

Questions d'oral de mathématiques 3^e OS Pédagogie

10 avril 2025

1 Les questions

1.1

Théorème : Nombres premiers

Les nombres premiers sont en nombre infini.

1.2

Théorème : Irrationalité de racine carrée de deux

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1.3

Théorème : Relation de Pythagore

(a)

Sur un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés de ses cathètes.

(b) Enoncer la réciproque du théorème de Pythagore.

1.4

Théorème : Théorème du sinus

(a)

Sur un triangle quelconque, le rapport de la longueur d'un côté par le sinus de l'angle opposé est le même pour chacun des trois côtés.

(b) Enoncer, sans le démontrer, le théorème du cosinus.

1.5

Théorème : Théorème du cosinus

(a)

Sur un triangle quelconque, le carré de la longueur d'un des côtés est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, à laquelle il faut algébriquement soustraire le double produit des longueurs de ces deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle opposé au côté initial.

(b) Enoncer, sans le démontrer, le théorème du sinus.

1.6

Théorème : Théorème de Thalès

Si deux droites parallèles coupent deux droites sécantes alors elles déterminent deux triangles dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

1.7

Théorème : Somme des n premiers entiers naturels

(a)

La somme des n premiers entiers naturels est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Résoudre un exercice d'application.

1.8

Théorème : Formules de Viète

Formules de Viète pour la résolution de l'équation du second degré.

2 Les démonstrations

2.1

Théorème : Nombres premiers

Les nombres premiers sont en nombre infini.

Démonstration. (Par l'absurde) Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers. On peut alors les lister par ordre croissant dans un ensemble :

$$L = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_k\}$$

Construisons le nombre N :

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout nombre naturel plus grand que 1 est soit un nombre premier soit un nombre composé. Deux cas se présentent, soit N est premier, soit N est un nombre composé.

Si N est un nombre premier, alors il est plus grand que tous ceux de la liste, et c'est une contradiction, puisque par hypothèse, il n'y a que les nombres premiers de la liste. Et on a terminé.

Si N est composé, l'un des nombres de la liste, disons p_n , le divise. Dans ce cas p_n divise non seulement N , mais aussi le produit $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k$, ainsi que leur différence, c'est-à-dire

$$N - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k = p_n \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}^*$$

Or

$$\begin{aligned} p_n \cdot m &= N - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k \\ 1 &= p_n \cdot m \\ \frac{1}{m} &= p_n \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction aussi, car si $m = 1$, on a $p_n = 1$ qui n'est pas un nombre premier, soit $m > 1$ auquel cas $\frac{1}{m}$ n'est pas un nombre entier.

En conséquence notre hypothèse de départ est fautive. C'est donc que les nombres premiers sont en nombre infini. ■

2.2

Théorème : Irrationalité de racine carrée de deux

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Démonstration. (Par l'absurde)

Supposons qu'il existe a, b , deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Alors

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow 2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot b^2 &= a^2\end{aligned}\tag{1}$$

On observe que a^2 est pair. Il s'en suit, par la contraposée, que a est pair. En effet, si a est impair, alors il existe un $l \in \mathbb{N}^*$, tel que $a = 2l + 1$. En calculant le carré de a , on trouve

$$a^2 = (2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1 = 2(2l^2 + 2l) + 1 = 2m + 1$$

avec $m = 2l^2 + 2l$ entier ce qui montre que a^2 est aussi impair, et nous permet d'affirmer que si a^2 est pair alors a est pair.

Il existe donc un entier naturel non nul k tel que $a = 2k$. Remplaçons a par $2k$ dans (1) :

$$\begin{aligned}2 \cdot b^2 &= (2k)^2 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot b^2 &= 4k^2 \\ \Leftrightarrow b^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

Ce qui implique que b^2 est pair, et par la contraposée, que b est aussi pair. Mais ceci est une contradiction : a et b sont tous deux des multiples de 2, alors que nous avons fait l'hypothèse que a et b étaient premiers entre eux, autrement dit, qu'ils n'avaient pas de facteur commun autre que 1.

En conséquence notre supposition est absurde, les entiers a et b n'existent pas et $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. ■

2.3

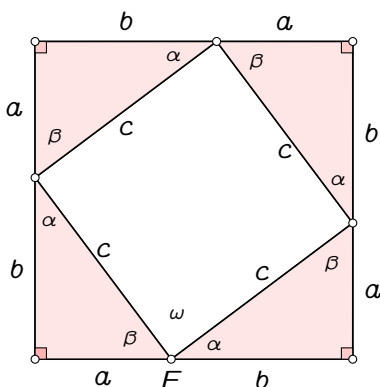
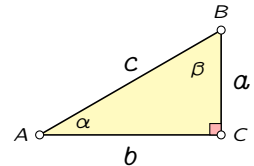
(a) Théorème : Relation de Pythagore

Sur un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés de ses cathètes.

Démonstration. (Directe)

Par hypothèse, nous avons un triangle rectangle, dont on connaît les longueurs et la mesure des angles.

On suppose, sans perte de généralité, que ce triangle est rectangle en C .



Construisons un carré de côté $a + b$.

Par construction, l'angle de sommet F est un angle plat. Alors on a

$$\beta + \omega + \alpha = 180^\circ$$

Ensuite, puisque par hypothèse le triangle est rectangle, il y a un angle droit et deux angles aigus.

De plus, on sait que la somme des angles d'un triangle vaut un angle plat. Il s'en suit que :

$$\alpha + \beta + 90 = 180^\circ$$

et

$$\beta + \omega + \alpha = 180^\circ$$

d'où que $\omega = 90$, et donc le quadrilatère central est aussi un carré.

Calculons de deux manières différentes l'aire du grand carré, cela nous donne l'égalité

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \\ \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que, sur un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés de ses cathètes. ■

(b) Théorème : Réciproque du Théorème de Pythagore

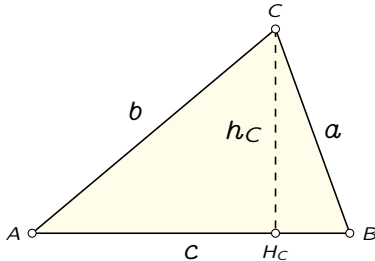
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Alors les a, b et c sont les longueurs d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse mesure c unités.

2.4

(a) Théorème : Théorème du sinus

Sur un triangle quelconque, le rapport de la longueur d'un côté par le sinus de l'angle opposé est le même pour chacun des trois côtés.

Démonstration. (Directe)



Par hypothèse, nous avons un triangle quelconque ABC .

Traçons la hauteur h_C issue de C , marquons le pied de cette hauteur par H_C .

Nous devons montrer que $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$.

Calculons le sinus de l'angle \widehat{A} d'une part et le sinus de l'angle \widehat{B} d'autre part :

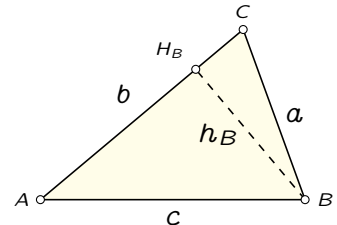
$$\sin(\widehat{A}) = \frac{h_C}{b} \quad \sin(\widehat{B}) = \frac{h_C}{a}$$

Alors, en isolant h_C des deux équations nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{A}) \cdot b &= \sin(\widehat{B}) \cdot a \\ \Leftrightarrow \frac{b}{\sin(\widehat{B})} &= \frac{a}{\sin(\widehat{A})} \end{aligned}$$

Pour montrer la seconde égalité, nous menons la hauteur h_B issue de B .

Calculons le sinus de l'angle \widehat{A} d'une part et le sinus de l'angle \widehat{C} d'autre part :



$$\sin(\widehat{A}) = \frac{h_B}{c} \quad \sin(\widehat{C}) = \frac{h_B}{a}$$

Alors, en isolant h_B des deux équations nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{A}) \cdot c &= \sin(\widehat{C}) \cdot a \\ \Leftrightarrow \frac{c}{\sin(\widehat{C})} &= \frac{a}{\sin(\widehat{A})} \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$.



(b)

Théorème : Théorème du cosinus

Sur un triangle quelconque, le carré de la longueur d'un des côtés est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, à laquelle il faut algébriquement soustraire le double produit des longueurs de ces deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle opposé au côté initial.

2.5

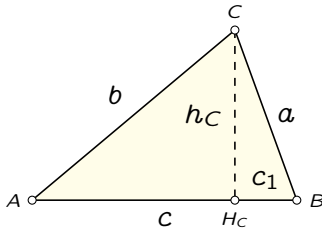
(a)

Théorème : Théorème du cosinus

Sur un triangle quelconque, le carré de la longueur d'un des côtés est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, à laquelle il faut algébriquement soustraire le double produit des longueurs de ces deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle opposé au côté initial.

Démonstration. (Directe)

Par hypothèse, nous avons un triangle quelconque ABC .



Traçons la hauteur h_C issue de C , marquons le pied de cette hauteur par H_C , et mesurons la distance c_1 entre les points B et H_C . Nous devons montrer que

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

Calculons le cosinus de l'angle \widehat{A} et de l'angle \widehat{B} , et le carré de h_C de deux manières :

$$\cos(\widehat{A}) \stackrel{(*)}{=} \frac{c - c_1}{b} \quad \cos(\widehat{B}) = \frac{c_1}{a} \quad h_C^2 = b^2 - (c - c_1)^2 = a^2 - h_C^2$$

Par (*) on obtient $c_1 = c - b \cdot \cos(\widehat{A})$ que nous utilisons dans le développement et la réduction de la dernière égalité ci-dessus :

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 + 2cc_1 - c_1^2 &= a^2 - c_1^2 & \Leftrightarrow b^2 - c^2 + 2c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A}) &= a^2 \\ \Leftrightarrow b^2 - c^2 + 2cc_1 &\stackrel{(**)}{=} a^2 & \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A}) &= a^2 \\ \Leftrightarrow b^2 - c^2 + 2c(c - b \cdot \cos(\widehat{A})) &= a^2 & & \end{aligned}$$

Qui est la première des trois formules. La seconde formule s'obtient en repartant de (**), et en utilisant le fait que $c_1 = a \cdot \cos(\widehat{B})$:

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 + 2cc_1 &= a^2 & \Leftrightarrow b^2 &= a^2 + c^2 - 2c(a \cdot \cos(\widehat{B})) \\ \Leftrightarrow b^2 &= a^2 + c^2 - 2cc_1 & \Leftrightarrow b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\widehat{B}) \end{aligned}$$

Pour la troisième formule, il faut tracer la hauteur issue de B et mener des calculs similaires :

$$\cos(\widehat{C}) = \frac{(b - b_1)}{a} \quad (b - b_1)^2 = a^2 - h_B^2 \text{ et } b_1^2 = c^2 - h_B^2$$

$$\begin{aligned} h_B^2 &= a^2 - (b - b_1)^2 = c^2 - b_1^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2bb_1 - b_1^2 = c^2 - b_1^2 \\ \Rightarrow c^2 &= a^2 - b^2 + 2b(b - a \cdot \cos(\widehat{C})) = a^2 - b^2 + 2ab \cdot \cos(\widehat{C}) \\ \Leftrightarrow c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

(b)

Théorème : Théorème du sinus

Sur un triangle quelconque, le rapport de la longueur d'un côté par le sinus de l'angle opposé est le même pour chacun des trois côtés.

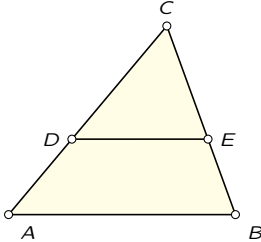
2.6

Théorème : Théorème de Thalès

Si deux droites parallèles coupent deux droites sécantes alors elles déterminent deux triangles dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

Démonstration. (Directe)

Traçons deux droites parallèles (AB) et (DE) coupées par deux sécantes (CA) et (CB) :

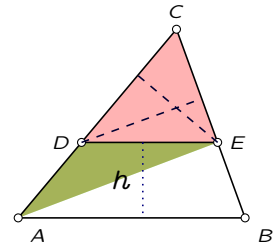


Puisque les droites parallèles (AB) et (DE) sont coupées par deux sécantes, les angles $\angle CAB$, $\angle CDE$ d'une part et $\angle CBA$, $\angle CED$ d'autre part, sont correspondants, autrement dit ils sont égaux : $\angle CAB = \angle CDE$ et $\angle CBA = \angle CED$. Et comme l'angle en C est commun aux triangles ABC et CDE , tous leurs angles sont égaux, autrement dit ces triangles sont semblables.

Nous devons montrer que $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$ et que $\frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{CB}}$.

Observons que la hauteur issue de E , permet de calculer l'aire des triangles CDE , ACE et ADE . D'autre part, la même constatation est faite pour la hauteur issue de D , elle participe dans la formule pour calculer l'aire de CDE , BDC et BDE .

De plus, puisque les segments AB et DE sont parallèles, les triangles ADE et BDE ont la même aire : $\text{Aire}_{ADE} = \frac{\overline{DE} \cdot h}{2} = \text{Aire}_{BDE}$.

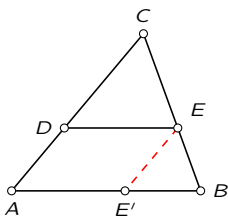


Montrons que $\frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{CB}}$, ce qui implique que $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}$.

$$1 = \frac{\overline{CA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CD} + \overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CE} + \overline{EB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{EB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{EB}}{\overline{CB}}$$

Comme les triangles ADE et BDE ont la même aire et notant $\mathcal{A}(X)$ l'aire de la figure X :

$$\frac{\mathcal{A}(ADE)}{\mathcal{A}(ACE)} = \frac{\mathcal{A}(BDE)}{\mathcal{A}(BDC)} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD} \cdot \frac{h_E}{2}}{\overline{CA} \cdot \frac{h_E}{2}} = \frac{\overline{EB} \cdot \frac{h_D}{2}}{\overline{CB} \cdot \frac{h_D}{2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}$$



Menons une parallèle à (AC) passant par E et notons E' son intersection avec (AB) . Nous pouvons alors appliquer les proportions déjà démontrées sur les triangles BEE' et BCA . Nous avons alors

$$\frac{\overline{AE'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}}$$

parce que $ADEE'$ est un parallélogramme et donc $\overline{AE'} = \overline{DE}$.

En conséquence, si deux droites parallèles coupent deux droites sécantes alors elles déterminent deux triangles dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles. ■

2.7

(a)

Théorème : Somme des n premiers entiers naturels

Montrez que la propriété

$$P(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. (Par récurrence)

Montrons que la propriété est vraie pour $n = 1$.

En effet, $P(1) = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ est vraie.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'entier $k \geq 1$, c'est-à-dire que $P(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Montrons que la propriété est aussi vraie pour $k+1$, c'est-à-dire que $P(k+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Calculons la somme des $k+1$ premiers entiers naturels :

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\ &= P(k) + (k+1) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{mise en évidence de } (k+1) \end{aligned}$$

En conséquence, $P(N)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. ■

(b)

Exercice 2.1 : Application

2.8

Théorème : Formules de Viète

Soit $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et avec $a \neq 0$, l'équation du second degré.

L'existence et le nombre de solutions de l'équation du second degré dépendent de $\Delta = b^2 - 4ac$, le **déterminant** de l'équation, c'est-à-dire que

- (1) si $\Delta \geq 0$, il y a deux solutions données par $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- (2) si $\Delta = 0$, il y a une seule solution donnée par $x = \frac{-b}{2a}$;
- (3) si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions dans \mathbb{R} .

Démonstration. (Directe) On va utiliser la technique de complétion du carré sur l'équation du second degré, afin d'isoler l'inconnue x :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 && \text{diviser par } a \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \text{ajouter et enlever le carré de la} \\
 &&& \text{moitié du facteur de } x \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 && \text{Les premiers termes sont un} \\
 &&& \text{carré} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
 x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

La valeur de x dépend la valeur du **déterminant**. En effet, $\sqrt{\Delta}$ n'est pas définie dans \mathbb{R} si $\Delta < 0$, car le domaine de définition de la racine carrée sont les nombres positifs ou nuls. Dans ce cas, il n'y a pas de solutions dans \mathbb{R} comme annoncé.

Si $\Delta = 0$, alors $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$ et $x = \frac{-b}{2a}$ est la seule solution de l'équation.

Enfin dans les autres cas il y a deux solutions données par $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

En conséquence, l'existence et le nombre de solutions de l'équation du second degré dépendent de Δ . ■