Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Deuxième année – niveau normal (2MA1)

CHAMP DU TEST

ENONCE ET CORRIGE DES EXERCICES

(Document disponible sur le site internet du collège)

Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Deuxième année – niveau normal (2MA1)

CHAMP DU TEST

Pour préparer le test d'admission de mathématiques, il appartient au candidat de regarder le champ des thèmes à connaître en se référant au plan d'études disponible sur le site internet du collège (voir « PREMIERE ANNEE – NIVEAU NORMAL »).

Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Deuxième année – niveau normal (2MA1) *

ENONCE DES EXERCICES

Références bibliographiques utiles

Vous pouvez consulter :

- E. W. Swokowski et J. A. Cole, « Algèbre », Éditions LEP
- les ouvrages édités par les Commissions romandes de mathématiques, de physique et de chimie (CRM), en particulier les ouvrages de la collection des monographies (voir notamment « Notions élémentaires »), ainsi que l'ouvrage « Formulaires et tables – Mathématiques, Physique, Chimie – CRM ».

Remarques sur le test

Durée :	105 minutes
Matériel autorisé :	« Formulaires et tables – Mathématiques, Physique, Chimie – CRM » (ouvrage personnel et non annoté) Calculatrice non programmable, non graphique et non communicante (matériel personnel)
Consignes :	Sauf indication contraire, un résultat, même juste, ne sera pris en considération que s'il est accompagné des justifications nécessaires. Une présentation soignée est exigée, ainsi qu'une rédaction à l'encre.

* Remarque pour la préparation du test en Deuxième année – niveau avancé (2MA2) : pour préparer le test d'admission en Deuxième année – niveau avancé (2MA2) de mathématiques, il appartient au candidat de compléter les notions manquantes en se référant au plan d'études disponible sur le site internet du collège (voir « PREMIERE ANNEE – NIVEAU AVANCE »).

Remarques sur les exercices de préparation

N'oubliez pas d'indiquer vos étapes de calcul dans toutes les questions où une réponse immédiate n'est pas évidente. Ces exercices de préparation donnent une idée des questions susceptibles d'être posées dans le test d'admission. Vous devez être capable de tous les faire. Attention, la durée pour effectuer tous ces exercices dépasse la durée du test (ce dernier sera donc plus court).

Exercice 1

Décidez à laquelle des 6 illustrations ci-contre le graphe des fonctions ci-dessous correspond (Justifiez votre réponse)

$f(x) = -0,2x^2 - 6x - 50$

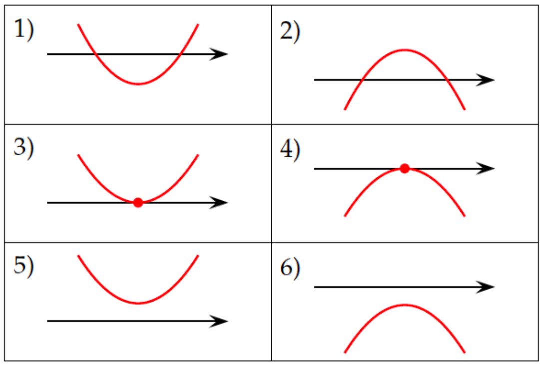
correspond à la situation ....

car :

$g(x) = 2x^2 - 4x + 2$

correspond à la situation ....

car :



Exercice 2

Soient les fonctions $f(x) = x^2 + 4,5x + 5$ et $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$

a) Calculez les zéros de f et de g, s'ils existent.
b) Factorisez les expressions algébriques de f et de g.
c) Trouvez les points d'intersection de f et g.

Exercice 3

Donnez le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - 1} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{2x + 1}$$

Exercice 4

Soient les fonctions $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x+1}$ et $h(x) = x+1$.

a) Donnez le domaine de définition de ces trois fonctions.
b) Calculez les points d'intersection de ces trois fonctions avec les axes du repère.
c) Donnez le tableau des signes de la fonction g.
d) Effectuez la division de polynômes et exprimez $g(x)$ sous la forme euclidienne.
e) Donnez les ensembles de départ et d'arrivée de f les plus grands possibles pour que f soit une bijection et calculez sa réciproque.
f) Calculez la composée $f \circ h$.

Exercice 5

Soit la fonction polynomiale $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$

a) A l'aide de la division polynomiale, montrez que $P(x)$ est divisible par $x-1$.
b) Factorisez au maximum $P(x)$.

Exercice 6

Résolvez les équations et inéquations suivantes dans l'ensemble des nombres réels, après avoir précisé leur domaine de définition, et donnez l'ensemble S des solutions.

a) $0,5x + 3 < -(1+2x)$

b) $\dfrac{2x+1}{x-2} - \dfrac{x-5}{x+2} = \dfrac{10x}{x^2-4}$

c) $-\dfrac{14x}{5} \geq \dfrac{3x}{20} - \dfrac{11}{10}$

d) $\dfrac{3-2x}{x-5} \leq 0$

e) $2x - \sqrt{4-9x^2} = 1$

f) $\log(2x-5) + \log(3x+7) = 4\log(2)$

Exercice 7

Un virus infectieux se développe au cours du temps suivant la loi exponentielle

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

où N_0 est le nombre initial de virus et t désigne le temps t.

a) Déterminez N_0 et a sachant qu'un échantillon sanguin contient 11'250 virus après 2 jours et 303'750 après 5 jours.

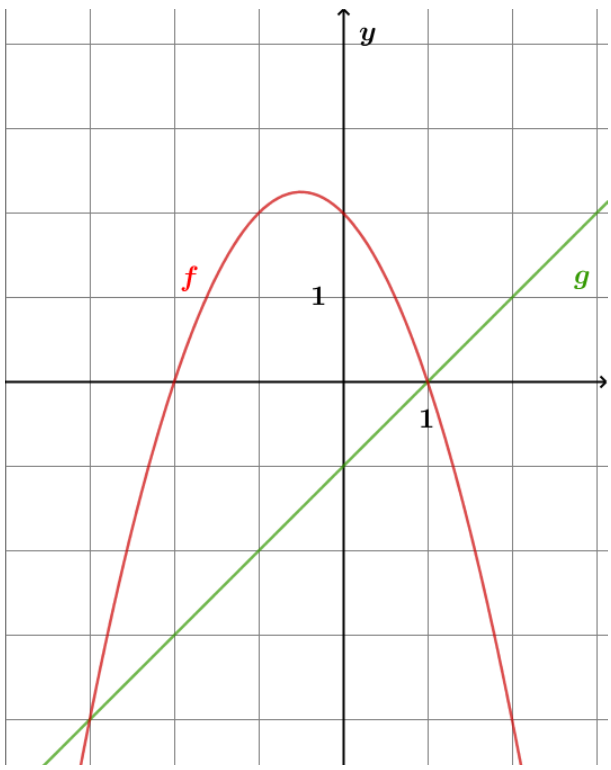
b) Sachant que ce virus devient dangereux lorsqu'il dépasse la concentration de 8 millions d'individus dans un échantillon sanguin, calculez le nombre de jours à partir duquel, dans la situation ci-dessus, le virus deviendra dangereux.

Exercice 8

Sur le repère ci-dessous, esquissez le graphe de :

a) la fonction produit $f \cdot g$

b) la fonction composée $f \circ g$



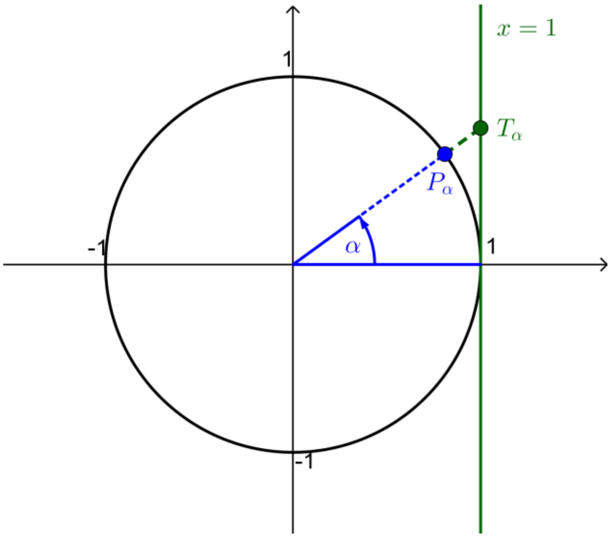
Indication : un tableau des valeurs peut être utile.

Exercice 9

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, un point P_α est donné. Sur la même représentation, le point T_α est donné.

a) Exprimez les coordonnées des points P_α et T_α en fonction de l'angle α .

b) Dessinez l'angle $-\alpha$ et le point M associé sur le cercle trigonométrique.
Placez les nombres $\cos(-\alpha)$ et $\sin(-\alpha)$ sur les axes appropriés.



c) Complétez les égalités suivantes par $\pm\cos(\alpha)$, $\pm\sin(\alpha)$ ou $\pm\tan(\alpha)$.

1) $\sin(\alpha+2\pi)=$
2) $\sin(\alpha+3\pi)=$
3) $\cos(\alpha-2\pi)=$
4) $\cos(\alpha-3\pi)=$
5) $\tan(\alpha+2\pi)=$
6) $\tan(\alpha+3\pi)=$

Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

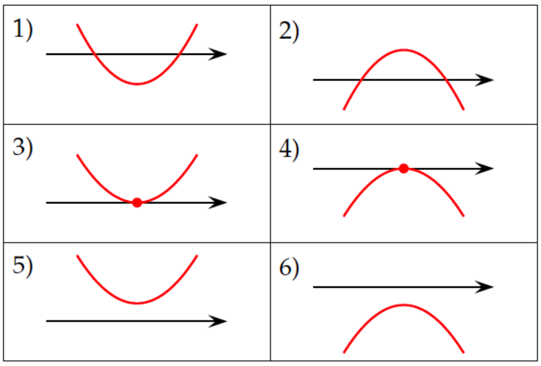
Exercices de préparation pour le test d'admission en Deuxième année – niveau normal (2MA1)

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1

$f(x) = -0,2x^2 - 6x - 50$
correspond à la situation 6) car la parabole est concave et son discriminant ($\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-0,2) \cdot (-50) = -4$) est négatif.

$g(x) = 2x^2 - 4x + 2$
correspond à la situation 3) car la parabole est convexe et son discriminant ($\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$) est nul.



Exercice 2

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4,5x+5=0$

Viète : $\Delta=0,25>0 \to 2$ solutions

$$x_1=\frac{-4,5-0,5}{2}=-2,5 \qquad x_2=\frac{-4,5+0,5}{2}=-2$$

$Z_f=\{-2,5;-2\}$

$g(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+6x+4=0 \Leftrightarrow 2(x^2+3x+2)=0 \Leftrightarrow 2(x+2)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=-1$

$Z_g=\{-2;-1\}$

b) $f(x)=(x+2,5)(x+2)$

$g(x)=2(x+2)(x+1)$

c) $f(x)=g(x)$

$\Leftrightarrow x^2+4,5x+5=2x^2+6x+4$

$\Leftrightarrow x^2+1,5x-1=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-0,5)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=0,5$

$f(-2)=0$

$f(0,5)=7,5$

$f\cap g$: $(-2;0)$ et $(0,5;7,5)$

Exercice 3

Fonction f

Valeurs interdites et domaine

$x=0$ ou $x^2-1=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

$D_f=\mathbb{R}^*\setminus\{-1;1\}$

Fonction g

Valeurs autorisées et domaine

$2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

$D_g=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice 4

a) $D_f = D_h = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Fonction f

$f \cap O_y$: $f(0) = 4$ Point d'intersection avec l'axe $O_y : (0;4)$

$f \cap O_x$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Point d'intersection avec l'axe $O_x : (2;0)$

Fonction g

$g \cap O_y : g(0) = -6$ Point d'intersection avec l'axe $O_y : (0;-6)$

$g \cap O_x : g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$

Point d'intersection avec l'axe $O_x : (-2;0)$ $(3;0)$

Fonction h

$h \cap O_y : h(0) = 1$ Point d'intersection avec l'axe $O_y : (0;1)$

$h \cap O_x : h(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Point d'intersection avec l'axe $O_x : (-1;0)$

c) Tableau des signes de g

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$(x-3)(x+2)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

d) Division polynomiale

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - x - 6 & \underline{x+1} \\
\underline{-x^2 - x} \quad & x - 2 \\
-2x - 6 & \\
\underline{2x + 2} & \\
-4 &
\end{array}
$$

Par conséquent $g(x) = x - 2 - \dfrac{4}{x+1}$

e) $f \ : \ [2;+\infty[\to \mathbb{R}_+$

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - y = 0$

Formule de Viète

$\Delta = 16 - 4(4 - y) = 4y$

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{4y}}{2} = 2 - \sqrt{y} \qquad x_2 = 2 + \sqrt{y}$

Par rapport aux ensembles de départ et d'arrivé de f, la réciproque de f est donnée par

${}^{r}f : \mathbb{R}_+ \to [2;+\infty[$

$x \mapsto 2 + \sqrt{x}$

f) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 - 4(x+1) + 4$

$= x^2 + 2x + 1 - 4x - 4 + 4 = x^2 - 2x + 1$

Exercice 5

a) Division polynomiale

$$
\begin{array}{llll|l}
4x^3 & & -3x & -1 & x-1 \\
\underline{-4x^3} & \underline{+4x^2} & & & 4x^2+4x+1 \\
 & 4x^2 & -3x & & \\
 & \underline{-4x^2} & \underline{+4x} & & \\
 & & x & -1 & \\
 & & \underline{-x} & \underline{+1} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Comme le reste de la division de $4x^3 - 3x - 1$ par $x - 1$ est nul,
$P(x)$ est divisible par $x - 1$ et on peut écrire $P(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 1)$.

b) $P(x) = (x-1)(2x+1)^2$

Exercice 6

a) $D = \mathbb{R}$

$0,5x + 3 < -(1 + 2x)$

$\Leftrightarrow 0,5x + 3 < -1 - 2x$

$\Leftrightarrow 2,5x < -4$

$\Leftrightarrow x < -\dfrac{8}{5}$

$S = \left]-\infty; -\dfrac{8}{5}\right[$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$$\frac{2x+1}{x-2} - \frac{x-5}{x+2} = \frac{10x}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x+2)-(x-5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{10x}{(x-2)(x+2)}$$

$$\overset{x\in D}{\Leftrightarrow} 2x^2+5x+2-x^2+7x-10 = 10x$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-4 \text{ ou } x=2 \notin D$$

$$S = \{-4\}$$

c) $D = \mathbb{R}$

$$-\frac{14x}{5} \geq \frac{3x}{20} - \frac{11}{10}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{56x}{20} - \frac{3x}{20} \geq -\frac{22}{20}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{59x}{20} \geq -\frac{22}{20}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{22}{20} \cdot \left(-\frac{20}{59}\right) = \frac{22}{59}$$

$$S = \left]-\infty; \frac{22}{59}\right]$$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$3-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{3-2x}{x-5}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$$S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \left]5; +\infty\right[$$

e) $4-9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-3x)(2+3x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ (parabole concave)

$D = \left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$

$2x - \sqrt{4-9x^2} = 1$

$\Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{4-9x^2}$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 4-9x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 = 4-9x^2$

$\Leftrightarrow 13x^2-4x-3=0$

Par la formule de Viète on trouve :

$x_1 = \frac{4-\sqrt{4\cdot 43}}{2\cdot 13} = \frac{2-\sqrt{43}}{13}$ et $x_2 = \frac{4+\sqrt{4\cdot 43}}{2\cdot 13} = \frac{2+\sqrt{43}}{13}$

$S = \left\{\frac{2-\sqrt{43}}{13};\frac{2+\sqrt{43}}{13}\right\}$

f) $2x-5>0$ et $3x+7>0$

$D = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$\log(2x-5)+\log(3x+7) = 4\log(2)$

$\Leftrightarrow \log\left[(2x-5)(3x+7)\right] = \log(2^4)$

$\Leftrightarrow (2x-5)(3x+7) = 16$

$\Leftrightarrow 6x^2-x-35=16$

$\Leftrightarrow 6x^2-x-51=0$

$\Leftrightarrow (6x+17)(x-3)=0 \Leftrightarrow x = \frac{17}{6} \notin D$ ou $x=3$

$S=\{3\}$

Exercice 7

a) Après 2 jours : $11'250 = N_0 \cdot a^2$ (1)

Après 5 jours : $303'750 = N_0 \cdot a^5$ (2)

De (1) :

$$N_0 = \frac{11'250}{a^2}$$

On substitue dans (2) :

$$303'750 = \frac{11'250}{a^2} \cdot a^5 \Leftrightarrow \frac{303'750}{11'250} = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$$

Finalement :

$$N_0 = \frac{11'250}{3^2} = 1'250$$

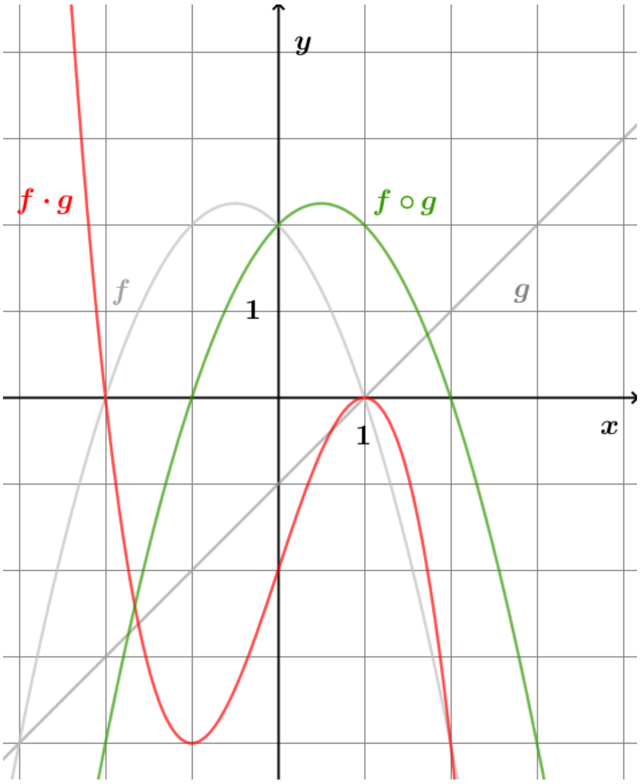
Et $N(t) = 1'250 \cdot 3^t$

b) $8 \cdot 10^6 = 1'250 \cdot 3^t \Leftrightarrow \dfrac{8 \cdot 10^6}{1'250} = 3^t \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{8 \cdot 10^6}{1'250}\right) = \log\left(3^t\right) \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{8 \cdot 10^6}{1'250}\right) = t \cdot \log(3)$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\log\left(\dfrac{8 \cdot 10^6}{1'250}\right)}{\log(3)} \cong 8 \text{ jours}$$

Dès le 8ème jour, le virus devient dangereux.

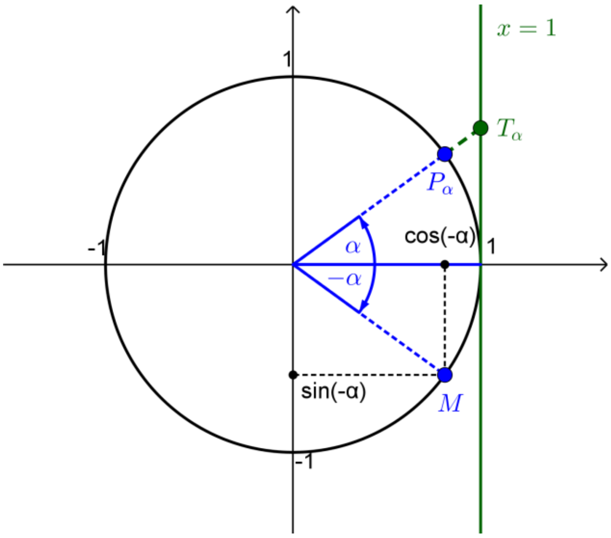
Exercice 8



Exercice 9

a) $P_\alpha\left(\cos(\alpha)\ ;\ \sin(\alpha)\right)$ et $T_\alpha\left(1\ ;\ \tan(\alpha)\right)$

b)



c)

1) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$

2) $\sin(\alpha + 3\pi) = -\sin(\alpha)$

3) $\cos(\alpha - 2\pi) = \cos(\alpha)$

4) $\cos(\alpha - 3\pi) = -\cos(\alpha)$

5) $\tan(\alpha + 2\pi) = \tan(\alpha)$

6) $\tan(\alpha + 3\pi) = \tan(\alpha)$