REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE Année scolaire 2023-2024
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

Discipline : MATHÉMATIQUES	Date : **10 juin 2024**
Épreuve Regroupée - 2ème année	Durée de l'épreuve : **160'**
	Nombre de pages : **4** *(y compris la page d'en-tête)*

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
2MA2.DF01	16	E. EZAHR
2MA2.DF02	16	G. VORPE
2MA2.DF03	13	S. MOODY

Documents/Matériel autorisés	
Mis à disposition par le collège :	Personnels à l'élève :
Aucun	Calculatrice modèle TI30 ou TI34 sauf modèles PRO. Table CRM **non-annotée** (marque-pages et surlignages autorisés.)
Information au maître-surveillant	
Merci de vérifier que les tables numériques sont conformes	

Nom et prénom :	**Groupe :**

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	Notations	Total
Points :	14	12	11	8	12	10	7	9	4	87
Obtenu :										

Informations aux élèves :

- Sur la première page des feuilles d'épreuve indiquer votre nom, la date et le nom du maître de la discipline.
- Numéroter chaque page de l'épreuve et indiquer votre nom sur chaque feuille.
- Rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve en y annotant votre nom et groupe.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type un "nombre" ou "oui/non" ne rapportent aucun point.

Question 1 *(14 points)*

Soit les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{4x-3}{x+1} \qquad g(x) = x^2 + 2x - 4 \qquad h(x) = \frac{3x-1}{x+2}$$

Déterminer l'expression algébrique simplifiée de chacune des compositions suivantes et préciser le domaine de définition.

a) i) *(4 pts)* $f \circ g$

ii) *(6 pts)* $h \circ f$

b) *(4 pts)* Décomposer la fonction h en fonctions élémentaires.

Question 2 *(12 points)*

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

a) *(3 pts)* Déterminer les ensembles A et B (les plus grands possibles) de manière à ce que la fonction $f : A \to B$ soit bijective.

b) *(5 pts)* Déterminer l'expression algébrique de la réciproque de la fonction f ainsi que les ensembles de départ et d'arrivée de cette réciproque.

c) *(4 pts)* Tracer les graphiques de f et de sa réciproque dans un même repère. (Echelle des axes : 1 unité = 2 carrés)

Question 3 *(11 points)*

Résoudre les équations suivantes :

a) *(7 pts)* $2\log_3(2-x) = \log_3(x+4) + 1$

b) *(4 pts)* $2^{3-x} \cdot 4^{2x+1} = \dfrac{1}{16}$

Question 4 *(8 points)*

En 2010, la consommation mondiale d'énergie a été de 10 Gtep (Giga Tonnes d'Equivalent Pétrole), ce qui représente une hausse de 5,6 % par rapport à l'année précédente. On suppose que ce taux est constant d'année en année.

a) *(2 pts)* Quelle a été, en Gtep, la consommation mondiale d'énergie en 2017 ?

b) *(3 pts)* A ce rythme, au bout de combien d'années va-t-on atteindre le seuil critique de consommation de 750 Gtep ?

c) *(3 pts)* Quel taux d'accroissement annuel de consommation d'énergie faudrait-il avoir pour n'atteindre ce seuil critique qu'en 2150 ? (réponse en % arrondie au centième)

Question 5 *(12 points)*

a) *(5 pts)* Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

b) *(7 pts)* Résoudre l'équation trigonométrique suivante et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \pi\right)$$

Question 6 *(10 points)*

Soit la fonction f définie par $f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{4}\right)$

a) *(1 pt)* Déterminer la période de f.

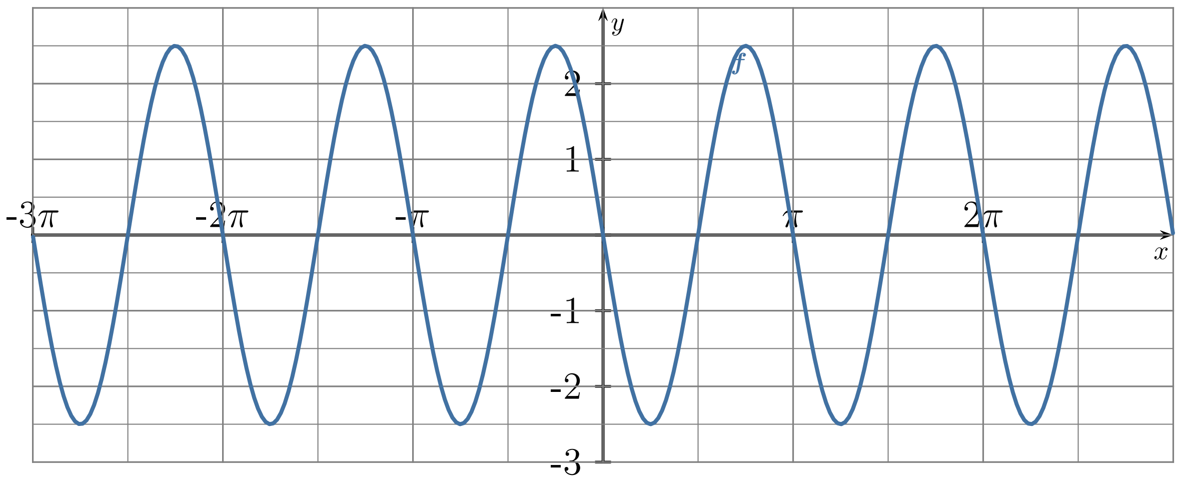
b) *(3 pts)* Déterminer algébriquement l'ensemble des zéros de f.

c) *(4 pts)* Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-4\pi; 12\pi]$.

d) *(2 pts)* Représenter graphiquement, sur le même intervalle et dans le même repère que la fonction f, la fonction g définie par $g(x) = f(x) - 2$.

Question 7 *(7 points)*

Soit la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



a) *(3 pts)* Déterminer l'expression algébrique de la fonction f.

b) *(2 pts)* Déterminer graphiquement l'ensemble des préimages de $-2{,}5$ par f.

c) *(2 pts)* Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[7\pi; 30\pi]$ (il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation).

Question 8 *(9 points)*

Répondre aux questions suivantes ou effectuer le calcul demandé. Justifier vos réponses.

a) *(2 pts)* Est-ce qu'une fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est toujours bijective ?

b) *(3 pts)* Simplifier au maximum l'expression suivante et donner la réponse écrite avec une racine. (On suppose $a > 0$)

$$\frac{\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt[6]{a}}$$

c) *(2 pts)* Est-ce que $\sin(x^2) = (\sin(x))^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

d) *(2 pts)* Sachant que $b > 0$ et $b \neq 1$, calculer : $\log_b\left(\frac{\sqrt[3]{b^2}}{b}\right)$.

Fin de l'épreuve. Bonne relecture.

SEMESTRIELLE 2MA2 — 10 juin 2024

QUESTION 1 $\quad f(x) = \dfrac{4x-3}{x+1} \qquad g(x) = x^2+2x-4 \qquad h(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

14 points

a) i) 4 pts

<u>Domaine</u> : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad D_g = \mathbb{R}$

$\boxed{f \circ g}$

$$g(x) \in D_f \iff x^2+2x-4 \neq -1$$
$$\iff x^2+2x-3 \neq 0$$
$$\iff (x+3)(x-1) \neq 0 \iff \underline{x \neq -3 \text{ et } x \neq 1}$$

$$\boxed{D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{4(x^2+2x-4)-3}{x^2+2x-4+1} = \boxed{\frac{4x^2+8x-19}{x^2+2x-3}}$$

ii) 6 pts

Domaine : $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\boxed{h \circ f}$

$$f(x) \in D_h \iff \frac{4x-3}{x+1} \neq -2$$
$$\iff 4x-3 \neq -2x-2$$
$$\iff 6x \neq 1$$
$$\iff x \neq 1/6 \qquad \boxed{D_{h\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1; \tfrac{1}{6}\}}$$

$$(h \circ f)(x) = \frac{3\left(\frac{4x-3}{x+1}\right)-1}{\frac{4x-3}{x+1}+2} = \frac{\frac{12x-9-x-1}{x+1}}{\frac{4x-3+2x+2}{x+1}} =$$

$$= \boxed{\frac{11x-10}{6x-1}}$$

b) 4 pts

$$\begin{array}{r|l} 3x-1 & x+2 \\ \hline -(3x+6) & 3 \\ \hline -7 & \end{array}$$

$$h(x) = 3 + \frac{-7}{x+2} \qquad \boxed{h(x) = (h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1)(x)}$$

$$h_1(x) = x+2 \quad h_2(x) = \frac{1}{x} \quad h_3(x) = -7x \quad h_4(x) = x+3$$

QUESTION 2 $f(x) = -x^2 + 2x + 2 = -(x^2 - 2x + 1 - 1 - 2) = -(x-1)^2 + 3$

12 points

a) f est concave : $\boxed{f : [1 ; +\infty[\longrightarrow]-\infty ; 3]}$

3pts

b) $f(x) = -(x-1)^2 + 3$

5pts

$f_1(x) = x - 1 \quad f_2(x) = x^2 \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = x + 3$

${}^r f_1(x) = x + 1 \quad {}^r f_2(x) = \sqrt{x} \quad {}^r f_3(x) = -x \quad {}^r f_4(x) = x - 3$

$f(x) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$

${}^r f(x) = ({}^r f_1 \circ {}^r f_2 \circ {}^r f_3 \circ {}^r f_4)(x) = \boxed{\sqrt{-x+3} + 1}$

$-(x-1)^2 + 3 = y \iff$

$-(x-1)^2 = y - 3 \iff$

$(x-1)^2 = -y + 3 \iff$

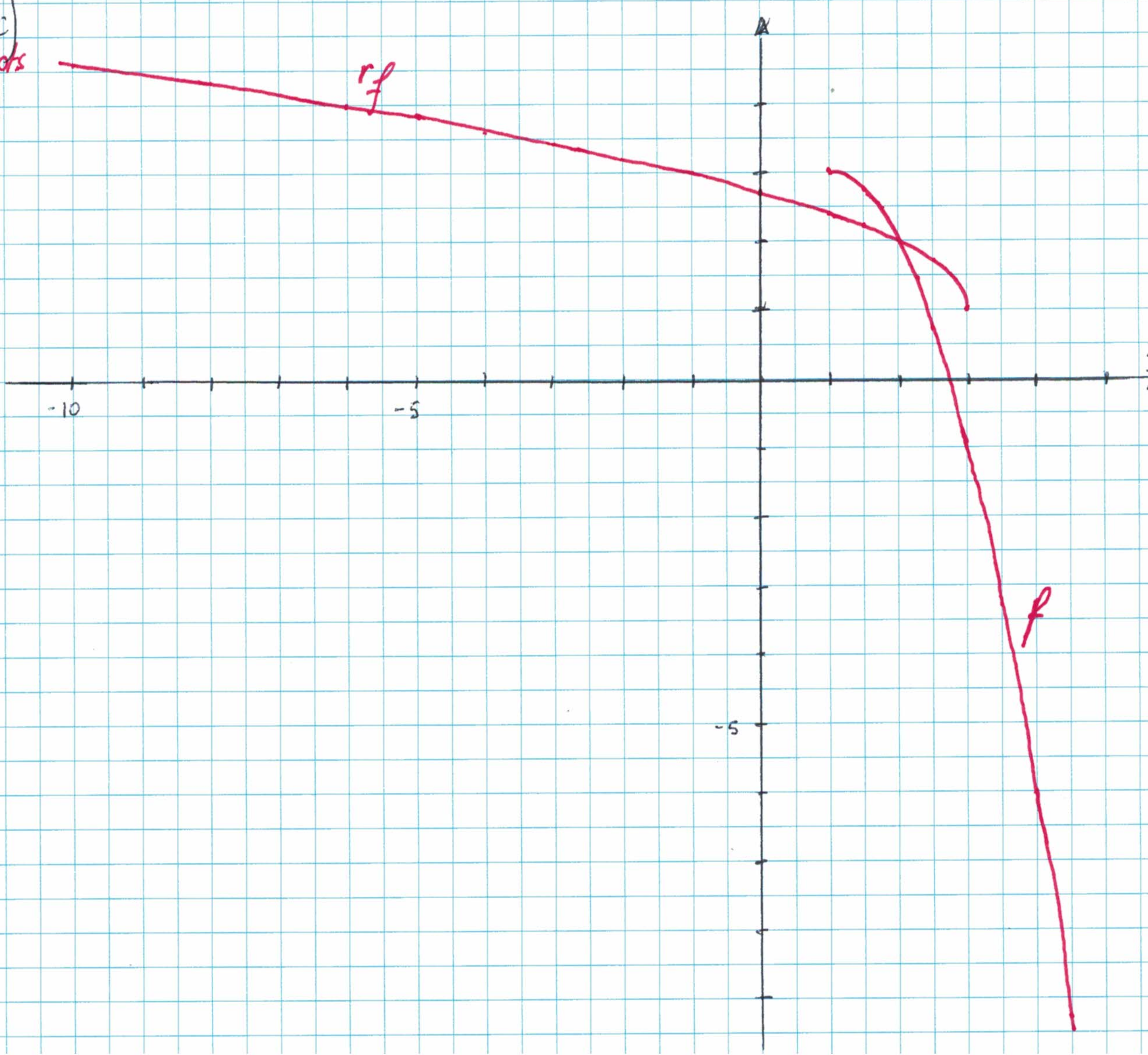
$x = \sqrt{-y+3} + 1$

${}^r f(x) = \boxed{\sqrt{-x+3} + 1}$

$\boxed{{}^r f :]-\infty ; 3] \longrightarrow [1 ; +\infty[}$

c)

4 pts



QUESTION 3

11 points

a) 7 pts $2\log_3(2-x) = \log_3(x+4) + 1$

Domaine : $2-x > 0 \iff x < 2$

$x+4 > 0 \iff x > -4$

$D =]-4;2[$

$\Rightarrow \log_3\left((2-x)^2\right) = \log_3\left(3(x+4)\right) \iff$

$4 - 4x + x^2 = 3x + 12 \iff$

$x^2 - 7x - 8 = 0 \iff$

$(x-8)(x+1) = 0 \iff x = 8 \notin D$ ou $x = -1 \in D$

$$\boxed{S = \{-1\}}$$

b) 4 pts $2^{3-x} \cdot 4^{2x+1} = \frac{1}{16} \iff 2^{3-x} \cdot 2^{4x+2} = 2^{-4}$

$\iff 2^{3x+5} = 2^{-4}$

$\Rightarrow 3x + 5 = -4 \iff 3x = -9 \iff x = -3$

$$\boxed{S = \{-3\}}$$

QUESTION 4

8 points

$C(t) = 10 \cdot (1 + 0{,}056)^t$

a) 2 pts $C(7) = 10 \cdot (1+0{,}056)^7 = \boxed{14{,}64\ [\text{Gtep}]}$

b) 3 pts $750 = 10 \cdot (1+0{,}056)^t \iff t = \log_{1{,}056}(75) \iff t = 79{,}23$

$\Rightarrow$ Dans $\boxed{79{,}23}$ années.

c) 3 pts $750 = 10 \cdot (1 + \text{taux})^{140} \iff \text{taux} = \sqrt[140]{75} - 1 \cong \boxed{3{,}13\ \%}$

QUESTION 5

12 points

a) 5 pts

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \Bigg| \qquad 3x - \frac{\pi}{2} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \Bigg| \qquad 4x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \qquad \Bigg| \qquad x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ; \ \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \ \Big| \ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

b) 7 pts

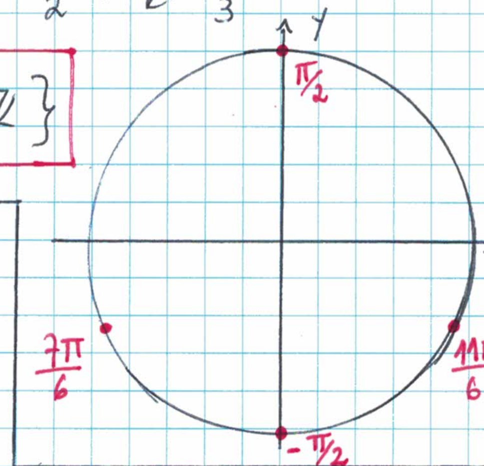
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x - \pi)$$

$$2x - \frac{\pi}{2} = x - \pi + 2k\pi \qquad \Bigg| \qquad 2x - \frac{\pi}{2} = -(x - \pi) + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \Bigg| \qquad 3x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} \ \Big| \ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$



QUESTION 6

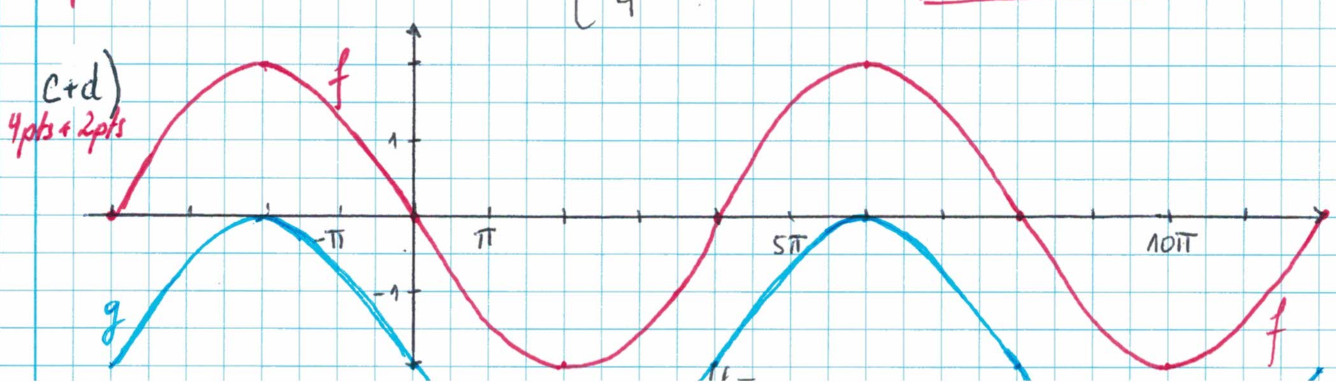
10 points

$$f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

a) 5 pts $\omega = 1/4 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{1/4} = \boxed{8\pi}$

b) 7 pts $-2\sin\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \iff \begin{cases} \frac{x}{4} = 0 + 2k\pi \iff \boxed{x = 8k\pi} \\ \frac{x}{4} = \pi + 2k\pi \iff \boxed{x = 4\pi + 8k\pi} \end{cases}$

c+d) 4pts + 2pts



QUESTION 7

7 points

a) 3 pts $A = -2{,}5 \quad T = \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$

$\boxed{f(x) = -2{,}5 \sin(2x)}$

b) 2 pts $f^{-1}(\{-2{,}5\}) = \boxed{\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$

c) 2 pts 2 solutions par intervalle de longueur π $\Rightarrow (30-7)\cdot 2 = \boxed{46 \text{ solut.}}$

QUESTION 8

9 points

a) 2 pts $\boxed{\text{Non}}$, par exemple $f(x) = x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) 3 pts $\frac{\sqrt{a^5} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt[6]{a}} = a^{5/2} \cdot a^{3/4} \cdot a^{-7/3} \cdot a^{1/6} = a^{13/12} = \boxed{\sqrt[12]{a^{13}}}$

$\frac{30}{12} + \frac{9}{12} - \frac{28}{12} + \frac{2}{12}$

c) 2 pts $\boxed{\text{Non}}$. Par exemple si $x = \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\neq$

$\longrightarrow \sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right) \cong 0{,}62$

d) 2 pts $\log_b\left(\frac{\sqrt[3]{b^2}}{b}\right) = \log_b\left(b^{2/3} \cdot b^{-1}\right) = \log_b\left(b^{-1/3}\right) = \boxed{-1/3}$