cos(x)+1)} \\
&\qquad \textit{Relation trigonométrique} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x\cdot(\cos(x)+1)} \\
&\qquad \textit{Réécriture} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{-\sin(x)}{(\cos(x)+1)}\right) \\
&\qquad \textit{Propriété iii)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{(\cos(x)+1)} \\
&\qquad \textit{Théorème 1.6 et calcul de limite} \\
&= 1\cdot\frac{0}{1+1}=0
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 1.21

Calculer les limites trigonométriques.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^3}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin(x)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$

Exercice 1.22

Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1-\cos^2(x)}{2x^2} \qquad (x \text{ en radians})$$

a) Calculer $f(0,000001)$ avec la calculatrice.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

c) Que constatez-vous ? Comment l'expliquer ?

Exercice 1.23

Calculer les limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^3-12}{12x^3-4x^2+3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x+4}-3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{\sin(5x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^3-5}}{x^2-1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{2x}{x^2+3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2+x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^3+6x^2-x-30}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^3+6x^2-x-30}{x^2+6x+9}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x^2+3x}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{5}^-}\frac{7x}{3-5x}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

o) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{3}{2}}\frac{2x^2+x-6}{4x^2-4x-3}$

p) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

1.4 Continuité de fonctions

Intuitivement, la notion de continuité exprime le fait que la valeur d'une fonction au point a est celle à laquelle on pouvait s'attendre au vu du comportement de la fonction autour du point a. En mathématique, la *"valeur attendue"* d'une fonction autour d'un point peut être rendue par la notion de limite.

Définition 1.3

Soit f une fonction définie d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$.
Alors, f est *continue* au point a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

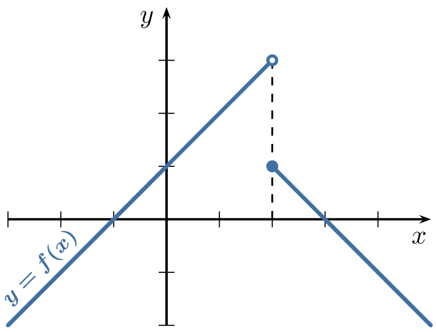
Si l'égalité n'est pas vérifiée, alors la fonction est *discontinue* au point a.

Par ailleurs, nous dirons simplement qu'une ***fonction est continue*** si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

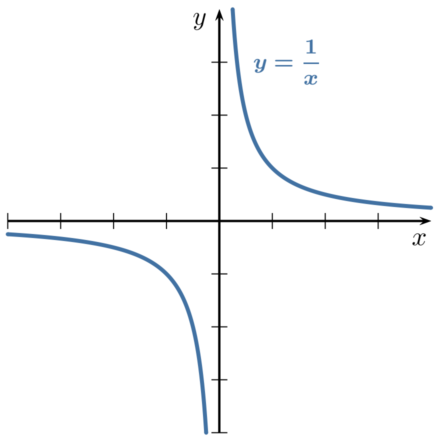
Graphiquement, cette notion peut naïvement se traduire par le fait que la fonction peut être tracée sans lever le crayon et ce sur tous les points où elle est définie.

Exemples :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 3-x & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}.$$



$$g(x) = \frac{1}{x}$$



La fonction f n'est pas continue, car les limites à gauche et à droite au point $x = 2$ ne sont pas les mêmes. Rigoureusement, il n'y a pas d'égalité entre la limite en a et $f(a)$ (puisque la limite n'existe pas). La fonction est donc discontinue au point $x = 2$. Remarquons cependant que f est continue partout ailleurs.

La fonction g est continue puisqu'elle l'est sur tous les points de son domaine de définition. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, le théorème 1.5 garantit que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exercices

Exercice 1.1

Montrer que les fonctions suivantes sont continues au point indiqué :

a) $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 5$ en $x = 2$

b) $f_2(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ en $x = 1$

c) $f_3(x) = \tan(\dfrac{\pi}{4} - x)$ en $x = 0$

d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ en $x = -\sqrt{2}$

Exercice 1.2

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{si} \quad x \leqslant 6 \\ -x + \frac{9}{2} & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

a) Montrer que cette fonction est discontinue en $x = 6$.

b) Il y a-t-il d'autres points où cette fonction est discontinue ? *(Justifier)*

Exercice 1.3

Donner l'expression d'une fonction :

a) f discontinue en 1 mais telle que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $f(1)$ existent.

b) g définie sur $\mathbb{R}$ mais discontinue partout.

Exercice 1.4

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{2x^2+4x-30} & \text{si} \quad x \neq -5 \\ 5/8 & \text{si} \quad x = -5 \end{cases}$$

a) Donner la domaine de définition de f.

b) Selon vous, quels sont les points *"sensibles"* où il est intéressant d'étudier la continuité de cette fonction ?

c) S'agit-il d'une fonction continue ?

Exercice 1.5

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \in [-1;\ +1] \\ \dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1;\ +1] \end{cases}$$

a) Donner la domaine de définition de f.

b) Selon vous, quels sont les points *"sensibles"* où il est intéressant d'étudier la continuité de cette fonction ?

c) S'agit-il d'une fonction continue ?

Théorème 1.8

Soit f et g deux fonctions continues en a. Alors

i) λf est continue en a, quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

ii) $f + g$ est continue en a,

iii) $f - g$ est continue en a,

iv) $f \cdot g$ est continue en a,

v) pour autant que $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

vi) si f est continue en a et g est continue en $y = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration :

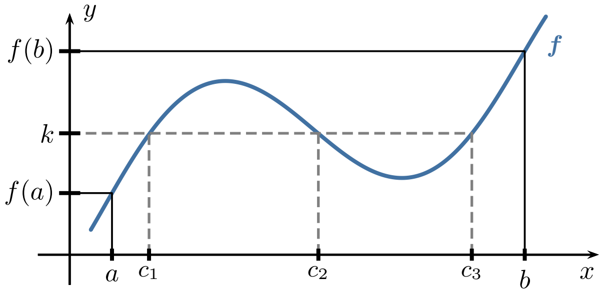
Comme f et g sont continues en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ ce qui garanti que les limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent et sont des nombres réels (en particulier les opérations entre $f(a)$ et $g(a)$ sont bien définies). Les résultats découlent donc immédiatement de l'utilisation des propriétés des limites. ■

Il suit des théorèmes 1.3 et 1.4 que les fonctions polynomiales et rationnelles sont continues ainsi que du théorème 1.5 que les fonctions trigonométriques, exponentielles, logarithmiques et racines sont aussi des fonctions continues.
De plus, le théorème 1.9 ci-dessous (admis sans démonstration) implique que les fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente sont des fonctions continues.

Théorème 1.9
Soit $f : A \to B$ une fonction continue et bijective. Alors la fonction $^{r}f : B \to A$ est aussi continue.

Les théorèmes 1.10 et 1.11 qui suivent seront admis sans démonstration. Il est cependant important de comprendre l'importance des hypothèses dans chacun d'entre eux et de se convaincre de leur véracité à l'aide d'exemples.

Théorème 1.10 (théorème de la valeur intermédiaire)
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors quel que soit le nombre réel $k \in [f(a) ; f(b)]$, il existe au moins un nombre $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.



Ici, il existe 3 valeurs dans $[a; b]$ tel que leur image par f soit k.

Le théorème de la valeur intermédiaire a une grande importance en mathématique appliquée. Son corolaire (1.11 ci-après) en particulier a permis l'élaboration de la méthode dite de la *"dichotomie"* (ou de la *"bissection"*) qui permet de déterminer les zéros d'une fonction avec une approche numérique (i.e par approximations, à l'aide d'un calculateur) plutôt qu'avec une approche algébrique, souvent compliquée voir inaccessible.

Corolaire 1.11
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé), alors la fonction f s'annule quelque part entre a et b (i.e. il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

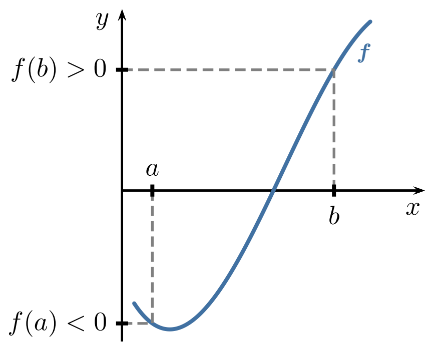
Démonstration :

La démonstration est presque triviale en utilisant le théorème 1.10.

En effet, comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, ces deux valeurs se trouvent de part et d'autre de l'axe des abscisses. Nous avons nécessairement que

$$0 \in [f(a); f(b)] \quad (\text{ou } [f(b); f(a)])$$

Le théorème 1.10 des valeurs intermédiaires assure de l'existence de $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$.

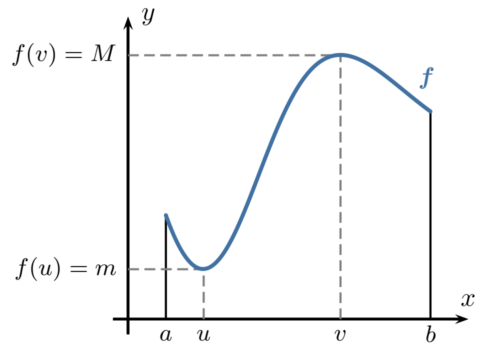


■

Théorème 1.12 (théorème des bornes)
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

i) Il existe m et $M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a;b]$.

ii) De plus, il existe u et $v \in [a;b]$ tel que $m = f(u)$ et $M = f(v)$.



Si f est une fonction continue, le théorème 1.12 des bornes assure qu'il existe des nombres u et v dans l'intervalle $[a;b]$ qui sont les valeurs où la fonction f atteint son minimum, respectivement son maximum.

Cependant, le théorème ne dit pas comment trouver u et v ni m et M. Nous verrons au chapitre suivant comment il est parfois possible de déterminer ces valeurs.

Remarque 1.

Les théorèmes 1.10 (valeur intermédiaire) et 1.12 (bornes) impliquent que l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé :

$$f \text{ continue} \Rightarrow f([a;b]) = [m:M]$$

Exercices

Exercice 1.6

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -cx + 1 & \text{si} \quad x \leqslant 3 \\ \frac{5}{3}x + c & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Déterminer la valeur du paramètre c pour que la fonction f soit continue.

Exercice 1.7

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + cx + \frac{3}{2} & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ 4x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Déterminer la valeur du paramètre c pour que la fonction f soit continue.

Exercice 1.8

Est-ce que le théorème des bornes est vrai si :

a) l'ensemble de départ est ouvert ?

b) l'ensemble de départ est non-borné ?
(s'il s'agit de $\mathbb{R}$ par exemple)

c) la fonction n'est pas continue ?

Justifier vos réponses par un exemple !

Exercice 1.9

On veut trouver une solution de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

a) Montrer que l'équation possède une solution dans $[0;1]$.

b) Déterminer si la solution se trouve dans $[0;\frac{1}{2}]$ ou dans $[\frac{1}{2};1]$.

c) En vous inspirant de la question précédente, calculer une solution de l'équation avec une précision de $0,01$.

Exercice 1.10

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + c & \text{si} \quad x < -2 \\ 4 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 4 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$$

a) Donner la représentation graphique de la fonction f pour $c = 3$.

b) Montrer que f est discontinue en $x = 4$.

c) Déterminer la valeur du paramètre c pour que f soit continue en $x = -2$.

1.5 Asymptotes

Dans cette section, nous allons nous intéresser au comportement particulier de certaines fonctions lorsque x se trouve aux *"bornes"* du domaine de définition de la fonction.

En effet, lorsque nous faisons tendre x vers l'infini (qui peut être considéré comme une borne si le domaine de définition est $\mathbb{R}$ par exemple), la fonction peut avoir un comportement qui ressemble à celui d'une droite. Le même phénomène peut également se produire lorsqu'une fonction n'est pas définie en un point a mais qu'elle l'est autour de ce point a (dans un voisinage de a).

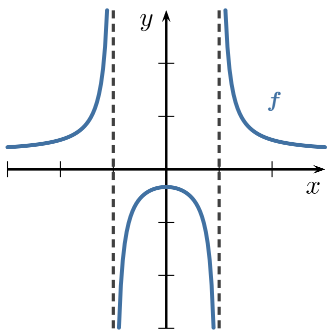
On dit alors que la fonction a un comportement "***asymptotique***".

Définition 1.4

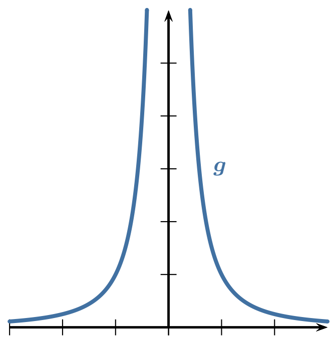
Une droite verticale d'équation $d : x = a$ est une asymptote de la fonction f si **au moins** une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

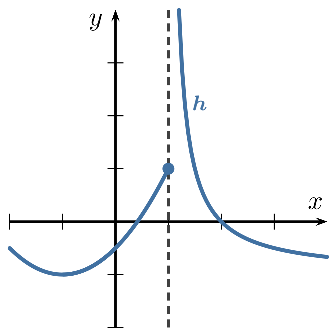
Exemples.



f possède une asymptote verticale en $x = -1$ et une autre en $x = 1$



g possède une asymptote verticale en $x = 0$



h possède une asymptote verticale en $x = 1$

Remarque 2.

Les fonctions f et g sont continues, contrairement à la fonction h qui ne l'est pas.

On remarque également que la fonction h possède une asymptote verticale en $x = 1$ malgré que son domaine de définition soit $D_h = \mathbb{R}$, alors que les fonctions f et g ont leur(s) asymptote(s) verticale(s) aux seuls points où elles ne sont pas définies.

Définition 1.5

Une droite d'équation $d : y = ax + b$ est une asymptote de la fonction f si

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - d(x)) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - d(x)) = 0$$

Où $d(x) = ax + b$ est la fonction de la droite d.

Remarques 3.

i) Si $a \neq 0$, alors on dit que la droite d est une **asymptote oblique** de la fonction f.

ii) Dans le cas ou $a = 0$, on dit que d est une **asymptote horizontale** de la fonction f.
Il faut remarquer que dans ce cas on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ où b est l'ordonnée à l'origine de la droite d et également la valeur vers laquelle tend la fonction f quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

Théorème 1.13 (Asymptote d'une fonction rationnelle)

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ *où* $A(x)$ *et* $B(x)$ *sont des polynômes.*
Soit $Q(x)$ *le polynôme quotient de la division euclidienne de* $A(x)$ *par* $B(x)$.
Alors la fonction $Q : x \mapsto Q(x)$ *est une asymptote de* f.

Démonstration :

L'égalité fondamentale de la division euclidienne permet d'écrire :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{Q(x)\cdot B(x) + R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B)$$

Nous avons alors :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - Q(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} - Q(x) \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{R(x)}{B(x)} = 0$$

Où la dernière égalité provient du fait que $\deg(R) < \deg(B)$ (voir exercice 18 du chapitre précédent).
Ainsi la fonction $Q : x \mapsto Q(x)$ est une asymptote de f. ∎

Ainsi, le théorème 1.13 ci-dessous donne le moyen de déterminer les asymptotes obliques (et aussi horizontales) d'une fonction rationnelle.

Exercices

Exercice 1.11

Déterminer l'équation des asymptotes verticales des fonctions.

a) $f_1(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+2}$

b) $f_2(x) = \dfrac{2x^2+8x+7}{x^2+4x-12}$

c) $f_3(x) = \dfrac{2x^2+8x-10}{x^2+x-2}$

d) $f_4(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{3x^2+2x+1}$

e) $f_5(x) = \dfrac{4x-1}{2x+5}$

f) $f_6(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

Exercice 1.12

Déterminer l'équation des asymptotes obliques/horizontales des fonctions.

a) $f_1(x) = \dfrac{2x^2+3x-2}{x+1}$

b) $f_2(x) = \dfrac{-x^3+3x^2+7}{x^2+x-3}$

c) $f_3(x) = \dfrac{4x^2-7x-2}{(2x+1)^2}$

d) $f_4(x) = \dfrac{-3x^4+x^3-2x^2+5x-1}{5x^3}$

e) $f_5(x) = \dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{-1}{2x+6}$

Exercice 1.13

Pour chaque item ci-dessous, déterminer l'expression algébrique d'une fonction f vérifiant la (les) condition(s) indiquée(s) :

a) La fonction f possède une asymptote verticale d'équation $x = -7$.

b) La fonction f possède une asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

c) La fonction f possède une asymptote verticale d'équation $x = 3$ et une asymptote oblique d'équation $y = -5x - 2$.

d) La fonction f possède une asymptote horizontale en $y = -5$, deux asymptotes verticales d'équations $x = -2$ et $x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

e) La fonction f possède une asymptote oblique d'équation $y = -x+1$ et son domaine de définition est $\mathbb{R}$.

Exercice 1.14

Déterminer toutes les asymptotes de la fonction :

$$f(x) = \frac{-2x^4+2x^2}{x^2-x-2}$$

Exercices

Exercice 1.15

Étudier chacune des fonctions suivantes en répondant aux questions ci-dessous.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$

b) $g(x) = \dfrac{2x^2 + 14x + 24}{x^2 + 4x + 4}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 2}$

i) Déterminer son domaine de définition.

ii) Déterminer les coordonnées points d'intersection avec les axes.

iii) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de la fonction.

iv) Déterminer la position relative, par rapport à la fonction, des éventuelles asymptotes horizontales ou obliques.

v) Représenter la fonction et ses asymptotes à l'aide d'un graphique.

Exercice 1.16

Dessiner l'esquisse d'une fonction f vérifiant toutes les conditions.

- Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
- La fonction possède une asymptote verticale en $x = -3$.
- La fonction possède l'asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$.
- La fonction possède l'asymptote horizontale d'équation $y = 1$.
- La fonction est discontinue en $x = 2$.
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe.

Exercice 1.17

Donner un exemple d'un nombre a et de deux fonctions f et g illustrant chacune des situations.

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existent et sont finies mais $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ n'existe pas.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$.

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$ existent et sont des nombres mais $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ n'existe pas.

Chapitre 3

Calcul Différentiel

3.1 Introduction et définitions

3.1.1 Introduction

Une fonction peut représenter la mise en relation de nombreuses quantités qui sont elles-mêmes le reflet de phénomènes de nature très diverses. On peut représenter l'évolution du cours d'une action boursière en fonction du temps, l'évolution du nombre d'habitants dans une région par année, l'énergie d'une particule en fonction de sa vitesse, le volume d'une boîte en fonction de la quantité de matériaux à disposition ou encore le nombre de ventes d'un produit en fonction de son prix. Les fonctions sont partout et les exemples ne manquent pas.

L'étude des fonctions décrivant un phénomène est la base de la plupart des sciences. Savoir quand une fonction est croissante, décroissante ou en quelles valeurs elle atteint son maximum, permet parfois d'anticiper un événement ou d'**optimiser** une stratégie.

Le calcul différentiel est un outil très puissant permettant de rendre compte de la manière dont une fonction évolue par rapport à sa variable. C'est ce que nous allons étudier dans ce chapitre.

Il s'agit ici de savoir si, pour une certaine valeur d'abscisse a, la fonction f est en train de "*monter*" ou de "*descendre*" et avec quelle amplitude. Un objet mathématique simple qui permet de restituer ces informations est la **droite tangente** au graphique de f au point $A(a\,;f(a))$, plus particulièrement de la **pente** de cette tangente.

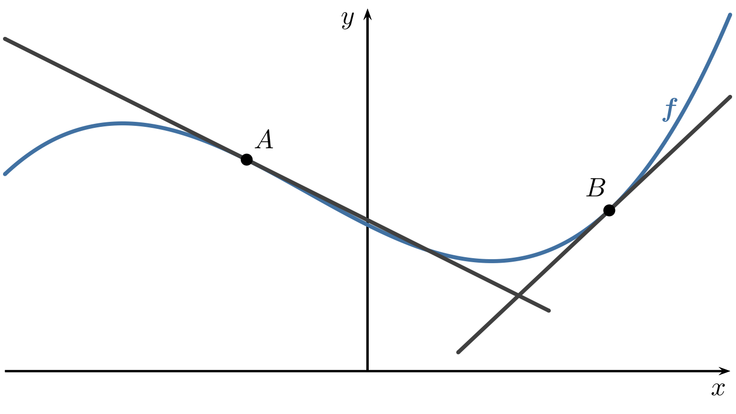


Figure 1 : *La **pente** de la tangente au graphique de f indique si la fonction est dans une phase de croissance ou de décroissance.*

La **pente** de la droite tangente au graphique d'une fonction f au point $A(a\,;f(a))$ nous renseigne sur le comportement de la fonction autour du point A. Il reste encore à trouver un moyen de déterminer cette pente.

Remarque 1.

Le terme *calcul différentiel* prend tout son sens ; la pente d'une droite est donnée par le rapport du différentiel vertical (Δy) sur le différentiel horizontal (Δx).

Ce rapport nous renseigne sur l'amplitude de la variation des images d'une fonction f si nous faisons varier d'une certaine quantité la valeur de la variable.

L'idée est de considérer la tangente comme un cas **limite** d'un ensemble de droites sécantes au graphique de f, toutes passant par le point A, et dont l'autre point d'intersection, disons X, est de plus en plus proche de A.

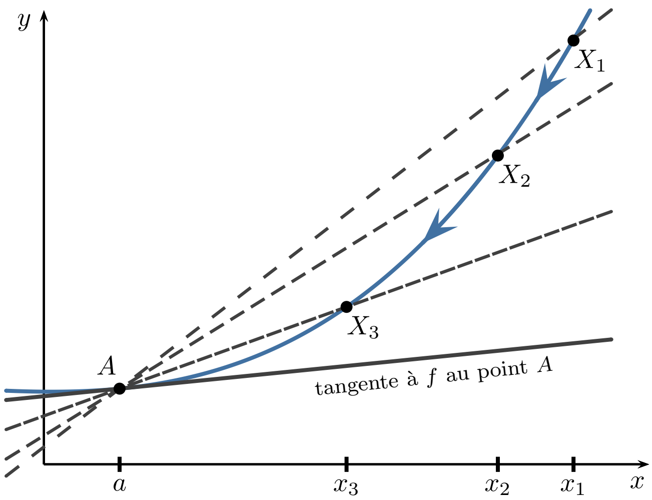


Figure 2 : *A mesure que la valeur de x s'approche de a, les points X_n s'approchent du point A. Les droites sécantes "ressemblent" de plus en plus à la tangente de f au point A.*

Rappelons que la pente de chaque sécante passant par le point A et le point X est donnée par le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

3.1.2 Le nombre dérivé

Définition 3.1

Soit f une fonction définie en a et au voisinage de a.
La dérivée de f au point a est ***le nombre réel*** noté $f'(a)$ et défini par :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est un nombre réel, on dit que f est dérivable en a.

Si la limite précédente n'existe pas ou si elle est infinie, on dit f n'est pas dérivable en a.

Parmi les pentes des sécantes au graphique de f passant par le point fixe $(a; f(a))$ et le point mobile $(x; f(x))$, le nombre $f'(a)$ est la pente qu'on obtient en faisant tendre x vers a.

Dans ce cas *"limite"*, la sécante devient une tangente et le nombre $f'(a)$ correspond à la pente de la tangente au graphique de f au point $(a; f(a))$.

Remarque 2.

En faisant le changement de variable $x = a + h$, la définition devient :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Il est parfois plus confortable d'utiliser cette dernière version de la définition de la dérivée de f en a. Les deux versions sont bien entendu équivalentes.

Exemples :

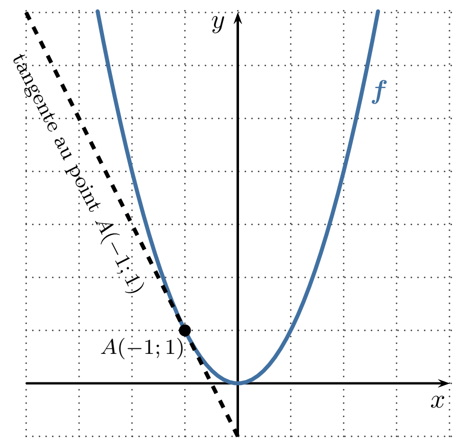
1) Soit la fonction $f(x) = x^2$.

Calculons sa dérivée au point $a = -1$:

$$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$$

On conclut que la pente de la tangente au graphique de f au point $(-1\,;f(-1))$ vaut -2.



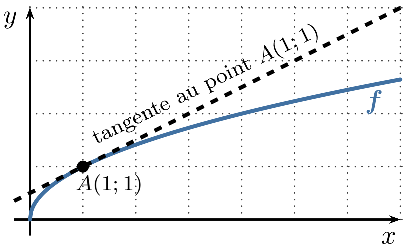
2) Soit la fonction $g(x) = \sqrt{x}$.

Calculons sa dérivée au point $a = 1$:

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{1}{2}$$



On conclut que la pente de la tangente au graphique de g au point $(1\,;g(1))$ vaut $\frac{1}{2}$.

Exercices

Exercice 3.1

A l'aide de la définition, calculer $f'(a)$ pour chacune des fonctions.

a) $f(x) = -2x+7$ et $a = 3$

b) $f(x) = 3x^2+2x-5$ et $a = -5$

c) $f(x) = x^3$ et $a = 2$

d) $f(x) = 7$ et $a = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = -2$

f) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+5}$ et $a = -3$

Exercice 3.2

Pour $x \in [0;6]$, dessiner le graphique de la fonction

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

A l'aide du graphique, déterminer en quelle valeur de x la pente de la tangente au graphique de f est de :

a) 4 ? b) -2 ? c) 0 ?

Exercice 3.3

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

a) Calculer $f'(2)$ avec la définition.

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphique de f au point $P(2\,;1/4)$.

La dérivée d'une fonction f au point a est donc une limite. Calculer cette limite c'est à la fois montrer que la fonction est dérivable en a (si la limite existe) et donner la valeur numérique de cette dérivée (la valeur de la limite). Évidemment, il arrive que cette limite n'existe pas et que, par définition, f ne soit pas dérivable en a. A la lumière du théorème 1.2, la définition 3.1 implique qu'**une fonction est dérivable en a si et seulement si** :

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\text{(En particulier les limites existent)}$$

On appelle les membres à gauche et à droite de l'égalité des **dérivées unilatérales** ; le membre de gauche est la **dérivée à gauche** de la fonction f et le membre de droite est la **dérivée à droite** de f.

Il est utile de considérer ces quantités lorsque la fonction f n'est définie que à gauche (ou à droite) d'un nombre a ou pour démontrer qu'une fonction n'est pas dérivable en a.

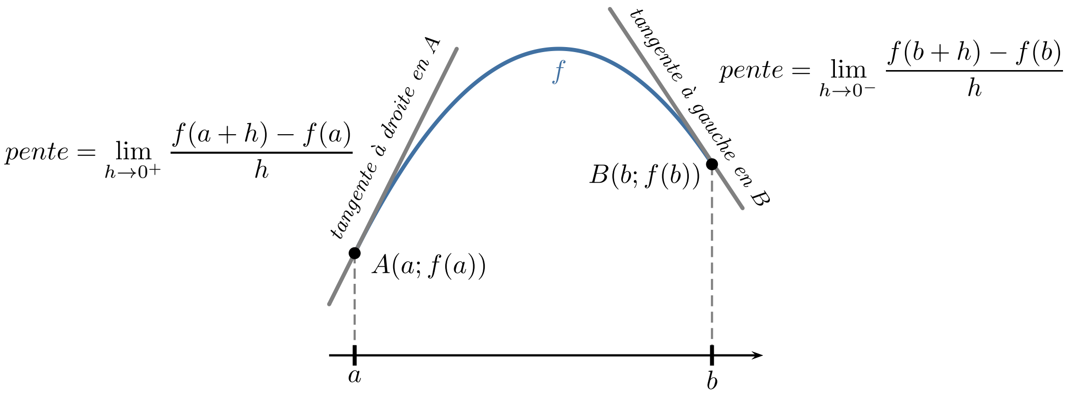


Figure 3 : *f n'est définie que sur $[a; b]$. Les pentes des tangentes en A et B sont obtenues avec les dérivées à gauche et à droite de f.*

3.1.3 Fonction dérivée

Définition 3.2

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point de A.

Dans ce cas on dit que ***la fonction f est dérivable*** et on définit ***la fonction dérivée*** de f, notée f' (prononcé "*f prime*"), par

$$f' : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Il est important de distinguer la définition 3.1 de la définition 3.2.
La première définit **un nombre** qui correspond à la pente de la tangente **en un point donné**.
La deuxième définit **une fonction** qui donne la pente de la tangente en fonction **de la variable x**.

La fonction dérivée est donc donnée par :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ou sa version alternative, plus commode dans cette circonstance :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Le domaine de définition de la fonction dérivée comprend tous les points où cette limite existe.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = x^2$. On calcule la fonction dérivée de f en utilisant l'une ou l'autre des définitions :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

On conclut alors que $f'(x) = 2x$. Alternativement, on peut aussi calculer :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x\to a} (x+a) = 2a.$$

Il découle des définitions que la fonction dérivée f' fournit la pente de la tangente au graphique de f au point $(x\,; f(x))$

Cette fonction dérivée joue un rôle très important dans l'étude du comportement de la fonction f. Nous connaissons déjà la nature du lien qu'il y a entre une fonction et sa dérivée, à savoir que la dérivée renseigne sur la variation de la fonction. Nous verrons dans les sections suivantes comment exploiter ce lien pour obtenir des informations sur la fonction.

Exercices

Exercice 3.4

A l'aide de la définition, calculer la fonction dérivée $f'(x)$.

a) $f(x) = 3x+4$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = 4x^2+5x+6$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = x^3$

Exercice 3.5

Soit la fonction $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Tracer le graphique de f pour $x \in [-5;5]$.

b) Calculer $f'(3)$.

c) Que peut-on dire de la tangente en $x = 0$?

d) Démontrer que f n'est pas dérivable en $x = 0$.

e) Est-ce que f est une fonction dérivable.

3.1.4 Taux de variation*

Il est très courant de rechercher le taux de variation d'une quantité. Un exemple classique est la détermination de la **vitesse** d'un objet en mouvement rectiligne.

Prenons l'exemple d'une cycliste qui part du point A à 10h en direction du point B, sur une route rectiligne, qu'elle atteint à 10h30. Si les deux points sont séparés de 10km alors nous concluons que la cycliste a roulé à une **vitesse moyenne** de

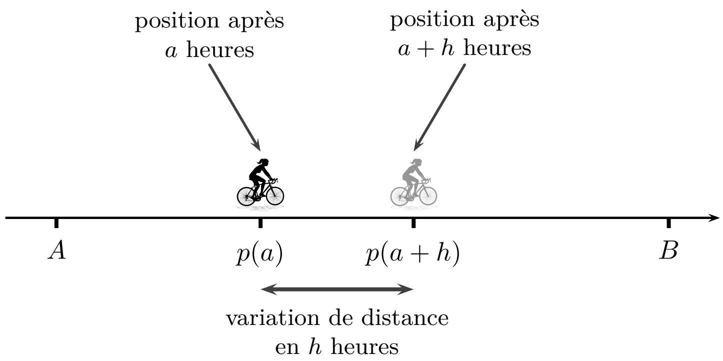
$$v_{moy} = \frac{\text{distance } (km)}{\text{temps } (h)} = \frac{10}{0.5} = 20\ km/h$$

Cela ne signifie pas qu'à 10h10 la cycliste roulait à 20 km/h. Elle a très bien pu ralentir à un moment et accélérer pus tard. Par exemple, si à 10h10 la cycliste se trouvait à 3 km de A et qu'à 10h15 elle se trouvait à 5 km de A, alors sa vitesse moyenne sur ce tronçon était de

$$v_{moy} = \frac{2}{1/12} = 24\ km/h$$

Supposons maintenant que nous connaissons la **fonction position $p(t)$** de la cycliste qui donne sa position (distance parcourue depuis le point de départ) en fonction du temps t. La vitesse moyenne de déplacement entre les positions $p(a)$ (position au bout de a heures) et $p(a+h)$ (position au bout de $a+h$ heures) est donnée par

$$v_{moy} = \frac{\text{variation de distance}}{\text{variation de temps}} = \frac{p(a+h)-p(a)}{h}$$



Plus la différence de temps h est courte et plus nous avons une information précise concernant la vitesse de la cycliste lorsqu'elle se trouvait en $p(a)$. Le cas limite, lorsque h tend vers 0, fournit une *"photographie"* de la **vitesse instantanée** de la cycliste lorsqu'elle se trouve en $p(a)$.

$$v_{inst} = \lim_{h\to 0} \frac{p(a+h)-p(a)}{h} = \boldsymbol{p'(a)}$$

La vitesse instantanée après a heures est la dérivée $p'(a)$ de la fonction position $p(t)$ au point a.

Cette approche est celle utilisée par le physicien Isaac Newton lorsqu'il essayait de décrire le mouvement d'objets soumis à certaines forces, en particulier lorsque ces objets étaient en chute libre.

Exercices

Exercice 3.6*

La distance parcourue par un avion, à l'arrêt, qui s'apprête à décoller est donnée par la fonction $p(t) = t^2$, où t est le nombre de secondes écoulée depuis le moment où l'avion accélère pour décoller et p est la distance en mètres.

a) Quelle distance aura parcouru l'avion après 8 secondes ?

b) Combien de secondes faut-il à l'avion pour parcourir 150 mètres ?

c) Quelle est la vitesse moyenne de l'avion après 400 mètres ?

d) En supposant que la vitesse de décollage de l'avion soit de 270 km/h, quelle doit être la longueur minimale de la piste de décollage ?

Exercice 3.7*

On lâche une pierre depuis le haut d'une falaise haute de 150 m. La hauteur h en mètres de la pierre par rapport au sol en contre-bas après t secondes est donnée par la fonction

$$h(t) = -5t^2 + 150$$

a) A quelle hauteur se trouve la pierre après 3 secondes

b) Quelle est la vitesse de la pierre après 3 secondes.

c) Quelle est la vitesse de la pierre lorsqu'elle touche le sol ?

d) Quelle a été la vitesse moyenne de la pierre durant toute sa chute ?

3.2 Droite tangente et Approximation

3.2.1 Droite tangente au graphique d'une fonction

Proposition 3.1

Soit f une fonction dérivable en a.

Alors la droite tangente T_a au graphique de la fonction f au point $(a; f(a))$ est donnée par la fonction :

$$T_a(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Démonstration :

Comme T_a est une droite nous avons $T_a(x) = m \cdot x + n$ où m est la pente de la tangente et n est son ordonnée à l'origine.

Par définition $f'(a) = m$ et donc $T_a(x) = f'(a) \cdot x + n$. Il reste à déterminer la valeur de n. Comme la tangente passe par le point $(a, f(a))$, on doit avoir $T_a(a) = f(a)$:

$$f(a) = T_a(a) = f'(a) \cdot a + n \quad \Rightarrow \quad n = f(a) - f'(a) \cdot a$$

Pour finir, en faisant la mise en évidence de $f'(a)$, on obtient :

$$T_a(x) = \underbrace{f'(a)}_{m} \cdot x + \underbrace{f(a) - f'(a) \cdot a}_{n} = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$ ■

Exemple :

On aimerait déterminer l'équation de la tangente au graphique de $f(x) = x^2$ au point $(-1; f(-1))$.

Dans l'exemple de la page 26, nous avons déjà calculé $f'(-1) = -2$.

D'où on obtient $T_{-1}(x) = -2(x - (-1)) + (-1)^2 = -2x - 1$ et l'équation de la tangente s'écrit :

$$T_{-1} : y = -2x - 1$$

3.2.2 Approximation*

Si x est assez proche de a, la fonction $T_a(x)$ aura, par nature, des images proches de celles de $f(x)$. On peut alors considérer que $T_a(x)$ constitue une bonne approximation de la fonction f au voisinage direct de a. En d'autres mots :

$$f(x) \approx f'(a) \cdot (x - a) + f(a) \quad \text{si} \quad x \approx a$$

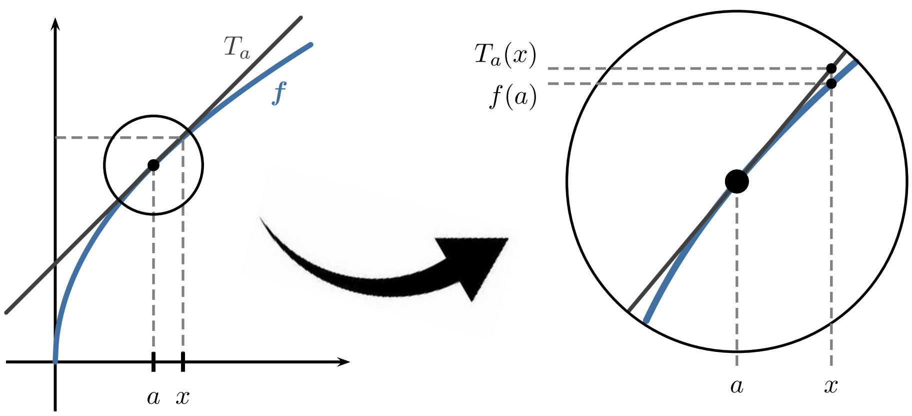


Figure 4 : *Si x est proche de a alors $f(x) \approx T_a(x)$.*

Exemple :

On aimerait calculer une approximation de la valeur $(-1,031)^2$.

On considère alors la fonction $f(x) = x^2$ dont la fonction tangente en $x = -1$ est donnée par

$$T_{-1}(x) = -2x - 1$$

Pour x proche de -1, la fonction $T_{-1}(x)$ donne une valeur approchée de $f(x)$:

$$f(-1.031) \approx T_{-1}(-1.031) = 2 \cdot (-1.031) - 1 = 1.062$$

En fait $(-1.031)^2 = 1.062961$. L'approximation est correcte à 0.001 près et ce nombre s'appelle **l'ordre** de l'erreur.

Exercices

Exercice 3.8

Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) A l'aide de la définition, déterminer la fonction dérivée de f.

b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer $f'(-1)$.

c) Donner l'équation de la droite tangente au graphique de f au point $(-1, f(-1))$.

d) Déterminer par le calcul les points du graphique de f pour lesquels la tangente est horizontale.

Exercice 3.9

Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

a) Donner les équations suivantes :

   i) La tangente au graphique de f au point $(3; -5)$.

   ii) La tangente au graphique de f dont la pente vaut -2.
   (Donner également le point de tangence)

   iii) La tangente au graphique de f qui est horizontale.
   (Donner également le point de tangence)

b) Tracer dans un repère le graphique de la fonction f et représenter les 3 tangentes ci-dessus.

Exercice 3.10

Pour chaque fonction, déterminer la pente de la tangente à leur graphique au point d'abscisse $x = 1$.

a) $f(x) = 8 - 5x^2$

b) $g(x) = \dfrac{4}{x+1}$

c) $h(x) = \dfrac{2}{x+3}$

Exercice 3.11

Soit la fonction définie par $f(x) = -3x^2 - 5x + 7$.

a) Que peut-on dire de la pente de la tangente au sommet du graphique de f ?

b) A l'aide de la dérivée de f, déterminer les coordonnées du sommet S de f.

Exercice 3.12

Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Est-ce que la droite donnée par $d(x) = 2x - 4$ est une tangente au graphique de f ?

Exercice 3.13*

a) Déterminer une approximation de :

   i) $\sqrt{1.02}$ ii) $\sqrt{25.3}$

   iii) $(4.001)^2$ iv) 1.99^2

b) A l'aide de votre calculatrice, déterminer la valeur exacte de chaque item précédent et donner l'ordre de son erreur.

3.3 Dérivée de fonctions usuelles et propriétés

3.3.1 Lien entre dérivabilité et continuité

Le théorème qui suit est très important car il établit la relation qui existe entre les fonctions dérivables et les fonctions continues. Nous avons déjà remarqué dans un exercice précédent que la fonction $|x|$ n'était pas dérivable en $x = 0$ bien qu'elle soit continue en $x = 0$. *A contrario* nous allons montrer que si une fonction est dérivable, alors elle est continue.

Théorème 3.2 (*Relation entre dérivabilité et continuité*)
Soit f une fonction dérivable en a (en particulier f est définie au voisinage de a).
Alors f est continue en a.

Démonstration :

Il nous faut montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Pour cela, nous commençons par donner une réécriture *"astucieuse"* de la fonction $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\right) \quad (x\neq a)\\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a)\\
&= \underbrace{f'(a)}_{\in\mathbb{R}}\cdot 0 + f(a)\\
&= f(a)
\end{aligned}$$

propriétés des limites

dérivabilité de f en a et calculs de limites

$\blacksquare$

Remarque 3.

Comme toujours, remarquons qu'au moment où nous avons utilisé les propriétés des limites, nous ne savions pas encore si nous pouvions le faire.

Ce n'est que parce que nous pouvons calculer chacune des limites obtenues (donc que ces dernières existent) en aboutissant à un résultat final défini que nous pouvons justifier du fait d'avoir pu utiliser les propriétés.

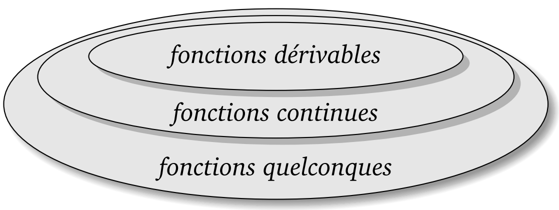
Il est important de noter que la **réciproque du théorème 3.2 n'est pas vraie**. En effet, nous avons déjà étudié la fonction $|x|$ qui est continue en $x = 0$ mais qui n'est pas dérivable en en $x = 0$.

Cependant, la **contraposée** du théorème 3.2, donnée par :

"Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas dérivable en a."

est vraie. La contraposée d'un théorème est **toujours vraie**.

Les considérations qui précèdent permettent de dresser le diagramme suivant qui met en lumière la relation qui existe entre les fonctions dérivables, continues et quelconques :



Exercices

Exercice 3.14

Soit les fonctions :
i) $f(x) = x^3$ ii) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

Pour chacune des fonctions :

a) déterminer si elle est continue en $x = 0$.
b) déterminer si elle est dérivable en $x = 0$.
c) esquisser le graphique de la fonction et interpréter le résultat de l'item b) sur le graphique.

Exercice 3.15

Pour chacune des fonctions, dire si :

a) elle est continue au point de changement.
b) elle est dérivable au point de changement.

i) $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x \geqslant -1 \\ 2x^2+x+2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

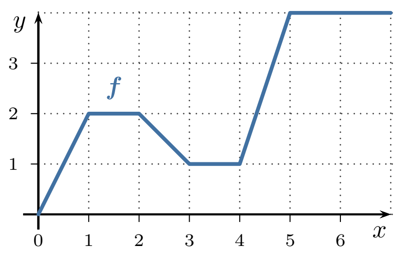
ii) $f(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x^2+3x+2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} x^3-2x^2+x-3 & \text{si } x > 2 \\ 3x^2-7x+1 & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$

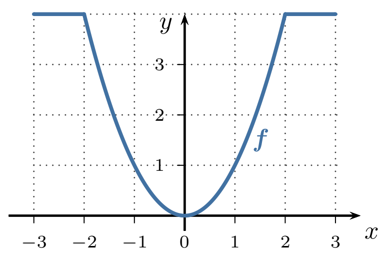
Exercice 3.16

Pour chacune des fonctions, tracer une esquisse du graphique de la dérivée f' et déterminer les points où f n'est pas dérivable.

a)



b)



Exercice 3.17

Tracer l'esquisse plausible du graphique d'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ mais non-dérivable uniquement si $x \in \mathbb{Z}$.

3.3.2 Techniques de dérivation

Comme nous l'avons remarqué, il peut être compliqué et long de calculer la dérivée d'une fonction à l'aide de la définition. Nous allons donc établir des **formules de dérivation** qui nous permettront de dériver les fonctions usuelles. Il sera ainsi possible de calculer rapidement la dérivée de chacune d'elles sans passer par un calcul de limite.

DÉRIVÉE DES FONCTIONS USUELLES

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{R}$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $(e^x)' = e^x$
- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Il reste bien entendu nécessaire de **démontrer** que ces **fonctions sont dérivables** et que leur dérivée est bien celle indiquée ci-dessus. C'est ce que nous ferons au paragraphe suivant à part pour les fonctions e^x et $\ln(x)$ qui seront étudiées en détail l'année prochaine.

Les propositions qui suivent montrent comment il est possible de dériver la somme, le produit, le quotient et la composition de fonctions. En combinant les règles de dérivation énoncées ci-dessus avec ces propriétés, nous pourront facilement dériver la plupart des fonctions que nous rencontrerons.

Proposition 3.3 (*Linéarité de la dérivée*)
Soit f et g deux fonctions dérivables en a. Alors :

1) la fonction $\lambda \cdot f$ est dérivable en a $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ et $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$.

2) la fonction $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Exemples :

1) Si $\lambda = 2$ et $f(x) = x^3$, alors

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \left(2 \cdot x^3\right)' = 2 \cdot \left(x^3\right)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$$

2) Si $f(x) = -3x^4$ et $g(x) = \sin(x)$, alors

$$(f+g)'(x) = \left(-3x^4 + \sin(x)\right)' = \left(-3x^4\right)' + \sin'(x) = -12x^3 + \cos(x)$$

Démonstration :

Soit f et g deux fonctions dérivables en a en $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

i) $$(\lambda \cdot f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(\lambda \cdot f)(x) - (\lambda \cdot f(a)}{x-a}$$

définition de la fonction $\lambda \cdot f$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(a)}{x-a}$$

Mise en évidence de λ

$$= \lim_{x \to a} \lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

propriété des limites

$$= \lambda \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$= \lambda \cdot f'(a)$$

dérivabilité de f en a

ii) $$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a}$$

définition de la fonction $(f+g)$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a}$$

algèbre

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$$

propriété des limites

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) + \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

dérivabilité de f et g en a

Proposition 3.4 (*Dérivée d'un produit de fonctions*)
Soit f et g deux fonctions dérivables en a. Alors la fonction $f \cdot g$ est dérivable en a et

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Exemple :

Si $f(x) = (3x+1)$ et $g(x) = (2x^2 - 5x)$, alors

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \left((3x+1)(2x^2-5x)\right)' = (3x+1)' \cdot (2x^2-5x) + (3x+1) \cdot \left(2x^2-5x\right)' \\ &= 3(2x^2-5x) + (3x+1)(4x-5)\end{aligned}$$

Démonstration :

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a}$$

définition de la fonction $f \cdot g$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$$

astuce algébrique

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) \overbrace{- f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x)}^{=0} - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$$

algèbre

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$$

propriétés des limites

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

dérivabilité de f et g en a et continuité de g en a

Proposition 3.5 (*Dérivée d'un quotient de fonctions*)
Soit f et g deux fonctions dérivables en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Exemple :

Si $f(x) = \tan(x) - x$ et $g(x) = e^x$, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{\tan(x) - x}{e^x}\right)' = \frac{(\tan(x)-x)' \cdot e^x - (\tan(x) - x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan^2(x) - 1) \cdot e^x - (\tan(x) - x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x} \cdot \left(\tan^2(x) - \tan(x) + x\right)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{\tan^2(x) - \tan(x) +}{e^x}$$

Remarque 4.

Dans le cas particulier où $f(x) = 1$, la proposition 3.5 devient :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{(1)' \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Démonstration :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a}$$

définition de la fonction $\frac{f}{g}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}$$

algèbre

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)\cdot g(a)-f(a)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(a)}}{x-a}$$

algèbre

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)\cdot g(a)\overbrace{-f(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g(a)}^{=0}-f(a)\cdot g(x)}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$$

algèbre

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)\cdot[f(x)-f(a)]-f(a)\cdot[g(x)-g(a)]}{x-a}}{g(x)\cdot g(a)}$$

propriétés des limites

$$=\frac{g(a)\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(a)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

$$=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Dérivabilité de f et g en a,
Continuité de g en a,
$g(a)\neq 0$

Voici la dernière règle de dérivation. La complexité de sa démonstration est rédhibitoire et dépasse le cadre du cours. C'est pourquoi nous l'admettrons sans démonstration.

Cependant cette propriété est très importante ; d'une part elle sera fréquemment utilisée et d'autre part elle interviendra dans le processus de recherche de *"primitives"* de fonctions, notion que nous aborderons dans un prochain chapitre d'analyse.

Proposition 3.6 (*Dérivée de fonctions composées*)
Soit f une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$. Alors la fonction $g\circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a)=(g'\circ f)(a)\cdot f'(a)$$

Exemple :

Soit les fonctions : $g(x)=x^4 \qquad f(x)=\cos(x)$

$g'(x)=4x^3 \qquad f'(x)=-\sin(x)$

$$(g\circ f)'(x)=\left((\cos(x))^4\right)'=4\cdot(\cos(x))^3\cdot(-\sin(x))=-4\cdot\cos^3(x)\cdot\sin(x)$$

Remarque 5.

Il découle de la proposition 3.3 que la dérivée de toute fonction polynomiale se calcule ainsi :

$$f'(x)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots a_nx^n)'=a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\cdots n\cdot a_nx^{n-1}$$

Exercices

Exercice 3.18

A l'aide des règles de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^6$

b) $f(x) = x^2 + 3$

c) $f(x) = x^5 - \dfrac{2}{9}x^3 + 5x^2 - x - \dfrac{7}{19}$

d) $f(x) = (x^2 + 3x - 5) + (2x^2 + 5 - x)$

e) $f(x) = (3x + \dfrac{1}{2}) \cdot (11x^2 - 8x + 5)$

f) $f(x) = (x^2+3x-5)\cdot(-2x^3+5x^2-2x+9)$

g) $f(x) = \dfrac{7x-4}{2x}$

h) $f(x) = \dfrac{5x^2+2}{7x-1}$

i) $f(x) = (3x-1)^3$

j) $f(x) = (-7x^2 - 23x + 11)^5$

k) $f(x) = \dfrac{2x^5 + x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x + 1}{2}$

l) $f(x) = \dfrac{(7x+1)(x^2+2x-7)}{(6x-5)}$

Exercice 3.19

A l'aide des règles de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

b) $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(x)$

c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3x}$

d) $f(x) = \ln(x) \cdot (2x+1)$

e) $f(x) = e^{4x}$

f) $f(x) = \sin(-7x^3 + 2x)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{e^{3x+1}}$

h) $f(x) = e^{\tan(x)}$

Exercice 3.20

A l'aide des règles de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3(x^2 + x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-3}$

c) $f(t) = 4(t^2 + t)$

d) $f(t) = \dfrac{3t^2 - 2t}{t^2 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^3}$

f) $f(x) = \dfrac{4x}{3(x+3)}$

Exercice 3.21

A l'aide des règles de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (3x^2 + 2x - 5)^5$

b) $f(x) = (x^2 - 4)^2(3x^2 + 2x - 5)^3$

c) $f(x) = (3x^2 + 2x - 5)^{-2}$

d) $f(x) = \left((3x-5)^3 - 6x\right)^2$

e) $f(x) = \left(\dfrac{2x-5}{2-3x}\right)^3$

f) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x}{(x-2)^3}$

g) $f(x) = \dfrac{(x^2-4)^2}{(2x-3)^3}$

h) $f(x) = \sqrt{2x-3}$

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

k) $f(x) = (2x-5)^{\frac{2}{3}}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

m) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

3.3.3 Dérivée de fonctions polynomiales

Au paragraphe précédent, nous avons énoncés des formules de dérivation pour les fonctions usuelles. Cependant, il reste encore à démontrer que ces formules sont correctes. C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe (fonctions polynomiales) et le suivant (fonctions trigonométriques). La démonstration des dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques ne seront pas exposées cette année [1].

La démonstration de $(x^n)' = nx^{n-1}$ se fera en plusieurs étapes. La proposition 3.7 commencera par traiter le cas où l'exposant n est entier ($n \in \mathbb{Z}$). Nous verrons ensuite dans la proposition 3.8 que la règle s'applique également à des exposants rationnels ($n \in \mathbb{Q}$) et dont la démonstration repose notamment sur le résultat de l'exercice 3.26.

Dans un premier temps, nous commencerons donc par examiner le cas où n est un nombre entier positif, c'est-à-dire $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous allons utiliser un raisonnement par *récurrence.*

La démonstration par récurrence

Lorsqu'une propriété (ou formule) fait intervenir un nombre entier positif n, et qu'on souhaite démontrer que cette propriété (formule) est vraie quelle que soit la valeur de l'entier positif n, il est souvent possible d'utiliser un raisonnement par *récurrence*. La récurrence est un procédé de démonstration mathématique qui repose sur le principe suivant :

i) On démontre que la propriété (formule) est vraie pour $n = 1$.

ii) On admet que la propriété (formule) est vraie pour une certain nombre n.

iii) On démontre que cela implique que la propriété (formule) est vraie pour $n + 1$.

Le raisonnement est une *"induction"* qui découle du fait que la propriété (formule) est vraie pour $n = 1$. Le points ii) et iii) impliquent que la propriété (formule) doit être vraie pour le n suivant, c'est-a-dire $n = 2$. Donc également pour le n suivant, à savoir $n = 3$, et ainsi de suite. Il est alors possible de conclure que la propriété (formule) est vraie pour n'importe quel nombre entier positif n.

Prenons par exemple la formule suivante qui donne la somme des n premiers nombres entiers :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Pour $n = 1$, la formule donne : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$, qui est correct.

Pour $n = 2$, la formule donne : $1 + 2 = \dfrac{2(2+1)}{2} = 3$, qui est correct.

Pour $n = 3$, la formule donne : $1 + 2 + 3 = \dfrac{3(3+1)}{2} = 6$, qui est également correct.

Ces différentes étapes permettent de conforter l'idée que la formule est correcte, sans pour autant la démontrer. Admettons maintenant que la formule est vraie pour un certain nombre n (elle l'est en tout cas si $n = 1, 2$ ou 3). Ainsi, on considère que la formule :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

est une **hypothèse (de récurrence)**. Notre objectif est alors de démontrer la validité de la formule :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}$$

1. Nous reprendrons ces notions l'année prochaine dans un chapitre qui sera entièrement dédié à l'étude (et à la définition) de ces fonctions

Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+n+(n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) && \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) && \textit{Par hypothèse (de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} && \textit{Mise au même dénominateur} \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} && \textit{Addition de fractions} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && \textit{mise en évidence de } (n+1) \\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2} && (n+2)=(n+1)+1
\end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que *si la formule est vraie pour un certain n, alors elle est vraie pour le n suivant*. Comme la formule est vraie pour $n=1$, alors elle est pour $n=2$, par suite pour $n=3$, etc.

Nous avons donc établi que la formule est vraie pour toute valeur $n \in \mathbb{N}$.

Remarques 6.

i) Dans l'exemple précédent, nous avons vérifié la formule pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$. Cependant, seule la vérification pour $n=1$ est vraiment pertinente (et nécessaire !).

ii) Une proposition peut être vraie seulement à partir d'un certain nombre entier autre que 1. Dans ce cas, on détermine le premier entier j pour lequel la proposition est vraie, puis on admet que la proposition est vraie pour $n \leqslant j$ pour finalement démontrer l'induction.

Exercices

Exercice 3.22

Démontrer par récurrence que

$$1^2+2^2+3^2\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 3.23

Déterminer le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$n+12<n^2$$

puis démontrer l'inégalité par récurrence.

Exercice 3.24

Déterminer le plus petit nombre entier positif pour lequel on a

$$2^n<n!$$

puis démontrer l'inégalité par récurrence.

Exercice 3.25

Soit $a>-1$ et $a \neq 0$. Démontrer par récurrence que

$$(1+a)^n>1+na \quad \text{si } n \geqslant 2$$

Exercice 3.26

a) Calculer :

i) $(a-b)(a+b)$

ii) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

iii) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

iv) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

b) Montrer que :

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

(Indication : la récurrence n'est pas nécessaire.)

Proposition 3.7 (*Règle de dérivation pour un exposant entier*)
Soit la fonction $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
Alors f est dérivable et

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \textit{(avec } x \neq 0 \textit{ si } n \leqslant 0)$$

Démonstration :

Considérons le cas où $\boldsymbol{n}$ **est strictement positif** et procédons par récurrence. On commence par montrer que la proposition est vraie pour $n = 1$, c'est-à-dire $f(x) = x^1 = x$.

On calcule alors la dérivée de $f(x) = x$ se calcule à l'aide de la définition [2] :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Par ailleurs, la formule de la proposition donne : $(x)' = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.
Donc la formule est vraie pour $n = 1$.

Admettons alors que la formule de dérivation soit vraie pour un certain n ; c'est l'hypothèse de récurrence. Nous voulons maintenant démontrer que la formule est vraie pour $n + 1$ et nous avons le droit d'utiliser le fait qu'elle est vraie pour n.

$$\left(x^{n+1}\right)' \overset{\substack{\text{Propriété des puissances}\\ \downarrow}}{=} (x^n \cdot x)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dérivée d'un produit}}}{\overset{(1)}{=}} (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \overset{\substack{\text{Formule de récurrence}\\ \text{et cas } n=1\\ \downarrow}}{=} nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Propriété des puissaces}}}{=} nx^n + x^n \overset{\substack{\text{Mise en évidence de } x^n\\ \downarrow}}{=} (n+1)x^n$$

Il faut préciser que nous pouvons appliquer la règle de dérivation d'un produit à l'égalité (1) car la fonction x est dérivable (nous l'avons montré ci-dessus) et que l'hypothèse de récurrence garantit que x^n est également dérivable.

Nous avons donc démontré que, en admettant que la formule est vraie pour un certain n, alors elle est vraie pour le n suivant. Comme nous avons montré que la formule est vraie pour $n = 1$, alors elle l'est pour $n = 2$ donc pour $n = 3$, etc. Il suit que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour le cas où $\boldsymbol{n}$ **est strictement négatif**, on écrit $n = -k$ où $k \in \mathbb{N}$. On obtient, pour $x \neq 0$:

$$(x^n)' = \left(x^{-k}\right)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Propriété des puissances}}}{=} \left(\frac{1}{x^k}\right)' \overset{\substack{\text{Dérivée d'un quotient}\\ \downarrow}}{\underset{(2)}{=}} -\frac{1}{x^{2k}} \cdot \left(x^k\right)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dérivée de } x^k \text{ pour } k \in \mathbb{N}}}{=} -\frac{1}{x^{2k}} \cdot kx^{k-1} \overset{\substack{\text{Propriété des puissances}\\ \downarrow}}{=} -k \cdot x^{k-1-2k} = -kx^{-k-1} \overset{\substack{-k\,=\,n\\ \downarrow}}{=} nx^{n-1}$$

Là aussi, il est possible d'appliquer la règle de dérivation d'un quotient à l'égalité (2) car, comme nous l'avons démontré ci-dessus, la fonction x^n est dérivable pour $n \in \mathbb{N}$. Et la formule est démontrée pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

Pour finir, si $\boldsymbol{n = 0}$, la formule donne

$$f'(x) = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = \frac{0}{x} = 0 \quad \text{si } x \neq 0$$

et comme nous avons déjà démontré que la dérivée d'une constante vaut 0, on conclut que la formule de dérivation est également vraie pour $n = 0$.

Nous avons donc démontré que $(x^n)' = nx^{n-1}$ est vrai si $n \in \mathbb{Z}$. ■

2. Attention, il serait faut d'utiliser la formule pour dériver la fonction. On veut justement montrer que la formule donne

Proposition 3.8 (*Règle de dérivation pour un exposant rationnel*)
Soit la fonction $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.
Alors f *est dérivable et*

$$f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \quad \textit{partout où la fonction } f' \textit{ est définie.}$$

Démonstration :

Il nous faut montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h}$ existe et est un nombre.

D'abord, voyons que l'identité $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ démontrée à l'exercice 3.26, peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a-b}{a^n - b^n} = \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}} \quad \text{pour } \ a \neq b$$

En prenant $a = (x+h)^{\frac{1}{n}}$ et $b = x^{\frac{1}{n}}$ nous obtenons l'égalité

$$\frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{\underbrace{(x+h)-x}_{=h}} = \frac{1}{(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + (x+h)^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \ldots + (x+h)^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} \qquad \textbf{(1)}$$

Revenons au calcul de f' :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{réécriture du dénominateur} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{(x+h)-x} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{identité } \mathbf{(1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + (x+h)^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \ldots + (x+h)^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{calcul de la limite avec les propriétés} \\
&= \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{n-3}{n}} x^{\frac{2}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-2}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{propriété des puissances} \\
&= \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-1}{n}}} \\
&= \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \boldsymbol{\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}}
\end{aligned}$$

propriété des puissances

■

Il découle des propositions 3.7 et 3.8 que la fonction $f(x) = x^n$ est dérivable pour $n \in \mathbb{Q}$ et que sa dérivée vaut nx^{n-1}. En effet, pour $n = p/q$ (p et q des nombres entiers), on a :

$$(x^n)' = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)' = p \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \cdot \left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = p \cdot x^{\frac{p-1}{q}} \cdot \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Remarque 7.

La formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ s'applique même si $n \in \mathbb{R}$. Cependant la démonstration nécessite des outils qui sont au-delà du cadre de notre cours.

---

la bonne réponse !

3.3.4 Dérivées des fonctions trigonométriques

Nous allons maintenant démontrer les règles de dérivation des fonctions trigonométriques déjà énoncées. Outre un peu d'algèbre, la démonstration fait appel aux théorèmes 1.6 et 1.7 que nous avons vu au chapitre sur les limites.

Par ailleurs, nous aurons également besoin d'utiliser les relations trigonométriques suivantes :

$$\text{i) } \sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\text{ii) } \cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \qquad \text{iii) } \sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Dans la suite, x est un nombre réel qui représente la mesure d'un angle en radians.

Proposition 3.9 (*Règle de dérivation des fonctions trigonométriques*)
Les fonctions $\sin(x)$; $\cos(x)$ *et* $\tan(x)$ *sont dérivables et :*

i) $(\sin(x))'=\cos(x)$

ii) $(\cos(x))'=-\sin(x)$

iii) $(\tan(x))'=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ *pour* $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$

Démonstration :

i) On applique la définition 3.2 à la fonction $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&\qquad\qquad \text{\textit{identité trigonométrique}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&\qquad\qquad \text{\textit{mise en évidence de} } \sin(x) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&\qquad\qquad \text{\textit{algèbre}} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) \\
&\qquad\qquad \text{\textit{propriété des limites}} \\
&= \sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\
&\qquad\qquad \text{\textit{théorèmes 1.6 et corolaire 1.7}} \\
&= \sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Nous avons démontré que sinus est une fonction dérivable de dérivée cosinus.

ii) Pour la dérivée de la fonction cosinus, il suffit de transformer $\cos(x)$ en $\sin(x)$ et cosinus est donc une fonction dérivable en tant que composition de fonctions dérivables.
Sa dérivée se calcule alors en utilisant la règle de dérivation d'une composition de fonctions ainsi que le résultat précédent :

$$(\cos(x))' \overset{\text{\textit{identité trigonométrique}}}{=} \left(\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right)' \underset{\text{\textit{Dérivée d'une composition}}}{=} \cos(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = -\cos(\frac{\pi}{2}-x) \overset{\text{\textit{identité trigonométrique}}}{=} -\sin(x)$$

iii) Pour finir, nous écrivons la fonction tangente comme le quotient du sinus et du cosinus. Comme le quotient de deux fonctions dérivables est dérivable, nous pouvons affirmer que tangente est une fonction dérivable.

Pour calculer sa dérivée, nous utilisons la règle de dérivation du quotient ainsi que les deux résultats précédents :

$$\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{[\sin(x)]'\cos(x) - \sin(x)[\cos(x)]'}{\cos^2(x)} && \textit{identité trigonométrique} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} && \textit{mise en évidence de } \sin(x) \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} && \textit{algèbre} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} && \textit{identité trigonométrique}
\end{aligned}$$

■

Exercices

Exercice 3.27

A l'aide des règles de dérivation, calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x - x^2\cos(x)$

b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

c) $f(x) = \big(\sin(x) + \cos(x)\big)^2$

d) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$

e) $f(x) = x^3\sin(x)$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)\tan(x)}$

g) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{1+x^2}$

Exercice 3.28

Soit la fonction $f(x) = x + 2\cos(x)$.

Trouver l'abscisse de tous les points en lesquels la tangente au graphique de f est horizontale.

Exercice 3.29

Soit la fonction $f(x) = 3 + 2\sin(x)$.

a) Trouver l'abscisse de tous les points en lesquels la tangente au graphique de f est parallèle à la droite $y = \sqrt{2}x - 5$.

b) Trouver une équation de la tangente au graphique de f au point d'abscisse $x = \pi/6$.

Exercice 3.30

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Dans tous les cas, justifier votre réponse.

a) Si la fonction f n'est pas dérivable en a, alors f n'est pas continue en a.

b) Si la fonction $f+g$ est dérivable en a, alors f et g sont dérivables en a.

c) On a la relation $(f+g)' = f' + g'$ quelles que soient les fonctions f et g.

d) Toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

e) S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$, alors la fonction f est une constante.

3.4 Applications de la dérivée

L'étude du comportement d'une fonction est au coeur de l'analyse en mathématique. Les fonctions sont un outils présent dans tous les domaines d'études ; elles permettent de décrire la concentration d'un médicament dans le sang d'un patient, la résistance électrique d'un circuit, les variations des taux d'intérêts, la consommation de carburant, la température d'un gaz ou encore l'évolution d'une épidémie. Les possibilités d'exprimer une quantité *en fonction* d'une (ou plusieurs) autre(s) quantités sont infinies.

Il est donc de la plus haute importance d'être capable de déterminer et prédire lorsqu'une fonction est en phase de croissance ou de décroissance, ou pour quelle(s) valeur(s) la fonction est minimale ou maximale. Pouvoir anticiper l'évolution d'un phénomène permet de prendre les bonnes décisions afin d'optimiser le résultat qu'on cherche à obtenir.

Nous allons préalablement rappeler la terminologie propre aux fonctions puis nous énoncerons et démontrerons le résultat le plus important de ce chapitre : le *théorème de accroissement finis*[3]. Nous pourrons alors démontrer d'autres théorèmes qui nous fourniront des outils pour étudier de manière plus approfondie certaines fonctions. Nous serons alors en mesure de tracer soigneusement le graphique d'une fonction grâce aux informations apportées par la dérivée.

En fin de section, nous traiterons les problèmes d'*optimisation*, où il s'agira de déterminer une quantité pour laquelle une fonction fournit *"la meilleure"* valeur possible.

3.4.1 Valeurs extrêmes

Les définition suivantes introduisent les termes que nous utiliserons pour décrire une fonction et serons repris dans les propositions et théorèmes que nous étudierons dans cette section.

Définition 3.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ et soient $x_1; x_2 \in [a;b]$.

(1) f est strictement **croissante** sur $[a;b]$ si $f(x_1) < f(x_2)$ quels que soient $x_1 < x_2$.

(2) f est strictement **décroissante** sur $[a;b]$ si $f(x_1) > f(x_2)$ quels que soient $x_1 < x_2$.

(3) f est **constante** sur $[a;b]$ si $f(x_1) = f(x_2)$ quels que soient x_1 et x_2.

Il est bien connu que lorsqu'une fonction est strictement croissante, son graphique monte à mesure que la valeur de sa variable x augmente. De même, le graphique d'une fonction strictement décroissante descend à mesure que la valeur de x augmente. Les fonctions constantes sont représentées par des segments horizontaux.

Rappelons qu'une fonction est **croissante** si elle est strictement croissante ou constante et **décroissante** si elle est strictement décroissante ou constante.

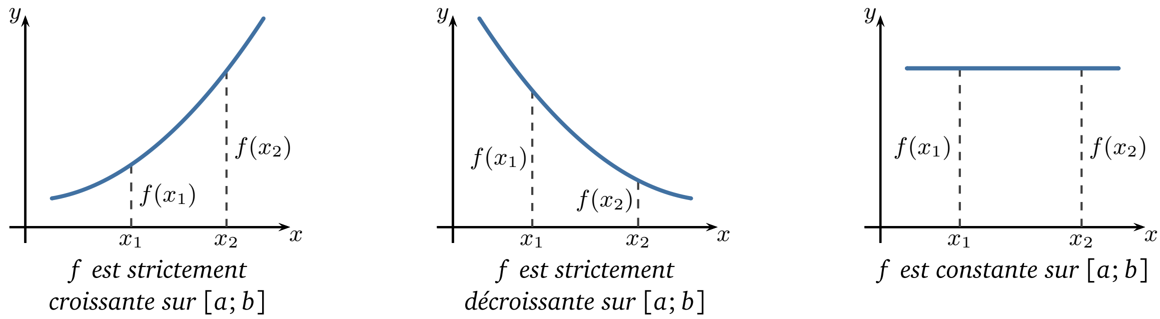


Figure 5 : *Fonctions strictements croissantes, décroissantes et constante*

3. Le résultat de ce théorème sera également très utile l'année prochaine lorsque nous traiterons du calcul intégral.

Définition 3.4

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ et soit $c \in [a;b]$.

(1) On dit que f a un **minimum global** en c sur $[a;b]$ si $f(x) \geqslant f(c)$ quel que soit $x \in [a;b]$.

(2) On dit que f a un **maximum global** en c sur $[a;b]$ si $f(x) \leqslant f(c)$ quel que soit $x \in [a;b]$.

(3) On dit que f a un **minimum local** en c sur $[a;b]$ s'il existe un voisinage V de c tel que $f(x) \geqslant f(c)$ quel que soit $x \in V$.

(4) On dit que f a un **maximum local** en c sur $[a;b]$ s'il existe un voisinage V de c tel que $f(x) \leqslant f(c)$ quel que soit $x \in V$.

Lorsqu'une fonction atteint f un maximum, respectivement minimum, en une valeur c on dit que $f(c)$ est une valeur maximale, respectivement minimale, de la fonction f sur l'intervalle considéré.

Cette valeur maximale ou minimale est appelée un **extremum** de la fonction f. En d'autres termes, un extremum est -même localement- le point le plus élevé (maximum) ou le point le plus bas (minimum) du graphique de f.

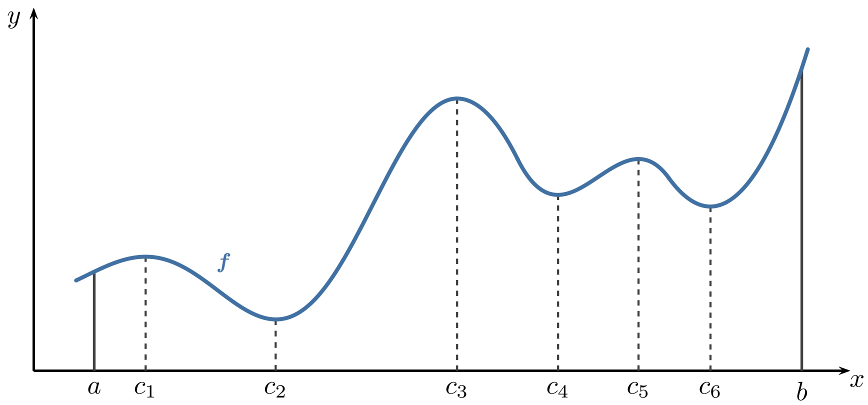


Figure 6 : *Extremums d'une fonction f.*

La figure 6 montre le graphique d'une fonction f possédant 6 extremums locaux ; les maximums sont aux points d'abscisses c_1, c_3, c_5 et les minimums sont aux points d'abscisses c_2, c_4 et c_5.

On constate également que le minimum global de f sur $[a,b]$ est atteint en c_2 alors que le maximum global est atteint en b.

Remarques 8.

i) Comme on peut le constater sur la figure 6, un extremum local peut également se révéler être un extremum global. Dans la suite du cours, **lorsque nous évoquerons un extremum d'une fonction, cela sous-entendra que nous parlons d'un extremum local**, sinon il sera expressément mentionné qu'il s'agit d'un extremum global.

ii) Il peut arriver qu'un minimum local soit supérieur à un maximum local et vice-versa. Par exemple, sur la figure 6 le maximum en c_1 est inférieur au minimum en c_4.

iii) Dans l'exemple de la figure 6, les points d'abscisses a et b ne sont pas des extremums **locaux** de la fonction f. En effet, il n'est pas possible de trouver un voisinage V de a **contenu dans** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et tel que $f(a)$ soit la plus petite valeur sur V car ce voisinage ira nécessairement au-delà de b.

En examinant la figure 6, il apparaît que lorsque la fonction est dérivable, la tangente à chacun des extremums locaux de la fonction est horizontale. Cela signifie que la dérivée en chacun des points d'abscisses de ces extremums doit valoir 0 (c'est-à-dire $f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0$, etc). La proposition suivante généralise cette observation.

Théorème 3.10 (Théorème des extremums locaux)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a;b[$.
Si f possède un extremum local en $c \in]a;b[$, alors $f'(c) = 0$.

Démonstration :

Nous allons faire la démonstration dans le cas où c est un maximum local de la fonction f. Le cas où c est un minimum local se traite de manière similaire et peut être réalisée à titre d'exercice.

Par hypothèse f possède un maximum local en c, il existe donc un voisinage V de c tel que $f(x) \leqslant f(c)$ pour tout $x \in V$, c'est-à-dire :

$$f(x) - f(c) \leqslant 0 \quad \forall\, x \in V$$

- Pour $x < c$, nous avons $x - c < 0$ et donc $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$ $\forall x \in V$. Par conséquent

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$$

  Par hypothèse, f est dérivable en c, donc $\displaystyle\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geqslant 0.$

- Pour $x > c$, nous avons $x - c > 0$ et donc $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$ $\forall x \in V$. Par conséquent

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$$

  Par hypothèse, f est dérivable en c, donc $\displaystyle\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leqslant 0.$

Nous venons de montrer que $f'(c) \geqslant 0$ et $f'(c) \leqslant 0$. Par suite, la seule possibilité est que $f'(c) = 0$. ■

Définition 3.5
Toute valeur c pour laquelle $f'(c) = 0$ s'appelle un **point critique** de la fonction f.

Il est important de remarquer qu'il existe **des extremums locaux qui ne sont pas des points critiques** et **des points critiques qui ne sont pas des extremums locaux**.

En effet, si une fonction f n'est **pas dérivable**, elle peut posséder un extremum local en $x = c$ sans pour autant que $f'(c) = 0$. C'est le cas de la fonction définie par $f(x) = |x|$. En effet, cette fonction possède un minimum local en $x = 0$, cependant la fonction n'est pas dérivable en 0 (voir figure 7) et donc $f'(0)$ ne peut pas valoir 0.

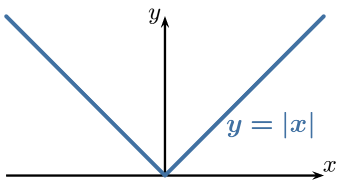


Figure 7 : *Extremum qui n'est pas un point critique.*

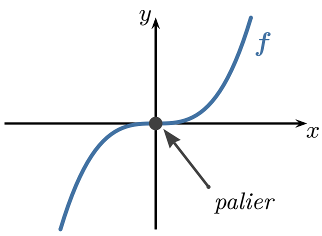


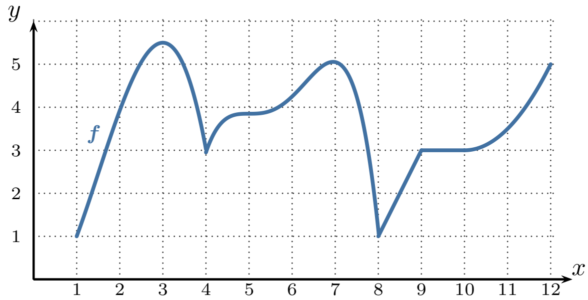
Figure 8 : *palier.*

De plus, la fonction définie par $f(x) = x^3$ représentée dans la figure 8 n'a pas d'extremum local en $x = 0$, bien que $f'(0) = 0$. Un tel point critique s'appelle un **palier** de la fonction f.

Exercices

Exercice 3.31

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;12]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



a) Déterminer les points d'abscisses de tous les extremums locaux f.

b) Déterminer les points d'abscisses de tous les extremums globaux f.

c) Déterminer tous les points critiques de f.

d) Déterminer les points en lesquels f est dérivable.

e) Déterminer les intervalles en lesquels f est strictement croissante.

f) Déterminer les intervalles en lesquels f est décroissante.

Exercice 3.32

Déterminer le(s) point(s) critiques des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = 5x - 7$

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-9}$

Exercice 3.33

a) Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points $A(-4,1)$ et $B(2;4)$.

b) Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x$.
Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points $A\big(-2, f(-2)\big)$ et $B\big(1; f(1)\big)$.

c) Montrer que l'équation de la droite d_{AB} qui passe par les points $A\big(a, f(a)\big)$ et $B\big(b; f(b)\big)$ est donnée par :

$$d_{AB} : y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

3.4.2 Théorème des accroissements finis

Il apparaît naturellement que les points critiques jouent un rôle important dans l'étude d'une fonction. Cependant, déterminer par le calcul les points critiques d'une fonction n'est pas toujours facile[4], et d'ailleurs, rien ne garantit même que de tels points existent.

Le théorème suivant, que l'on doit au mathématicien français Michel Rolle (1652-1719), donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction possède des points critiques sur un intervalle donné.

Théorème 3.11 (Théorème de Rolle)
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$

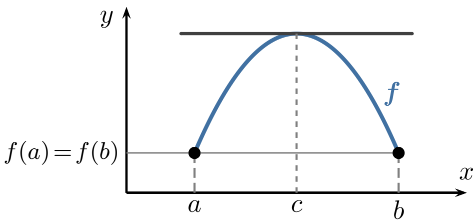


Figure 9 : *Si la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, alors son graphique possède nécéssairement une tangente horizontale.*

4. Par exemple, essayer de déterminer les points critiques de la fonction définie par $f(x) = x^6 - 3x^3 + x$.

Démonstration :

Si f est une fonction constante alors il n'y a rien à montrer. En effet, la dérivée d'une constante vaut toujours 0 et donc $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a;b[$.

Supposons que f n'est pas constante. Le théorème 1.12 des bornes (chapitre **??**) assure qu'il existe m et M tels que $m \leqslant f(x) \leqslant M$. De plus, comme f n'est pas constante, elle vérifie au moins l'une des deux conditions suivantes :

(1) Il existe au moins un x dans $]a;b[$ tel que $f(x) > f(a) = f(b)$. Dans ce cas, le maximum M doit être strictement supérieur à $f(a)$ et $f(b)$. Toujours par le théorème 1.12, ce maximum M est atteint en un $c \in]a;b[$. Finalement, comme la fonction f est dérivable, le théorème 3.10 permet de conclure que $f'(c) = 0$

(2) Il existe au moins un x dans $]a;b[$ tel que $f(x) < f(a) = f(b)$. Dans ce cas, le minimum m doit être strictement inférieur à $f(a)$ et $f(b)$. Toujours par le théorème 1.12, ce minimum m est atteint en un $c \in]a;b[$. Comme pour **(1)**, on conclut que $f'(c) = 0$.

■

Le théorème qui suit est le résultat est le plus important de cette année : le **théorème des accroissements finis** est une sorte de généralisation du théorème de Rolle et sa démonstration repose en grande partie sur ce dernier.

Le théorème des accroissements finis a une place particulière dans le domaine de l'analyse car il permet de démontrer plusieurs autres théorème très utiles pour l'étude de fonctions. C'est aussi grâce à lui qu'on pourra établir plusieurs résultats fondamentaux du *calcul intégral* que nous étudierons l'année prochaine.

Théorème 3.12 (Théorème des Accroissements Finis)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
Alors il existe (au moins) un nombre $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

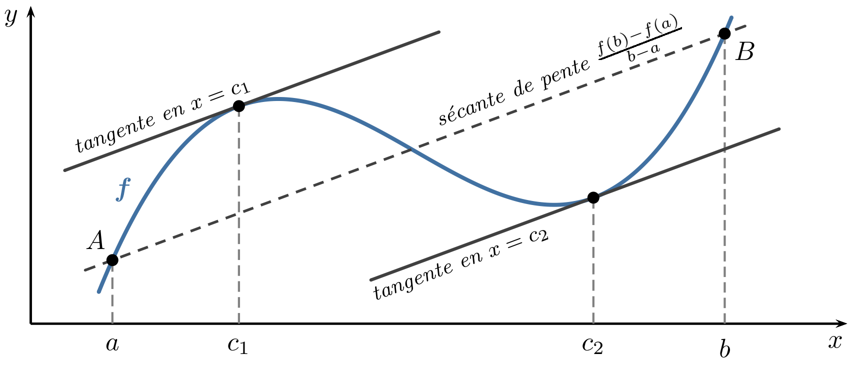


Figure 10 : *Les tangentes à f en $x = c_1$ et $x = c_2$ sont parallèles à la sécante passant par A et B.*

Démonstration :

Soit f comme dans les hypothèses du théorème.
La droite d qui passe par les points A et B est donnée par la fonction (voir exercice 3.33) :

$$d(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

La fonction d est donc un polynôme du premier degré et, en tant que tel, d est une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ dont la dérivée est :

$$d'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Considérons maintenant la fonction ϕ définie par $\phi(x) = f(x) - d(x)$. Nous avons :

- ϕ est continue sur $[a; b]$ car elle est la différence de deux fonctions continues sur $[a; b]$.
- ϕ est dérivable sur $]a; b[$ car elle est la différence de deux fonctions dérivables sur $]a; b[$.
- $\phi(a) = 0$ et $\phi(b) = 0$. Donc $\phi(a) = \phi(b)$.

La fonction ϕ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle, donc il existe $c \in]a; b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. Par ailleurs :

$$\phi'(x) = \big(f(x) - d(x)\big)' = f'(x) - d'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pour $x = c$, on obtient :

$$\phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{et donc} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

■

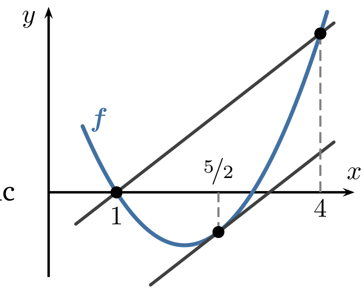
EXEMPLE : Considérons la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur l'intervalle $[1; 4]$.

En tant que fonction polynomiale du deuxième degré, f est continue sur $]1; 4[$ et dérivable sur $]1; 4[$, elle satisfait donc aux hypothèses du théorème des accroissements finis.

Par conséquent, il existe (au moins un) $c \in]1; 4[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Comme $f'(x) = 2x - 4$, alors on doit avoir $2c - 4 = 1$ et donc $c = 5/2$.



Remarques 9.

i) Le valeur c prévue par le théorème des accroissements finis n'est pas forcément unique (voir fig. 10).

ii) Il est parfois utile d'écrire la conclusion du théorème des accroissements finis sous la forme :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

La première application importante du théorème des accroissements finis est le résultat du corolaire 3.13 ci-dessous. Grâce à lui, nous allons montrer comment il est possible d'utiliser le signe la dérivée d'une fonction f pour déterminer les intervalles ou f est croissante ou décroissante.

Corolaire 3.13

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors

(1) *Si $f'(x) > 0$ pour tout x dans $]a; b[$, alors f est strictement croissante sur $[a; b]$.*

(2) *Si $f'(x) < 0$ pour tout x dans $]a; b[$, alors f est strictement décroissante sur $[a; b]$.*

Démonstration :

Nous allons montrer le cas où f' est strictement positive. Le cas où f' est strictement négative se montre de manière identique.

Supposons donc que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a; b[$ et considérons deux nombres x_1 et x_2 quelconques dans $]a; b[$ mais tels que $x_1 < x_2$. Nous souhaitons montrer que $f(x_2) > f(x_1)$.

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Il existe donc $c \in]x_1; x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Par hypothèse $f'(c) > 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$ et donc $f(x_2) > f(x_1)$. ■

Pour mettre en application le corolaire 3.13, il faut donc déterminer les intervalles où la dérivée f' est positive et ceux où elle est négative.

Concrètement, on construit le **tableau des signes de la dérivée f'** ; les intervalles où f' est positive sont les intervalles sur lesquels f est croissante (↗) et les intervalles où f' est négative correspondent aux valeurs pour lesquels f est décroissante (↘).

On appelle le tableau des signes de f' le **tableau des variations de f**.

Le changement de signe de la dérivée fournit alors la nature des extremums de la fonction dont les trois situations possibles sont résumées dans le tableau suivant :

> Soit c un point critique de f ($f'(c) = 0$). Alors :
> - si f' passe du négatif au positif en c, alors $f(c)$ est un **minimum** local de f.
> - si f' passe du positif au négatif en c, alors $f(c)$ est un **maximum** local de f.
> - si f' ne change pas de signe en c, alors c est un **palier** de f.

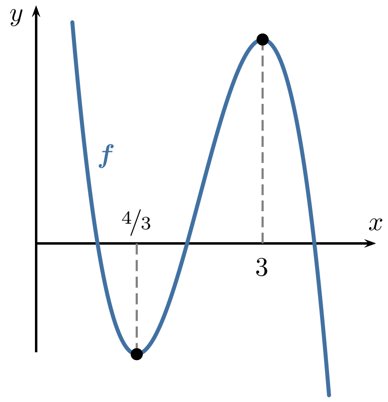
EXEMPLE : Soit la fonction f définie par $f(x) = -2x^3 + 13x^2 - 24x + 12$.

On commence par calculer :

$$f'(x) = -6x^2 + 26x - 24 = -2(3x-4)(x-3)$$

Puis on construit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$4/3$		3		$+\infty$ $\mathbb{R}$
-2		$-$		$-$		$-$	
$3x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	**min**	↗	**max**	↘	



On constate que f est d'abord décroissante sur $]-\infty; 4/3[$, puis croissante sur $]4/3; 3[$ et enfin à nouveau décroissante sur $]3; \infty[$. (voir graphique ci-dessus)

On peut par conséquent affirmer que f atteint un **minimum** en $4/3$ et un **maximum** en 3 dont les coordonnées sont :

$$MIN\big(4/3; f(4/3)\big) = MIN\big(4/3; -44/27\big) \quad \text{et} \quad MAX\big(3; f(3)\big) = MAX\big(3; 3\big)$$

Enfin, pour compléter ce chapitre, voici au autre corolaire du théorème des accroissements finis. Nous savons que la dérivée d'une constante vaut 0. Le corolaire ci-dessous affirme que la réciproque est vrai.

Corolaire 3.14

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a; b[$.
Si $f'(x) = 0$ pour tout x dans $]a; b[$, alors f est constante sur $[a; b]$.

Démonstration :

Soit x_1 et x_2 deux nombres quelconques dans $]a; b[$ mais tels que $x_1 < x_2$. Nous voulons montrer que $f(x_2) = f(x_1)$.

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Il existe donc $c \in]x_1; x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Comme par hypothèse $f'(c) = 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) = 0$ et donc $f(x_2) = f(x_1)$. ■

Exercices

Exercice 3.34

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 6x + 3$$

a) Expliquer pourquoi il est possible d'appliquer le théorème des accroissements finis à f sur n'importe quel intervalle $]a; b[$.

b) Pour chacun des intervalles ci-dessous, déterminer la (les) valeur(s) de c prévue par le théorème des accroissements finis :

i) $I_1 =]-2; 3[$

ii) $I_2 =]-3; 5[$

iii) $I_3 =]1; 4[$

Exercice 3.35

Vérifier si le théorème des accroissements finis est applicables aux fonctions ci-dessous sur l'intervalle donné.
Si oui, déterminer le(s) nombre(s) c prévu par le théorème.

a) $f(x) = |\,x+4\,|$ sur l'intervalle $[-10; -2]$

b) $f(x) = x^2 - 4x^2 - 1$ sur l'intervalle $[-4; -1]$

c) $f(x) = \sqrt{2x+2} - 1$ sur l'intervalle $[-1; 7]$

d) $f(x) = \dfrac{2x+4}{-4x+3}$ sur l'intervalle $[0; 4]$

Exercice 3.36

Pour chaque fonction ci-dessous :

- Établir le tableau des variations
- Déterminer la nature des extremums.
- Calculer les coordonnées des extremums.

a) $f(x) = 9x^2 + 27x + 4$

b) $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 14$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{x+5}$

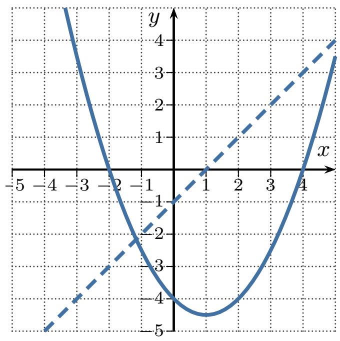
d) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+12}{x-2}$

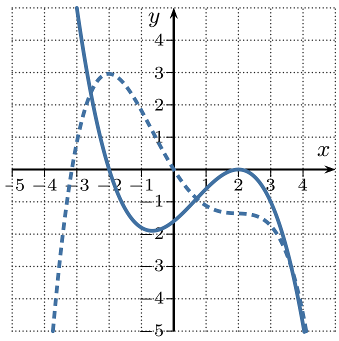
Exercice 3.37

Pour chaque couple de fonctions représentés ci-dessous, dire quelle est la fonction dérivée de l'autre en justifiant votre réponse à l'aide d'un tableau des variations.

a)



b)



Exercice 3.38

Voici le tableau des variations des fonctions f, g, h et j. Dessiner l'esquisse d'un graphique plausible de chacune de ces 4 fonctions.

x	$+\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	**max**	↘	

$\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-7/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	**palier**	↗	

$\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-6		0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$		↘	**inflex.**	↘	**min**	↗	**inflex.**	↗	

$\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-27/5$		-1		6		$+\infty$
$j'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$	
$j(x)$		↘	**min**	↗	**max**	↘	$A.V.$	↗	

$\mathbb{R}$

3.4.3 Étude de fonctions et représentations graphiques

Tout au long des 3 derniers chapitres, nous avons mis en place des outils nous permettant de mieux comprendre le comportement d'une fonction. Nous allons rappeler et résumer les différentes notions que nous avons rencontrées afin de pouvoir donner un représentation graphique fidèle d'une fonction f. L'ensemble des étapes décrites ci-dessous s'appellent **l'étude de la fonction f**. Les informations obtenues sont alors utilisées pour tracer le graphique de f.

CE QU'IL FAUT DÉTERMINER POUR ÉTUDIER UNE FONCTION f

(1) Domaine de définition de la fonction f (D_f) : Il faut chercher les valeurs pour lesquels f est définie. En général, il faut éviter la division par 0 ou les racines des nombres négatifs.

(2) Points d'intersections du graphique de f avec les axes : L'ordonnée à l'origine est donnée par $f(0)$ et on trouve les zéros en résolvant $f(x) = 0$. Attention, on donnera toujours les points d'intersections sous forme de *coordonnées*.

(3) Équations des asymptotes de f : Si f est une fonction rationnelle, l'asymptote oblique ou horizontale (AO/AH) est le quotient de la division euclidienne. Pour la(les) asymptote(s) verticale(s) (AV), il faut étudier $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)$ où a est un *candidat*, c'est-à-dire une valeur extérieur et en bordure du D_f.

(4) Position relative du graphique de f par rapport à son AH/AO : On établit le tableau des signes de $f(x) - d(x)$ où d est l'AH/AO de f. On donne également les **coordonnées** des éventuelles points intersections de f avec les asymptotes en résolvant l'équation $f(x) - d(x)$.

(5) Dérivée f : On utilise les règles de dérivation bien connues.

(6) Points critiques de f : On résout l'équation $f'(x) = 0$.

(7) Tableau des variations et extremums de f : On établit le tableau des signes de la dérivée f' (nécessite la factorisation de f'). Il faut également déterminer les *coordonnées* des extremums $(c; f(c))$ pour chaque point critique c de f ainsi que leur *nature* (min., max., palier).

(8) Représentation graphique de f : A l'aide des informations précédentes, on trace une représentation graphique de le graphique de la fonction f et de ses asymptotes. On veillera à indiquer clairement sur le graphique les points d'intersection avec les axes ainsi que les extremums ou paliers.

EXEMPLE : Étudions la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2-4x}{2x-1}$.

(1) $2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$. Donc $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}}$

(2) *Intersection avec Ox :* $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \iff -x(x+4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -4$

Donc $\boldsymbol{Z_1(-4;0)}$, $\boldsymbol{Z_2(0;0)}$.

Intersection avec Oy : $f(0) = 0$. Donc $\boldsymbol{O(0\,;0)}$.

(3) Asymptote verticale (A.V.) : candidat : $x = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1/2^+} \frac{-x^2-4x}{2x-1} = \lim_{x\to 1/2^+} \left(-x^2-4x\right) \cdot \lim_{x\to 1/2^+} \frac{1}{2x-1} = -\frac{9}{4} \cdot \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = -\frac{9}{4} \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1/2^-} \frac{-x^2-4x}{2x-1} = \lim_{x\to 1/2^-} \left(-x^2-4x\right) \cdot \lim_{x\to 1/2^-} \frac{1}{2x-1} = -\frac{9}{4} \cdot \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y} = -\frac{9}{4} \cdot (-\infty) = +\infty$$

Donc A.V. d'équation : $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

On prendra toujours soin de calculer la limite à gauche **et** la limite à droite afin de connaître le comportement de la fonction de part et d'autre de l'asymptote. Bien entendu, dans la cas où la limite existe, on se contentera de calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ en une fois.

Asymptote oblique (A.O.) : On effectue la division euclidienne du numérateur $A(x)$ par le dénominateur $B(x)$ afin de trouver le quotient $Q(x)$.

$$
\begin{array}{rr|l}
-x^2 - 4x & & 2x-1 \\
\cline{3-3}
x^2 - \frac{1}{2}x & & -\frac{1}{2}x - \frac{9}{4} \\
\cline{1-1}
-\frac{9}{2}x & & \\
\frac{9}{2}x - \frac{9}{4} & & \\
\cline{1-1}
-\frac{9}{4} & &
\end{array}
$$

Donc A.O. d'équation : $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{4}}$ $(= d(x))$.

(4) Il faut établir le tableau des signes de $f(x) - d(x) = \dfrac{R(x)}{B(x)} = \dfrac{-9/4}{2x-1}$.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$-9/4$		$-$	⋮	$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\boldsymbol{f(x) - d(x)}$		$+$	***n.d.***	$-$	

On constate immédiatement que l'équation $f(x) - d(x) = 0$ n'a pas de solution. Il n'y a donc pas de point d'intersection entre le graphique de f et ses asymptotes.

(5) $f'(x) = \dfrac{(-2x-4)(2x-1) - (-x^2-4x)(2)}{(2x-1)^2} = \boldsymbol{\dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{(2x-1)^2}}$

(6) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x^2 + 2x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; -2(x-2)(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x = -1}$ **ou** $\boldsymbol{x = 2}$

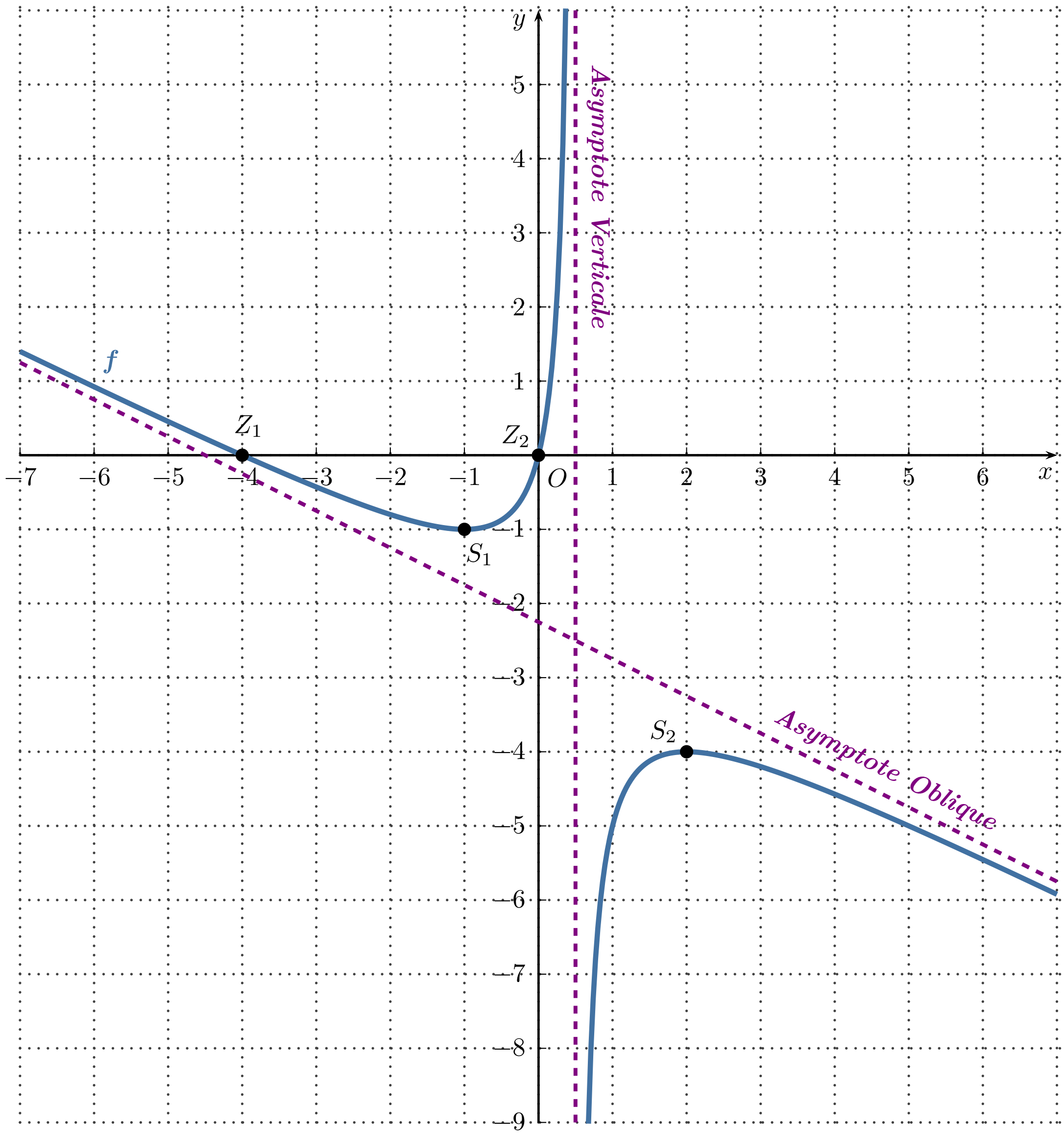
(7) Il faut établir le tableau des signes de la dérivée et déterminer les intervalles sur lesquels f' est positive et ceux où elle est négative.

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
-2		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	
$x-2$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$(2x-1)^2$		$+$	⋮	$+$	0	$+$	⋮	$+$	
$\boldsymbol{f'(x)}$		$-$	0	$+$	$n.d.$	$+$	0	$-$	
$\boldsymbol{f(x)}$		$\searrow$	**min**	$\nearrow$	$A.V.$	$\nearrow$	**max**	$\searrow$	

On détermine également les coordonnées des extremums en calculant $(-1, f(-1))$ et $(2, f(2))$ pour trouver :

Minimum local en **Min**$\boldsymbol{(-1\,;-1)}$ et Maximum local en **Max**$\boldsymbol{(2\,;-4)}$.

(8)



Exercices

Exercice 3.39

Etudier complètement les fonctions ci-dessous en suivant toutes les étapes décrites précédemment.

a) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{-2x^2-3}$

d) $f(x) = \dfrac{-x^3+6x^2-9x}{x^2-4x+4}$

Exercice 3.40

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$$

Déterminer l'ensemble $f([0;3])$.

Exercice 3.41

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = 5x^2 + 8x + 4$$

Déterminer l'ensemble $f([1;3])$.

3.4.4 Optimisation

Comme nous l'avons déjà évoqué, les phénomènes décrits par des fonctions sont nombreux. En effet, le niveau de photosynthèse d'une plante en fonction de l'intensité lumineuse, l'énergie cinétique d'un objet en mouvement en fonction de sa vitesse ou encore la variation des taux d'intérêts en fonction de l'inflation ne sont que quelques exemples de quantités pouvant s'exprimer *en fonction d'une autre*.

Il est intéressant de remarquer que, lorsqu'une quantité Q peut être décrite par une fonction f (c'est-à-dire $Q = f(x)$), alors la dérivée de f fournit de précieuses informations concernant la quantité Q. En particulier, les points critiques de f permettent de déterminer les valeurs en lesquels la quantité Q est maximale ou minimale. Ces valeurs constituent souvent des **valeurs optimales** dans le sens où elles donnent les valeurs en lesquelles la quantité Q sera la plus favorable.

La recherche d'une fonction exprimant une quantité Q et la détermination en lesquels cette quantité est minimale/maximale est ce que l'on appelle un problème d'**optimisation**.

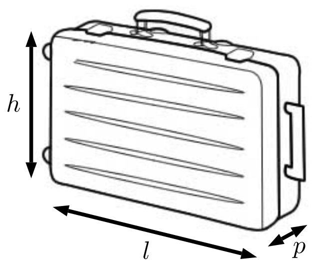
EXEMPLE : Considérons la situation suivante :

Dans le cadre d'un stage dans une grande entreprise de bagages, on vous demande de déterminer la valise parallélépipédiques de volume maximale, dont la *largeur* est le double de la *hauteur* et qui satisfait les restrictions sur les bagages en soute de la compagnie SWISS :

"la somme des longueurs des trois côtés de la valise ne doit pas dépasser 158cm."[5]

Pour répondre à la question, nous commençons d'abord par dégager les variables et exprimer la quantité à optimiser en fonction de ces dernières.

On définit : $\boldsymbol{h}$: hauteur de la valise en cm.
$\boldsymbol{l}$: largeur de la valise en cm.
$\boldsymbol{p}$: profondeur de la valise en cm.



La quantité à optimiser est le volume V de la valise :

$$V(h;l;p) = h \cdot l \cdot p$$

Les données du problème nous permettent d'écrire :

$l = 2h$ et $h + l + p = 158\ cm$. D'où $p = 158 - h - l = 158 - 3h$

La fonction V devient donc $V(h) = (h)\cdot(2h)\cdot(158-3h) = 316h^2 - 6h^3$.

On calcule alors $V'(h) = 632h - 18h^2 = 2h(316-9h)$ et les points critiques de V sont en $x = 0$ et $x = 316/9$.

Il reste à établir la nature des points critiques :

x	$-\infty$		0		$316/9$		$+\infty$
$2h$		$-$	0	$+$	¦	$+$	
$316-9h$		$+$	¦	$+$	0	$-$	
$\boldsymbol{V'(h)}$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$\boldsymbol{V(h)}$		↘	min	↗	max	↘	

Le tableau des variations montre que V possède un maximum en $h = \dfrac{316}{9}$ $(\simeq 35,1)$.

La valise aura donc un volume maximal quand $h \simeq 35,1\ cm$, $l \simeq 70,2\ cm$ et $p \simeq 52,7\ cm$.

De plus, le volume maximal sera de $V(316/9) \simeq 129,35\ dm^3$

5. voir https ://www.swiss.com/ch/FR/preparer/bagages/bagage-en-soute

Il ne fait aucun doute que la partie a plus délicate, mais aussi la plus importante, reste d'établir une fonction qui décrit la problème. Il faut être attentif aux données de l'énoncé qui fournira toujours suffisamment d'informations pour ramener la fonction à une seule variable. Pour le reste, il s'agit de calculs usuels déjà bien connus.

Voici une synthèse des étapes que nous avons suivies dans l'exemple.

MÉTHODE POUR RÉSOUDRE UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

(1) Lire attentivement le problème proposé et identifier la quantité Q qu'on veut déterminer.

(2) Lorsque le problème s'y prête, faire un schéma ou un dessin illustrant la situation.

(3) Mettre en relation la quantité Q avec d'autres variables, même si elles sont plusieurs. Il s'agit de trouver f telle que $Q = f(x, y, z, ...)$

(4) A l'aide des données du problème, exprimer les variables y, z,... en fonction de x et ramener la fonction f à une seule variable, c'est-à-dire $Q = f(x)$.

(5) Rechercher les extremums de f et établir son tableau de variations.

(6) Donner une réponse à la question posée.

Exercices

Exercice 3.42

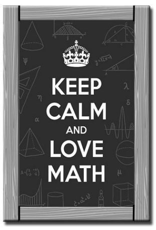
La somme de deux nombres positifs est 20. Déterminer ces deux nombres de sorte que :

a) la somme de leur carré soit minimale.
b) le produit du cube de l'un avec le carré de l'autre soit maximal.

Exercice 3.43

Parmi tous les rectangles ayant un périmètre de 52 cm, déterminer celui dont l'aire est maximale.

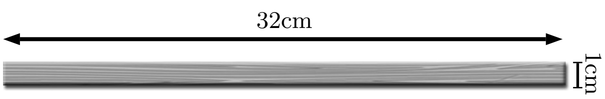
Exercice 3.44



Un artiste désire fabriquer un cadre pour sa dernière oeuvre.

Il a à sa disposition une lamelle de bois rectangulaire de 32 cm de long et de 1 cm de large.

Il souhaite découper la lamelle de bois en 4 morceaux et les arranger en forme de rectangle comme sur le dessin ci-contre.



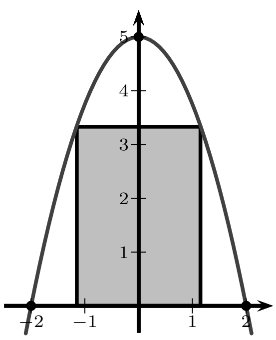
a) Comment l'artiste doit-il couper la lamelle de bois pour que l'aire à l'intérieur du cadre soit maximale ?

b) Quelle sera cette aire maximale ?

Exercice 3.45

On considère la parabole dessinée ci-dessous dont le sommet est en $S(0;5)$.

Le rectangle gris à l'intérieur de la parabole, et dont l'un des côtés se trouve sur l'axe des abscisses, a une aire maximale.



a) Déterminer l'équation de la parabole.

b) Déterminer l'aire du rectangle gris.

Exercices

Exercice 3.46

Un conditionneur d'aliments en conserve souhaite économiser de l'argent en optant pour un nouveau format de ses boîtes de 3dl.

a) Déterminer le rayon et la hauteur de la boîte de conserve ayant une capacité de 3dl et qui minimise la quantité de fer-blanc à utiliser.

b) Déterminer l'aire totale du nouveau format de boîte de conserve.

c) Le service marketing de la société souhaite apposer des étiquettes s'étalant sur toute la face latérale de la boîte de conserve. Le fer-blanc coûte 0.8 chf/dm^2 alors que le papier pour les étiquettes coûte, après impression, 1.1 chf/dm^2.

Quel rayon faut-il donner aux boîtes de conserve pour minimiser le coût de fabrication total de ces dernières ?