Discipline : Mathématiques Semestre: 1 Durée de l'épreuve:160'

Date: 18.12.2023 Nombre de pages de l'énoncé: 3 (y compris la page d'en-tête)

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
3MA2.DF01	23	A.SCHLEINING
3MA2.DF02	23	M.WEISS

Documents autorisés	
a) **mis à disposition par le collège** : (description précise et nombre, etc.)	b) **personnels à l'élève** :
	Calculatrice agréée Ti30 et Ti34 sauf modèles Pro
	Table numérique non annotée (seuls les marque-pages et le surlignage sont autorisés)

Informations pour les maîtres-surveillants
Merci par avance de vérifier que les tables numériques et les calculatrices soient conformes.

Nom, Prénom du candidat : .... Groupe : ....

Exercice	1	2	3	4	5	6	7	Notations	Total
Points	13	31	13	9	10	9	8	5	98
Obtenu									

Informations aux élèves :

- Sur la première page des feuilles d'épreuve, veuillez vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
- Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
- N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs, les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.
- Donner les réponses en valeurs exactes ou avec deux décimales.

Exercice 1 : (13 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{2x^2-x-15}$ (4 points)

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (3 points)

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(5x)-\cos(3x)}{\sin(4x)-\sin(3x)}$ (3 points)

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(2x)}{3x}$ (3 points)

Exercice 2 : (31 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+8x+8}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. (1 point)

b) Déterminer les zéros et l'ordonnée à l'origine de f. (3 points)

c) Déterminer les éventuelles asymptotes de f et donner leurs équations. (5 points)

d) Déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à une éventuelle asymptote oblique ou horizontale (réponse sous forme de tableau) et donner les coordonnées d'un éventuel point d'intersection. (5 points)

e) Montrer que $f'(x)=\dfrac{3x+1}{(x+2)^3}$ et $f''(x)=\dfrac{-6x+3}{(x+2)^4}$. (6 points)

f) Etudier les variations de f et déterminer les coordonnées des éventuels extrema locaux. (3 points)

g) Etudier les courbures de f et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion. (3 points)

h) Représenter soigneusement le graphe de f dans un repère orthonormé en tenant compte des résultats précédents (échelle des axes : 2 carrés $=$ 1 unité). (5 points)

Exercice 3 : (13 points)

1) Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si } x<-2 \\ x+1 & \text{si } -2\le x\le 3 \\ 2x-2 & \text{si } x>3 \end{cases}$

a) f est-elle continue en $x=-2$? Justifier. (3 points)

b) f est-elle continue en $x=3$? Justifier. (4 points)

c) f est-elle continue sur $]3;+\infty[$? Justifier. (2 points)

2) Déterminer le(s) nombre(s) $k\in\mathbb{R}$ afin que la fonction g définie par

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{si } x<2 \\ 4x+k & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ soit continue en $x=2$. (4 points)

Exercice 4 : (9 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 6x - \sqrt{25x^2 + 5x - 6}$.

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique ou horizontale de f lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 5 : (10 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) A l'aide de la définition de la dérivée, montrer que $f'(x) = -2x + 2$. (4 points)

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphique de f au point $(2; f(2))$. (3 points)

c) Déterminer en quel point P la tangente au graphique de f est parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 4$. Justifier par un calcul. (3 points)

Exercice 6 : (9 points)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des règles de dérivation.

a) $f(x) = \left(x^2 + 3\right)^4 \left(6x^2 - 2\right)$ (3 points)

b) $f(x) = \arcsin^2\left(5x\right)$ (3 points)

c) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2} - \dfrac{1}{5x}$ (3 points)

Exercice 7 : (8 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. (2 points)

b) Une fonction rationnelle qui a une asymptote oblique possède forcément au moins une asymptote verticale. (2 points)

c) Deux fonctions possédant la même dérivée sont égales. (2 points)

d) Si f et g sont deux fonctions rationnelles, alors les asymptotes verticales de la fonction rationnelle $f \cdot g$ sont les asymptotes verticales de f et celles de g. (2 points).

Exercice 1 :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{2x^2-x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(2x^2+3x-2\right)}{(x-3)(2x+5)}=\dfrac{25}{11}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(5x)-\cos(3x)}{\sin(4x)-\sin(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\sin(5x)+3\sin(3x)}{4\cos(4x)-3\cos(3x)}=\dfrac{0}{1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x)}{3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos(2x)}=\dfrac{2}{3}$

Exercice 2 :

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+8x+8}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{2\left(x^2+4x+4\right)}=\dfrac{(x-3)(x+1)}{2(x+2)^2}$

$Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) $f^{-1}(0)=\{-1;3\}$; $f(0)=-\dfrac{3}{8}$

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-3)(x+1)}{2(x+2)^2}=\dfrac{-5\cdot(-1)}{0^+}=+\infty$. Av d'équation $x=-2$

$f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-6x-7}{2x^2+8x+8}$. Ah d'équation $y=\dfrac{1}{2}$

d) $\delta(x)=\dfrac{-6x-7}{2(x+2)^2}$

		-2		$-\frac{7}{6}$	
$-6x-7$	$+$		$+$	0	$-$
$2(x+2)^2$	$+$		$+$	$+$	$+$
$\delta(x)$	$+$		$+$	0	$-$

Intersection en $P\left(-\dfrac{7}{6};\dfrac{1}{2}\right)$

e) $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\cdot 2(x+2)^2-\left(x^2-2x-3\right)\cdot 4(x+2)}{4(x+2)^4}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+2)-\left(x^2-2x-3\right)}{(x+2)^3}=$

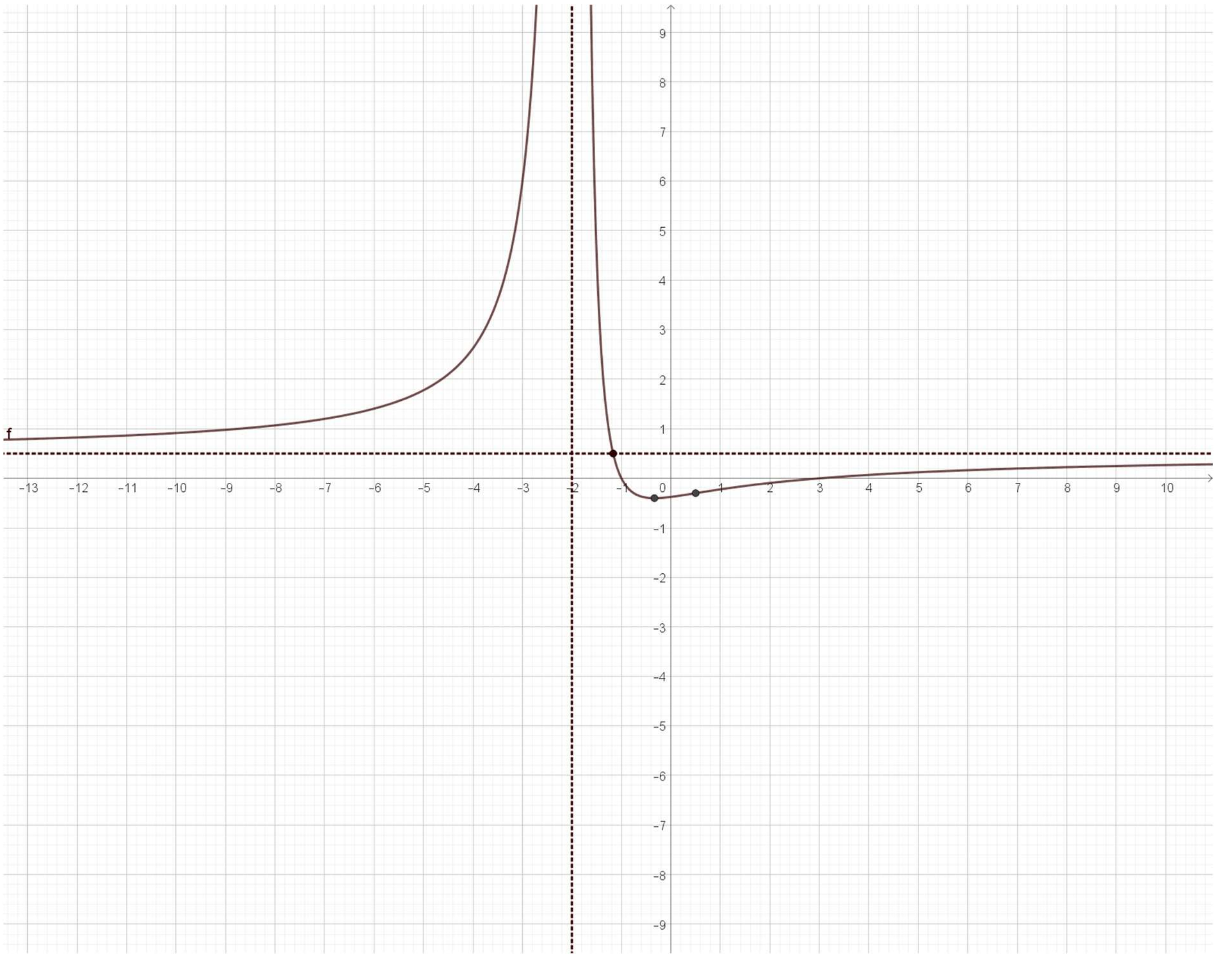
$\dfrac{x^2+x-2-\left(x^2-2x-3\right)}{(x+2)^3}=\dfrac{3x+1}{(x+2)^3}$

$f''(x)=\dfrac{3(x+2)^3-3(3x+1)(x+2)^2}{(x+2)^6}=\dfrac{3(x+2)-3(3x+1)}{(x+2)^4}=\dfrac{-6x+3}{(x+2)^4}$

f) et g)

		-2		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+		-	0	+	+	+
$f''(x)$	+		+	+	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	Min $\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{5}\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$	$\cup$	$\cup$	Inf $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{10}\right)$	$\cap$

h)



Exercice 3 :

1) a) $\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2+3\right)=7\neq \lim\limits_{x\to -2^+}\left(x+1\right)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ n'existe pas.

Donc f est discontinue en $x=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x+1\right)=4$; $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(2x-2\right)=4$; $f(3)=4$.

Donc f est continue en $x=3$.

c) Oui, car c'est une fonction polynômiale.

2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=2$; $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(4x+k\right)=8+k$; $f(2)=8+k$

$8+k=2 \Leftrightarrow k=-6$

Exercice 4 :

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-\sqrt{25x^2+5x-6}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-x\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(6-\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}\right)}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[6x-\sqrt{25x^2+5x-6}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(5x-\sqrt{25x^2+5x-6}\right)\cdot\frac{5x+\sqrt{25x^2+5x-6}}{5x+\sqrt{25x^2+5x-6}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-\left(25x^2+5x-6\right)}{5x+\sqrt{25x^2+5x-6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+6}{5x+\sqrt{25x^2+5x-6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{x\left(5+\sqrt{25+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}\right)}=\frac{-5}{5+5}=-\frac{1}{2}$$

$$y=x-\frac{1}{2}$$

Exercice 5 :

a) $$\lim_{h\to 0}\frac{-\left(x+h\right)^2+2(x+h)+3+x^2-2x-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-x^2-2xh-h^2+2x+2h+3+x^2-2x-3}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(-2x-h+2\right)}{h}=-2x+2$$

b) $T_2(x)=f(2)+f'(2)(x-2)=3-2(x-2)=-2x+7$

c) $f'(a)=-2a+2=4 \Leftrightarrow a=-1$; $P(-1;0)$

Exercice 6 :

a) $f'(x) = 4\left(x^2+3\right)^3 \cdot 2x \cdot \left(6x^2-2\right) + \left(x^2+3\right)^4 \cdot 12x$

b) $f'(x) = 2\arcsin\left(5x\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \cdot 5$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(3x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6x + \dfrac{5}{25x^2} = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{9x^4}} + \dfrac{1}{5x^2}$

Exercice 7 :

a) Vrai, f est dérivable en $x = a$ alors f est continue en $x = a$ et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

b) Faux, $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2+1}$

c) Faux, $f(x) = x+1$; $g(x) = x+2$; $f'(x) = g'(x) = 1$

d) Faux, $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$; $g(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$; $(f \cdot g)(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

av de $f : x = -2$; av de $g : x = -3$; av de $f : x = -3$