REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

ANNEE SCOLAIRE 2020 – 2021

Semestre : 2e

Date : 1 juin 2021

Epreuve semestrielle regroupée

Discipline : **Mathématiques**

Durée de l'épreuve : 100'

Nombre de pages de l'énoncé (y compris la page d'en-tête): 4

Cours	Nombre d'élèves	Maître correcteur
1MA2.DF01	21	S. FLEISCHMANN
1MA2.DF02	20	C. SCRUCCA
1MA2.DF03	21	S. EZAHR
1MA2.DF04	20	R. NAGY GAUXACHS

Documents autorisés	
a) **Mis à disposition par le collège** : - aucun	b) **Personnels à l'élève** : - Calculatrice agréée (TI30 ou TI34 sauf modèles Pro)

Nom, Prénom du candidat : .... Groupe : ....

Total : / 65 points

Informations aux élèves :

- **Recommandations générales :**
  - Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
  - Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
  - N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.

- **Recommandations particulières à la discipline :**
  - Le travail doit être propre et bien présenté. Il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
  - Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.

Exercice 1 (8 points)

Soient les fonctions f, g et h définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{-5x}{2x+3} \quad ; \quad g(x) = \sqrt{5-4x} \quad ; \quad h(x) = x^2 - 5x$$

a) Déterminer les domaines de définition de f, g et h. (4 pts)

b) Déterminer si possible $f(-3)$ et $g(2)$. (2 pts)

c) Déterminer $h^{-1}(-6)$. Justifier. (2 pts)

Exercice 2 (19 points)

Soient les fonctions f et g définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3 \quad ; \quad g(x) = -3x + 1$$

a) Étudier la fonction f en parcourant les points suivants :

i) Déterminer l'ordonnée à l'origine de f. (1 pt)

ii) Déterminer le(s) zéro(s) de f. (3 pts)

iii) Déterminer les coordonnées du sommet de f. (2 pts)

iv) Déterminer l'équation de l'axe de symétrie de f. (1 pt)

v) Déterminer si f est convexe ou concave. (1 pt)

vi) Tracer une représentation de la fonction f, en tenant compte des résultats précédents. (4 pts)

(*Repère avec unité égale à 2 carrés.)*

b) Étudier la fonction g en parcourant les points suivants :

i) Déterminer le(s) zéro(s) de g. (1 pt)

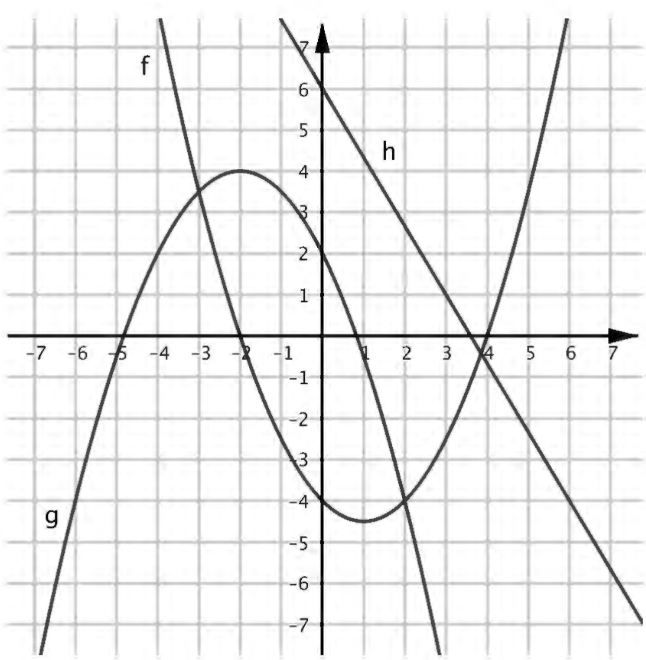
ii) Tracer une représentation de la fonction g. (2 pts)

(*Même repère que ci-dessus.*)

c) Déterminer algébriquement l'ensemble des valeurs de x telles que $f(x)$ est plus petit ou égal à $g(x)$. (4 pts)

Exercice 3 (10 points)

Soient les fonctions f, g et h représentées graphiquement ci-dessous :



a) Déterminer l'expression algébrique de la fonction g. (4 pts)

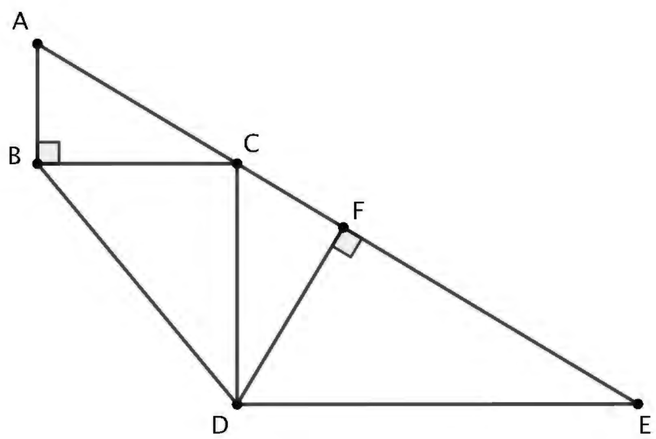
b) Déterminer l'expression algébrique de la fonction h. (2 pts)

c) Déterminer graphiquement $f(3)$ et $g^{-1}(2)$. (2 pts)

d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$. (2 pts)

Exercice 4 (10 points)

Dans la figure ci-dessous, on sait que AB // CD, BC // DE et A, C, F, E sont alignés. En outre, on connaît AC = 2, CF = 1 et FE = 3.

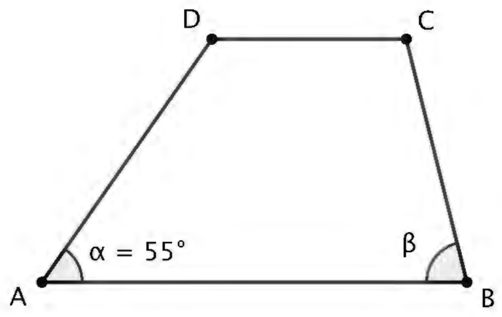


Calculer l'aire du quadrilatère ABDE.

(*Réponses en valeurs exactes.*)

Exercice 5 (10 points)

Dans le trapèze ABCD ci-dessous, on sait que AB = 8 cm, AD = 7 cm et BC = 6 cm.



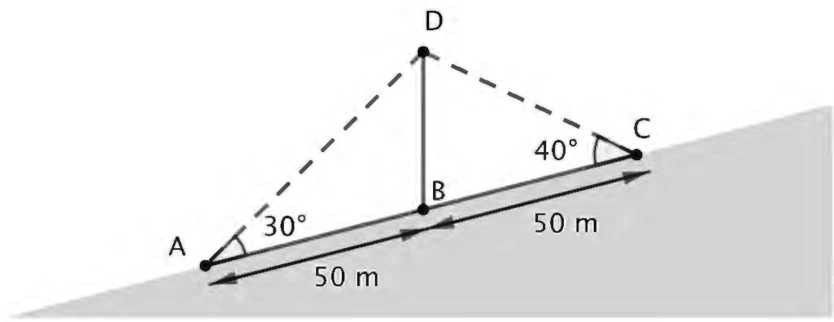
a) Calculer l'angle β. (4 pts)

b) Calculer l'aire du trapèze ABCD. (6 pts)

(*Réponses arrondies à deux décimales.*)

Exercice 6 (8 points)

Un mât, situé sur le flanc d'une colline, est retenu par deux câbles comme indiqué sur la figure ci-dessous. Les points d'ancrage des câbles A et C sont situés à 50 m de part et d'autre du pied du mât B. Le câble aval AD forme un angle de 30° avec la colline tandis que le câble amont CD forme un angle de 40° avec la colline.



a) Calculer l'angle $\widehat{ADC}$ entre les deux câbles. (1 pt)

b) Calculer les longueurs AD et CD des deux câbles. (4 pts)

c) Calculer la hauteur BD du mât. (3 pts)

(*Réponses arrondies à deux décimales.*)

FIN DE L'EPREUVE

CORRIGE DE L'EPREUVE SEMESTRIELLE DU 01.06.2021

Ex1

$$f(x) = \frac{-5x}{2x+3} \ ; \ g(x) = \sqrt{5-4x} \ ; \ h(x) = x^2 - 5x$$

a) (4pt)

- $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$
- $g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5-4x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow D_g =]-\infty ; \frac{5}{4}]$
- $h(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_h = \mathbb{R}$

b) (2pt)

- $f(-3) = \frac{-5\cdot(-3)}{2\cdot(-3)+3} = \frac{15}{-3} = -5$
- $g(2) = \sqrt{5-4\cdot 2} = \sqrt{-3}$ n'existe pas

c) (2pt) $h(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3 \Rightarrow h^{-1}(\{-6\}) = \{2 ; 3\}$

Ex2

a) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

i) $f(0) = -3$

(1pt)

ii) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$

(3pt) $\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 49$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{5\pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

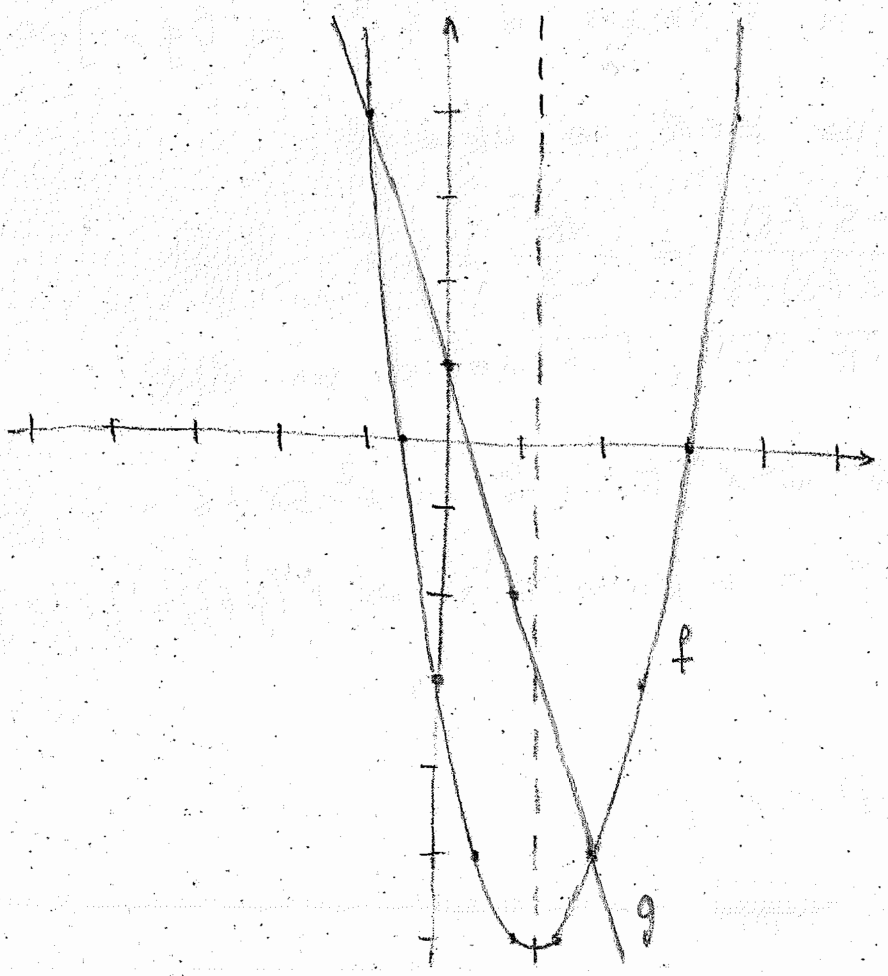
$\Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{-\frac{1}{2} ; 3\}$

iii) $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-5)}{2\cdot 2} = \frac{5}{4}$
(2pt)
$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{4\cdot 2} = -\frac{49}{8}$ $\Rightarrow S = \left(\frac{5}{4}; -\frac{49}{8}\right)$

iv) $x = \frac{5}{4}$
(1pt)

v) f est convexe car $a = 2 > 0$
(1pt)

vi)
(4pt)



b) $g(x) = -3x+1$

i) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
(1pt) $\Rightarrow g^{-1}(\{0\}) = \{\frac{1}{3}\}$

ii) Voir repère ci-dessus
(2pt)

c) $f(x) \leq g(x)$

(4pt) $2x^2-5x-3 \leq -3x+1$

$2x^2-2x-4 \leq 0$

$x^2-x-2 \leq 0$

$(x+1)(x-2) \leq 0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow S = [-1;2]$

Ex 3

a) $g(x) = a(x-x_S)^2+y_S$

(4pt) • sommet : $(-2;4)$ $\Rightarrow x_S=-2$ et $y_S=4$

$\Rightarrow g(x) = a(x+2)^2+4$

• ord. orig. : 2 $\Rightarrow f(0) = 2$

$\Rightarrow a(0+2)^2+4 = 2 \Leftrightarrow 4 \cdot a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2+4 = -\frac{1}{2}x^2-2x+2$

b) $h(x) = ax+b$

(2pt) • pente $-\frac{5}{3}$ $\Rightarrow a = -\frac{5}{3}$

• ord. or. 6 $\Rightarrow b = 6$

$\Rightarrow h(x) = -\frac{5}{3}x+6$

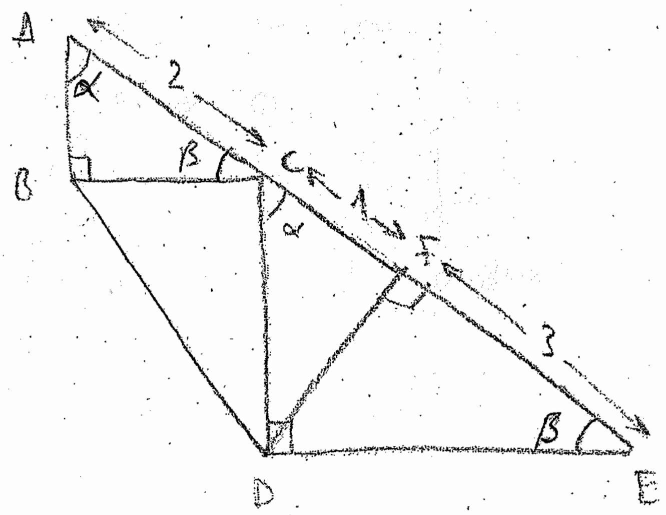
c) $f(3) = -2{,}5$

(2pt) $g^{-1}(\{2\}) = \{-4;0\}$

d) $S =]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$

(2pt)

Ex 4



- Th. Euclide CDE

$CD^2 = CF \cdot CE \Leftrightarrow CD = \sqrt{CF \cdot CE} = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$

- Th. Pythagore CDE

$DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- Triangles ABC et CDE sont semblables
- Thales ABC ∾ CDE

$\frac{AB}{CD} = \frac{AC}{CE} \Leftrightarrow AB = \frac{AC \cdot CD}{CE} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$

- Th. Pythagore ABC

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

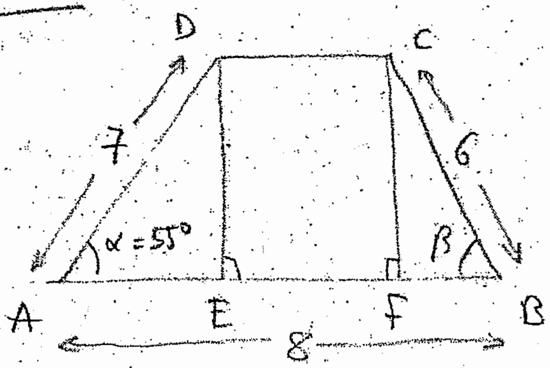
- Aire ABDE

$$S_{ABDE} = S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDE}$$

$$= \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{BC \cdot CD}{2} + \frac{CD \cdot DE}{2}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Ex 5



a) • Trigo AED :

(4pt) $\sin(\alpha) = \dfrac{DE}{AD} \Leftrightarrow DE = AD \sin(\alpha) = 7 \cdot \sin(55°) \simeq 5{,}73$ cm

• Trigo BCF :

$\sin(\beta) = \dfrac{CF}{BC} \Leftrightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{CF}{BC}\right) \simeq \sin^{-1}\left(\dfrac{5{,}73}{6}\right) \simeq 72{,}88°$

b) • Trigo ADE :

(6pt) $\cos(\alpha) = \dfrac{AE}{AD} \Leftrightarrow AE = AD \cos(\alpha) = 7 \cos(55°) \simeq 4{,}02$ cm

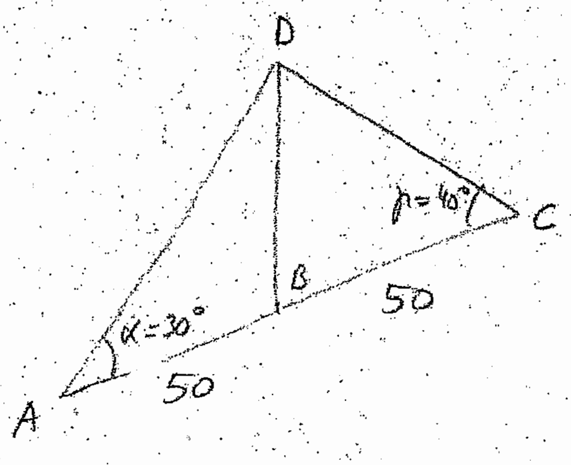
• Trigo BCF

$\cos(\beta) = \dfrac{BF}{BC} \Leftrightarrow BF = BC \cos(\beta) \simeq 6 \cdot \cos(72{,}88°) \simeq 1{,}77$ cm

• $CD = AB - AE - BF \simeq 8 - 4{,}02 - 1{,}77 \simeq 2{,}22$ cm

$S_{ABCD} = \dfrac{(AB + CD) \cdot DE}{2} \simeq \dfrac{(8 + 2{,}22) \cdot 5{,}73}{2} \simeq 29{,}30 \text{ cm}^2$

Ex6



a) Somme angles ACD :

(1pt)

$$\alpha + \gamma + \widehat{ADC} = 180° \Leftrightarrow \widehat{ADC} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 30° - 40° = 110°$$

b) Th. sinus ACD :

(4pt)

$$\frac{AD}{\sin(\gamma)} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ADC})} \Leftrightarrow AD = \frac{AC \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\widehat{ADC})} = \frac{100 \sin(40°)}{\sin(110°)} \simeq 68,40\,m$$

$$\frac{CD}{\sin(\alpha)} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ADC})} \Leftrightarrow CD = \frac{AC \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\widehat{ADC})} = \frac{100 \cdot \sin(30°)}{\sin(110°)} \simeq 53,21\,m$$

c) Th. cosinus ABC

(3pt)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AB \cdot AD \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2\,AB \cdot AD \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{50^2 + 68,404^2 - 2 \cdot 50 \cdot 68,404 \cos(30°)}$$

$$\simeq 35,43\,m$$