Discipline : Mathématiques Semestre: 1 Durée de l'épreuve:160'

Date: 18.12.2023 Nombre de pages de l'énoncé: 4 (y compris la page d'en-tête)

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
3MA1.DF01	22	C. CRETTAZ
3MA1.DF02	22	C. CRETTAZ
3MA1.DF03	20	G. VORPE
3MA1.DF04	22	G. VORPE
3MA1.DF05	23	A. SCHLEINING
3MA1.DF06	22	S. PICCHIONE
3MA1.DF07	19	S. PICCHIONE

Documents autorisés	
a) **mis à disposition par le collège** : (description précise et nombre, etc.)	b) **personnels à l'élève** :
	Calculatrice agréée Ti30 et Ti34 sauf modèles Pro
	Table numérique non annotée (seuls les marque-pages et le surlignage sont autorisés)

Informations pour les maîtres-surveillants
Merci par avance de vérifier que les tables numériques et les calculatrices soient conformes.

Nom, Prénom du candidat : .... Groupe : ....

Exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	Notations	Total
Points	13	6	19	8	13	10	13	7	5	94
Obtenu										

Informations aux élèves :

- Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
- Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
- N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs, les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.
- Donner les réponses en valeurs exactes ou avec deux décimales.
- Les élèves de Monsieur Picchione doivent écrire au stylo (pas rouge).

Exercice 1 : (13 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{2x^2-x-15}$ (4 points)

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (3 points)

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$ (3 points)

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x)}{3x}$ (3 points)

Exercice 2 : (6 points)

Déterminer (il n'est pas nécessaire de vérifier) :

a) L'expression algébrique d'une fonction f possédant une asymptote oblique d'équation $y=2x-3$, mais aucune asymptote verticale. (3 points)

b) L'expression algébrique d'une fonction g dont le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-2;5\}$, qui possède une unique asymptote verticale d'équation $x=5$ et une asymptote horizontale d'équation $y=3$. (3 points)

Exercice 3 : (19 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. (1 point)

b) Déterminer les zéros et l'ordonnée à l'origine de f. (3 points)

c) Déterminer les éventuelles asymptotes de f et donner leurs équations. (5 points)

d) Déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à une éventuelle asymptote oblique ou horizontale (réponse sous forme de tableau) et donner les coordonnées d'un éventuel point d'intersection. (5 points)

e) Représenter soigneusement le graphe de f dans un repère orthonormé en tenant compte des résultats précédents (échelle des axes : 2 carrés $=$ 1 unité). (5 points)

Exercice 4 : (8 points)

Tracer dans un repère orthonormé l'esquisse possible d'une fonction f vérifiant toutes les conditions ci-dessous (échelle des axes : 2 carrés $=$ 1 unité) :

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) f est discontinue en $x = -3$ et $x = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = f(-3)$

d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

e) f n'est pas dérivable en $x = -5$

f) la dérivée de f en $x = 4$ vaut 0

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Exercice 5 : (13 points)

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < -2 \\ x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) f est-elle continue en $x = -2$? Justifier. (3 points)

b) f est-elle continue en $x = 3$? Justifier. (4 points)

c) f est-elle continue sur $]3; +\infty[$? Justifier. (2 points)

2) Déterminer le(s) nombre(s) $k \in \mathbb{R}$ afin que la fonction g définie par

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 4x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ soit continue en $x = 2$. (4 points)

Exercice 6 : (10 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) A l'aide de la définition de la dérivée, montrer que $f'(x) = -2x + 2$. (4 points)

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphique de f au point $(2; f(2))$. (3 points)

c) Déterminer en quel point P la tangente au graphique de f est parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 4$. Justifier par un calcul. (3 points)

Exercice 7 : (13 points)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des règles de dérivation.

a) $f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(6x^2-2\right)$ (3 points)

b) $f(x)=\dfrac{3x-1}{(2x+1)^2}$ (simplifier la réponse) (4 points)

c) $f(x)=\sin^2\left(7x\right)$ (3 points)

d) $f(x)=\sqrt[3]{3x^2}-\dfrac{1}{5x}$ (3 points)

Exercice 8 : (7 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) Si f est dérivable en $a\in\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. (2 points)

b) Soit la fonction f définie par $f(x)=3x^3+3x^2+x-5$. Alors f possède une tangente horizontale. (3 points)

c) La fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+x+1}$ n'a pas d'asymptote verticale. (2 points)

Exercice 1 :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-3x^2-11x+6}{2x^2-x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(2x^2+3x-2\right)}{(x-3)(2x+5)}=\dfrac{25}{11}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{8}{x}+\dfrac{15}{x^2}\right)}=1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x)}{3x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos(2x)}=\dfrac{2}{3}$

Exercice 2 :

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+2x-3$

b) $g(x)=\dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-5)}+3$

Exercice 3 :

a) $f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}=\dfrac{3x^2+x-4}{(x+1)^2}$; $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b) $\Delta=49$; $x_1=\dfrac{-1-7}{6}=-\dfrac{4}{3}$; $x_2=\dfrac{-1+7}{6}=1$

$f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}=\dfrac{3\left(x+\dfrac{4}{3}\right)(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(3x+4)(x-1)}{(x+1)^2}$; $f^{-1}(0)=\left\{-\dfrac{4}{3};1\right\}$

$f(0)=-4$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-4}{(x+1)^2}=\dfrac{-6}{0^+}=-\infty$; av d'équation $x=-1$

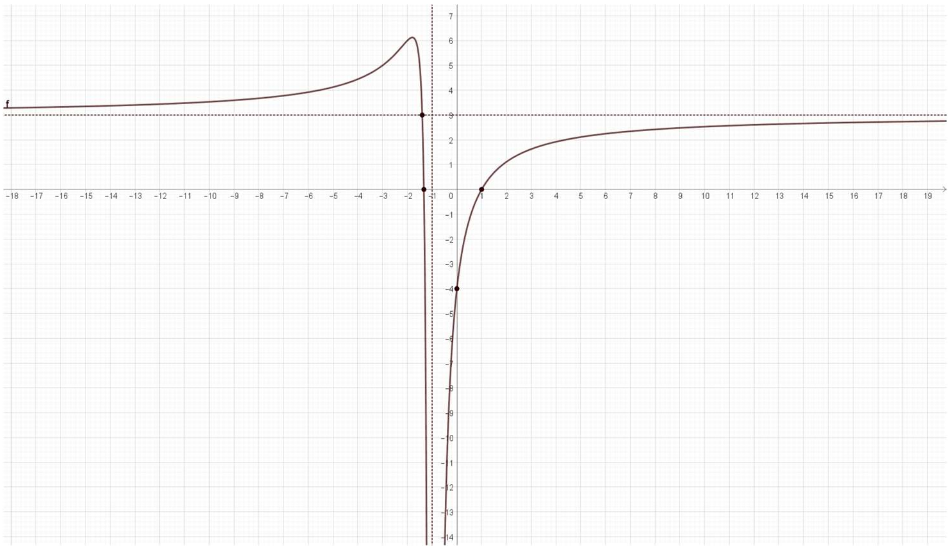
$f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}=3+\dfrac{-5x-7}{(x+1)^2}$; ah d'équation $y=3$

d) $\delta(x)=\dfrac{-5x-7}{(x+1)^2}$

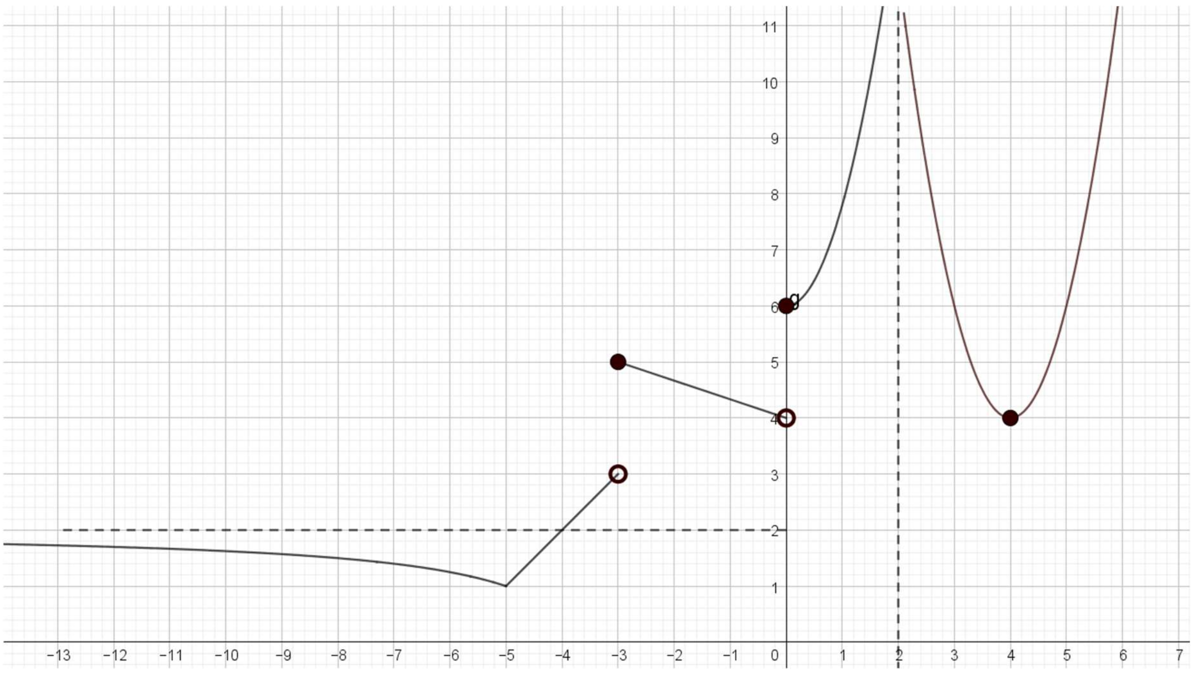
		$-\dfrac{7}{5}$		-1	
$-5x-7$	$+$	0	$-$		$-$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$		$+$
$\delta(x)$	$+$	0	$-$		$-$

Intersection en $P\left(-\dfrac{7}{5};3\right)$

e)



Exercice 4 :



Exercice 5 :

1) a) $\lim\limits_{x\to-2^-}\left(x^2+3\right)=7\neq \lim\limits_{x\to-2^+}\left(x+1\right)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2} f(x)$ n'existe pas.

Donc f est discontinue en $x=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\left(x+1\right)=4$; $\lim\limits_{x\to3^+}\left(2x-2\right)=4$; $f(3)=4$.

Donc f est continue en $x=3$.

c) Oui, car c'est une fonction polynômiale.

2) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=2$; $\lim\limits_{x\to2^+}\left(4x+k\right)=8+k$; $f(2)=8+k$

$8+k=2 \Leftrightarrow k=-6$

Exercice 6 :

a) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-\left(x+h\right)^2+2(x+h)+3+x^2-2x-3}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-x^2-2xh-h^2+2x+2h+3+x^2-2x-3}{h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-2xh-h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h\left(-2x-h+2\right)}{h}=-2x+2$

b) $T_2(x)=f(2)+f'(2)(x-2)=3-2(x-2)=-2x+7$

c) $f'(a)=-2a+2=4 \Leftrightarrow a=-1$; $P(-1;0)$

Exercice 7 :

a) $f'(x)=4\left(x^2+3\right)^3\cdot 2x\cdot\left(6x^2-2\right)+\left(x^2+3\right)^4\cdot 12x$

b) $f'(x)=\dfrac{3(2x+1)^2-4(3x-1)(2x+1)}{(2x+1)^4}=\dfrac{3(2x+1)-4(3x-1)}{(2x+1)^3}=\dfrac{-6x+7}{(2x+1)^3}$

c) $f'(x)=14\sin\left(7x\right)\cos\left(7x\right)$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(3x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6x+\dfrac{5}{25x^2}=\dfrac{2x}{\sqrt[3]{9x^4}}+\dfrac{1}{5x^2}$

Exercice 8 :

a) Vrai, f est dérivable en $x=a$ alors f est continue en $x=a$ et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

b) Vrai, $f'(x)=9x^2+6x+1=(3x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

c) Vrai, $x^2+x+1\neq 0$ donc le domaine de f est $\mathbb{R}$.