REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE — Année scolaire 2023-2024
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

Date : **11 décembre 2023**
Discipline : MATHÉMATIQUES — Durée de l'épreuve : **90'**
Épreuve Regroupée - 2e année — Nombre de pages : **3** *(y compris la page d'en-tête)*

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
2MA1.DF01	21	Stéphane EZAHR
2MA1.DF02	21	Guilherme VORPE
2MA1.DF03	21	Sandie MOODY
2MA1.DF04	20	Claudio SCRUCCA
2MA1.DF05	21	Claudio SCRUCCA
2MA1.DF06	20	Michael WEISS
2MA1.DF07	22	Michael WEISS

Documents/Matériel autorisés :
Calculatrice TI-30 ou TI 34 (sauf modèle PRO)
Table CRM **non annotée** (marque-pages et surlignages autorisés)

Nom et prénom : **Groupe :**

Exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	Notations	Total
Points:	5	8	4	7	7	10	5	4	3	53
Obtenu :										

Informations aux élèves :

- Numéroter chaque page de l'épreuve et indiquer votre nom sur chaque feuille.
- Rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve en y annotant votre nom et groupe.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type un "nombre" ou "oui/non" ne rapportent aucun point.
- Trois points de l'épreuve sont attribués aux notations mathématiques.

Question 1 ..... *5 points*

Soit les polynômes $A(x) = -2x^4 + x^2 - 3x + 1$ et $B(x) = x^2 - x$.

(a) *(3 points)* Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

(b) *(2 points)* Le polynôme $A(x)$ est-il divisible par $x + 1$?

Question 2 ..... *8 points*

Soit le polynôme $P(x) = 8x^4 + 2x^3 - 29x^2 - 17x + 6$.

(a) *(7 points)* Factoriser complètement $P(x)$.

(b) *(1 point)* Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Question 3 ..... *4 points*

Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 satisfaisant simultanément toutes les conditions suivantes :

- 2 et -3 sont des racines de $P(x)$
- $P(x)$ est divisible par $x^2 + 1$
- $P(-1) = -4$

Question 4 ..... *7 points*

Résoudre l'équation suivante, en précisant son domaine de définition :

$$\frac{6}{x+2} - \frac{3x-2}{x+1} = \frac{5}{x^2+3x+2}$$

Question 5 ..... *7 points*

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{(x+2)(3-x)}{x^2-3x-10} \leq 0$$

Question 6 ..... *10 points*

Soit les points $A(3;2)$, $B(1;7)$ et $C(7;5)$.

(a) *(2 points)* Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

(b) *(2 points)* Le triangle ABC est-il isocèle en A ?

(c) *(1 point)* Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

(d) *(3 points)* Calculer l'aire du triangle ABC.

(e) *(2 points)* Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Question 7 ..... *5 points*

Soit les vecteurs suivants : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) *(2 points)* Quelle doit être la valeur de y pour que le vecteur $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$?

(b) *(3 points)* Calculer l'angle α entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Réponse arrondie au centième.

Question 8 ..... *4 points*

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.

(a) *(2 points)* Le polynôme $x^6 + 1$ est factorisable.

(b) *(2 points)* Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$

Notations ..... *3 points*

FIN DE L'EPREUVE

2 MA 1 - Corrigé

Question 1 :

a) 3pts

$$\begin{array}{r|l} -2x^4 + x^2 - 3x + 1 & x^2 - x \\ \hline +2x^4 - 2x^3 & -2x^2 - 2x - 1 \\ \hline -2x^3 + x^2 - 3x + 1 & \\ +2x^3 - 2x^2 & \\ \hline -x^2 - 3x + 1 & \\ +x^2 - x & \\ \hline -4x + 1 & \end{array}$$

$A(x) = (x^2 - x)(-2x^2 - 2x - 1) - 4x + 1$

b) 2pts $A(x)$ divisible par $(x+1)$ si $A(-1) = 0$.

$A(-1) = -2 \cdot (-1)^4 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$ donc non

Question 2 :

a) 6pts $P(-1) = 0 \Rightarrow P(x) = (x+1)\,Q(x)$

deg	4	3	2	1	0
coeff	8	2	-29	-17	6
-1		-8	6	23	-6
	8	-6	-23	6	0

$Q(x) = 8x^3 - 6x^2 - 23x + 6$

$Q(2) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-2)\,Q'(x)$

deg	3	2	1	0
coeff	8	-6	-23	6
2		16	20	6
	8	10	-3	0

$Q'(x) = 8x^2 + 10x - 3$

$Q'(x) = 8x^2 + 10x - 3$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 196$

$x_1 = \frac{-10+14}{16} = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{-10-14}{16} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow Q'(x) = 8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow P(x) = 8(x+1)(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

b) 1pt $P(x) = 0 \Rightarrow S = \left\{-1; 2; \frac{1}{4}; -\frac{3}{2}\right\}$

Question 3 :

$P(x) = a\,(x-2)(x+3)(x^2+1)$ donc $P(-1) = -4$

$\Leftrightarrow a(-3)(2)(2) = -4$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x+3)(x^2+1)$

Question 4 :

7 pts

$$\frac{6}{x+2} - \frac{3x-2}{x+1} - \frac{5}{(x+2)(x+1)} = 0 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x+1) - (3x-2)(x+2) - 5}{(x+2)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 6x+6 - 3x^2 - 6x + 2x + 4 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\Delta = 2^2 + 4(-3)\cdot 5 = 64 \Rightarrow x_1 = \frac{-2-8}{-6} = \frac{5}{3} \qquad x_2 = -1 \notin D$$

$$\Rightarrow S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

Question 5 :

7 pts

$$\frac{(x-2)(3-x)}{(x-5)(x+2)} \leq 0 \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{5; -2\}$$

x	$-\infty$		-2		3		5		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{P(x)}{Q(x)}$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$S =]-\infty; -2[\cup]-2; 3] \cup]5; +\infty[$$

Question 6 :

a) 2 pts $\quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) 2 pts $\quad$ Isocèle si $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$. $\quad \vec{AB} = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} \quad \vec{AC} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25}$

$\Rightarrow$ donc **non**

c) 1 pt $\quad$ ABC rectangle en A $\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 90° \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -8 + 15 = 7$. Donc **non**.

d) 3 pts $\quad \det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) - 6\cdot 5 = -26 \Rightarrow$ Aire $\Delta ABC = \frac{|-26|}{2} = 13$

e) 2 pts $\quad \vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D(9;0)$

Question 7 :

a) 2 pts $\quad$ colinéaires si les composantes sont proportionnelles : $y = \frac{5 \cdot 7}{-3} = \frac{-35}{3} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{35}{3} \end{pmatrix}$

b) 3 pts $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -18 + 28 = 10 \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52}$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{52}}\right) \simeq 79{,}51°$$

Question 8 :

a) 2 pts $\quad$ Vrai car degré sup à 2. (thm fondamental)

b) 2 pts $\quad$ Faux : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = 1 \quad \|\vec{v}\| = 1 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| = 0$