Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Première année – niveau normal (1MA1)

CHAMP DU TEST

ENONCE ET CORRIGE DES EXERCICES

(Document disponible sur le site internet du collège)

Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Première année – niveau normal (1MA1)

CHAMP DU TEST

Pour préparer le test d'admission de mathématiques, il appartient au candidat de regarder le champ des thèmes à connaître en se référant au plan d'études disponible sur le site internet du collège (voir « DEGRE PROPEDEUTIQUE »).

Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Première année – niveau normal (1MA1)

ENONCE DES EXERCICES

Références bibliographiques utiles

Vous pouvez consulter :

- l'ancien manuel de mathématiques utilisé au Cycle d'orientation :
  « Mathématiques 9^{e} – S, L, M, GnivA – NA », DIP Genève, 1995 ;
  cet ouvrage peut être téléchargé (au format pdf) sur le site internet du Collège pour adultes Alice-Rivaz ;
- les ouvrages édités par les Commissions romandes de mathématiques, de physique et de chimie (CRM), en particulier les ouvrages de la collection des monographies (voir notamment « Notions élémentaires »), ainsi que l'ouvrage « Formulaires et tables – Mathématiques, Physique, Chimie – CRM ».

Remarques sur le test

Durée :	105 minutes
Matériel autorisé :	« Formulaires et tables – Mathématiques, Physique, Chimie – CRM » (ouvrage personnel et non annoté) Calculatrice non programmable, non graphique et non communicante (matériel personnel)
Consignes :	Sauf indication contraire, un résultat, même juste, ne sera pris en considération que s'il est accompagné des justifications nécessaires. Une présentation soignée est exigée, ainsi qu'une rédaction à l'encre.

Remarques sur les exercices de préparation

N'oubliez pas d'indiquer vos étapes de calcul dans toutes les questions où une réponse immédiate n'est pas évidente. Ces exercices de préparation donnent une idée des questions susceptibles d'être posées dans le test d'admission. Vous devez être capable de tous les faire. Attention, la durée pour effectuer tous ces exercices dépasse la durée du test (ce dernier sera donc plus court).

Exercice 1

Calculez dans $\mathbb{R}$ sans utiliser la calculatrice et répondez sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{18}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$

b) $\dfrac{b}{a-\frac{b^2}{a}}$ si $a=\frac{3}{2}$ et $b=-0,25$

c) $x-(-x)^2$ si $x=-5$

Exercice 2

Calculez et réduisez les expressions suivantes.

a) $(b-3a)^2-(3a-b)\cdot(b+3a)$

b) $(x+2y)\cdot(x^2+4xy+4y^2)-(x-2y)\cdot(x^2+2xy+4y^2)$

c) $(m-3)\cdot(m+3)+(m-4)\cdot(m-3)$

Exercice 3

Factorisez au maximum si cela est possible, sinon notez « impossible ».

a) x^2+1

b) $x^4-7x^2-18=$

c) $xy^4-\frac{1}{8}x^4y$

d) $4x^2\cdot(4x+1)^2-2x^3\cdot(4x+1)$

e) $-50x^3-40x^2-8x$

f) $8x^3-12x^2+6x-1$

g) $6x^2-11x+3$

h) $8x^3-12x^2-2x+3$

i) $(x-2)^3-(x-2)$

j) $9x^2+15x-14$

k) $2x^2+5x+4$

l) $x^3+9x^2+27x+27$

m) x^6-9x^3+8

n) $x^3+7x^2+14x+8$

o) x^2+2x-1

Exercice 4

Résolvez les équations suivantes dans l'ensemble des nombres réels et donnez l'ensemble S des solutions.

a) $8+3\cdot(4x-5)=9x-(7-3x)$

b) $2x\cdot(x-1)\cdot(2x+3)=0$

c) $x^3+3x=3x^2+1$

d) $x^2-3x-18=9-x^2$

e) $\frac{2x-7}{3}-\frac{1+x}{6}=x-\frac{-x+10}{5}$

f) $10x=3x^3-x^2$

Exercice 5

Résolvez le système d'équation suivant et donnez l'ensemble S des solutions :

$$\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 6x+y=-6 \end{cases}$$

Exercice 6

Transformez les problèmes suivants en équation, puis répondez à la question posée.

a) Un enfant va cueillir des pommes. Il sait qu'il doit en donner le tiers à un ami et le quart du reste à son frère.
Combien doit-il en cueillir s'il veut conserver 12 pommes pour lui-même ?

b) Il y a 6 ans Pierre avait 4 fois l'âge de Julie. Dans 4 ans Pierre aura 2 fois l'âge de Julie. Quel âge ont-ils maintenant ?

Exercice 7

Calculez la hauteur d'un cylindre de révolution dont le rayon mesure 3 centimètres et dont le volume est de 2'826 centimètres cubes. Répondez au millimètre près.

Exercice 8

Une droite d passe par les points $A(-3;-10)$ et $B(5;6)$.

a) Calculez la pente de cette droite.
b) Calculez l'ordonnée à l'origine de cette droite.
c) Donnez l'équation de cette droite.
d) Quelle est la fonction dont le graphe est la droite d ?
e) Trouvez l'équation de la droite d' qui est parallèle à d et qui passe par le point $C(3;1)$.

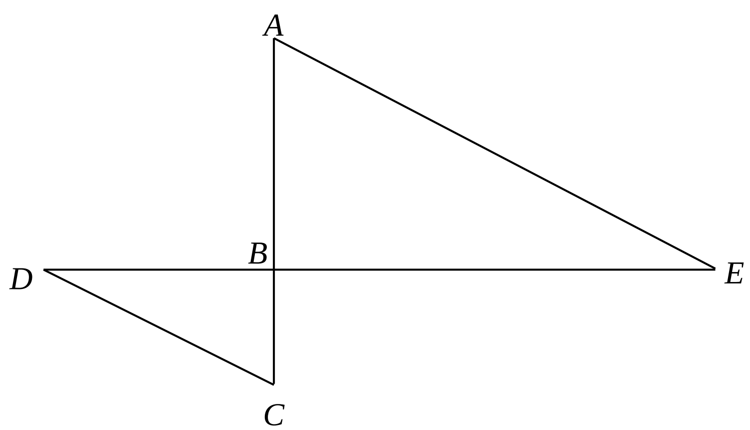
Exercice 9

Soit $f : x \to -x^2 + 7x - 10$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a) Calculez les points d'intersection du graphe de f avec l'axe horizontal (axe des abscisses). Vos réponses seront donc des couples.
b) Quel est le point d'intersection du graphe de f avec l'axe vertical (axe des ordonnées) ? Répondez par un couple.
c) Calculez les coordonnées du sommet du graphe de f.
d) Calculez l'image de –4 par f.
e) Calculez les préimages éventuelles de –4 par f.
f) Représentez f graphiquement en tenant compte des points calculés en a), b) et c).

Exercice 10

$\overline{AE} \,//\, \overline{CD}$
$\overline{AC} \perp \overline{DE}$
$\overline{BC} = 3$ [cm]
$\overline{BD} = 4$ [cm]
$\overline{BE} = 10$ [cm]



a) Montrez que les triangles ABE et BCD sont semblables.
b) Calculez $\overline{AB}$ et $\overline{AE}$.

Collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

Exercices de préparation pour le test d'admission en Première année – niveau normal (1MA1)

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{18}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{18}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$

b) $\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{3}{2}}}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{2}{3}}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{24}}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{36-1}{24}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{35}=-\frac{6}{35}$

c) $-5-(-(-5))^2=-5-25=-30$

Exercice 2

a) $(b-3a)^2-(3a-b)\cdot(b+3a)=b^2-6ab+9a^2-(9a^2-b^2)$

$=b^2-6ab+9a^2-9a^2+b^2=2b^2-6ab$

b) $(x+2y)\cdot(x^2+4xy+4y^2)-(x-2y)\cdot(x^2+2xy+4y^2)$

$=(x+2y)\cdot(x+2y)^2-(x^3-8y^3)$

$=(x+2y)^3-x^3+8y^3$

$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-x^3+8y^3=6x^2y+12xy^2+16y^3$

c) $(m-3)\cdot(m+3)+(m-4)\cdot(m-3)$

$=(m^2-9)+(m^2-7m+12)=2m^2-7m+3$

Exercice 3

a) Factorisation impossible de l'expression x^2+1 ; en effet, une expression de la forme a^2+b^2 n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
(autre justification possible : Viète : $\Delta = 0^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -4 < 0$: factorisation impossible par Viète dans $\mathbb{R}$)

b) $x^4 - 7x^2 - 18 = \left(x^2-9\right)\cdot\left(x^2+2\right) = (x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(x^2+2\right)$
Factorisation impossible de l'expression x^2+2 ; en effet, une expression de la forme a^2+b^2 n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$
(autre justification possible : Viète : $\Delta = 0^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = -8 < 0$: factorisation impossible par Viète dans $\mathbb{R}$)

c) $xy^4 - \frac{1}{8}x^4y = xy\left(y^3 - \frac{1}{8}x^3\right) = xy\left(y - \frac{1}{2}x\right)\left(y^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2\right)$

d) $4x^2\cdot(4x+1)^2 - 2x^3\cdot(4x+1) = 2x^2\cdot(4x+1)\cdot\left[2\cdot(4x+1)-x\right]$
$= 2x^2\cdot(4x+1)\cdot[8x+2-x] = 2x^2\cdot(4x+2)\cdot(7x+2)$

e) $-50x^3 - 40x^2 - 8x = -2x\cdot\left(25x^2+20x+4\right) = -2x\cdot(5x+2)^2$

f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x-1)^3$

g) $6x^2 - 11x + 3$
Viète : $\Delta = (-11)^2 - 4\cdot 6\cdot 3 = 49$
$x_{1,2} = \frac{11\pm 7}{12} \to x_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$
$6x^2 - 11x + 3 = 6\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right) = (3x-1)\cdot(2x-3)$

h) $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 4x^2\cdot(2x-3) - (2x-3)$
$= (2x-3)\cdot\left(4x^2-1\right) = (2x-3)\cdot(2x-1)\cdot(2x+1)$

i) $(x-2)^3 - (x-2) = (x-2)\cdot\left[(x-2)^2-1\right]$
$= (x-2)\cdot(x-2+1)\cdot(x-2-1) = (x-2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

j) $9x^2 + 15x - 14$
Viète : $\Delta = (15)^2 - 4\cdot 9\cdot(-14) = 729 > 0$
$x_{1,2} = \frac{-15\pm 27}{18} \to x_1 = -\frac{42}{18} = -\frac{7}{3}$ et $x_2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
$9x^2 + 15x - 14 = 9\cdot\left(x+\frac{7}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) = 3\cdot\left(x+\frac{7}{3}\right)\cdot 3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right) = (3x+7)\cdot(3x-2)$

k) $2x^2 + 5x + 4$
Viète : $\Delta = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 4 = -7 < 0$: factorisation impossible par Viète dans $\mathbb{R}$

l) $x^3+9x^2+27x+27=(x+3)^3$

m) $x^6-9x^3+8=\left(x^3-1\right)\cdot\left(x^3-8\right)=\left(x-1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x-2\right)\cdot\left(x^2+2x+4\right)$

n) $x^3+7x^2+14x+8=\left(x^3+8\right)+\left(7x^2+14x\right)=\left(x+2\right)\cdot\left(x^2-2x+4\right)+7x\cdot\left(x+2\right)$

$=\left(x+2\right)\cdot\left[\left(x^2-2x+4\right)+7x\right]=\left(x+2\right)\cdot\left(x^2+5x+4\right)=\left(x+2\right)\cdot\left(x+4\right)\cdot\left(x+1\right)$

o) x^2+2x-1

Viète : $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-1)=8>0$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}}{2\cdot1}\rightarrow x_1=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=-1+\sqrt{2}$

$x^2+2x-1=\left(x-\left(-1-\sqrt{2}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)=\left(x+1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+1-\sqrt{2}\right)$

Exercice 4

a) $8+3\cdot\left(4x-5\right)=9x-\left(7-3x\right)$

$\Leftrightarrow 8+12x-15=9x-7+3x\Leftrightarrow 12x-7=12x-7\Leftrightarrow 0x=0$

$S=\mathbb{R}$

b) $2x\cdot\left(x-1\right)\cdot\left(2x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow 2x=0$ ou $x-1=0$ ou $2x+3=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$ ou $x=-\dfrac{3}{2}$

$S=\left\{-\dfrac{3}{2};0;1\right\}$

c) $x^3+3x=3x^2+1$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=0\Leftrightarrow (x-1)^3=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

$S=\{1\}$

d) $x^2-3x-18=9-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-27=0$

Viète : $\Delta=9+216=225$

$x_1=\dfrac{3-15}{4}=-3 \qquad x_2=\dfrac{3+15}{4}=\dfrac{9}{2}$

$S=\left\{-3;\dfrac{9}{2}\right\}$

e) $\dfrac{2x-7}{3}-\dfrac{1+x}{6}=x-\dfrac{-x+10}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4x-14-1-x}{6}=\dfrac{5x+x-10}{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-15}{6}=\dfrac{6x-10}{5}$

$\Leftrightarrow 5\cdot(3x-15)=6\cdot(6x-10) \Leftrightarrow 15x-75=36x-60 \Leftrightarrow -21x=15$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{7}$

$S=\left\{-\dfrac{5}{7}\right\}$

f) $10x=3x^3-x^2$

$\Leftrightarrow 3x^3-x^2-10x=0$

$\Leftrightarrow x\cdot\left(3x^2-x-10\right)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $\left(3x^2-x-10\right)=0$

Viète (Δ=121) : $x_1=\dfrac{1-11}{6}=-\dfrac{5}{3}$ $\quad x_2=\dfrac{1+11}{6}=2$

$S=\left\{-\dfrac{5}{3};0;2\right\}$

Exercice 5

$$\begin{cases}-2x+3y=2\\ 6x+y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+9y=6\\ 6x+y=-6\end{cases} \overset{\textit{par addition}}{\Leftrightarrow} 10y=0 \Leftrightarrow y=0$$

On remplace y par 0 dans une des deux équations (par exemple la première) et on obtient :

$-2x+3\cdot 0=2 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$

Ainsi : $x=-1$ et $y=0$

$S=\{(-1;0)\}$.

Exercice 6

a) Soit x le nombre de pommes à cueillir.
Il donne le tiers à un ami :

$$\frac{1}{3}x$$

Il lui reste :

$$x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x$$

Il donne le quart du reste à son frère :

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}x$$

Equation et résolution :

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x+12=x$$

$$2x+x+72=6x \Leftrightarrow -3x=-72 \Leftrightarrow x=\frac{72}{3}=24$$

Réponse :
L'enfant doit donc cueillir 24 pommes.

b) Soit x l'âge actuel de Julie. Soit y l'âge actuel de Pierre.
Il y a 6 ans Pierre avait 4 fois l'âge de Julie :

$$(y-6)=4\cdot(x-6)$$

Dans 4 ans Pierre aura 2 fois l'âge de Julie :

$$(y+4)=2\cdot(x+4)$$

Système d'équations et résolution :

$$\begin{cases} y-6=4x-24 \\ y+4=2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-18 \\ y=2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow 4x-18=2x+4$$

$$\Leftrightarrow 2x=22 \Leftrightarrow x=11$$

$$y=2\cdot 11+4=26$$

Réponse :
Pierre a donc 26 ans et Julie 11 ans.

Exercice 7

$$V=\pi\cdot r^2\cdot h$$

Par conséquent, $h = \dfrac{V}{\pi\cdot r^2} = \dfrac{2826}{\pi\cdot 3^2} \cong 99{,}95 \ \left[\text{cm}\right]$

Réponse : la hauteur du cylindre est égale à 100 [cm] (=1 [m]).

Exercice 8

a) pente $= \dfrac{6-(-10)}{5-(-3)} = \dfrac{16}{8} = 2$

b) Soit $f(x)$ la fonction dont le graphe est la droite d

$f(x) = 2x + b,$ b étant l'ordonnée à l'origine

$f(5) = 6 \Leftrightarrow 2\cdot 5 + b = 6 \Leftrightarrow b = 6 - 10 = -4$

L'ordonnée à l'origine est -4.

c) $y = 2x - 4$

d) $f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x - 4$

e) d' est parallèle à d . Ces deux droites ont donc la même pente.

Equation de d' : $y = 2x + b'$

$1 = 2\cdot 3 + b' \Leftrightarrow b' = 1 - 6 = -5$

Réponse : $y = 2x - 5$

Exercice 9

a) Points d'intersection du graphe de f avec l'axe horizontal :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x^2 - 7x + 10\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x-5\right)\left(x-2\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ou} \quad x = 2$

On obtient les points d'intersection suivant de f avec l'axe horizontal :

$I\left(2;0\right)$ et $J\left(5;0\right)$

b) Point d'intersection du graphe de f avec l'axe vertical :

$f(0) = -0^2 + 7\cdot 0 - 10 = -10$

On obtient le point d'intersection suivant de f avec l'axe vertical :

$K\left(0;-10\right)$

c) Sommet du graphe de f

Coordonnées du sommet : $S\left(x_s; y_s\right) = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$x_s = -\frac{7}{2\cdot(-1)} = \frac{7}{2}$

$y_s = f\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7\cdot\frac{7}{2} - 10 = \frac{9}{4}$

$S\left(\frac{7}{2};\frac{9}{4}\right)$

d) $f\left(-4\right) = -(-4)^2 + 7\cdot(-4) - 10 = -54$

e) $f(x) = -4 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 10 = -4$

$\Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -\left(x^2 - 7x + 6\right) = 0$

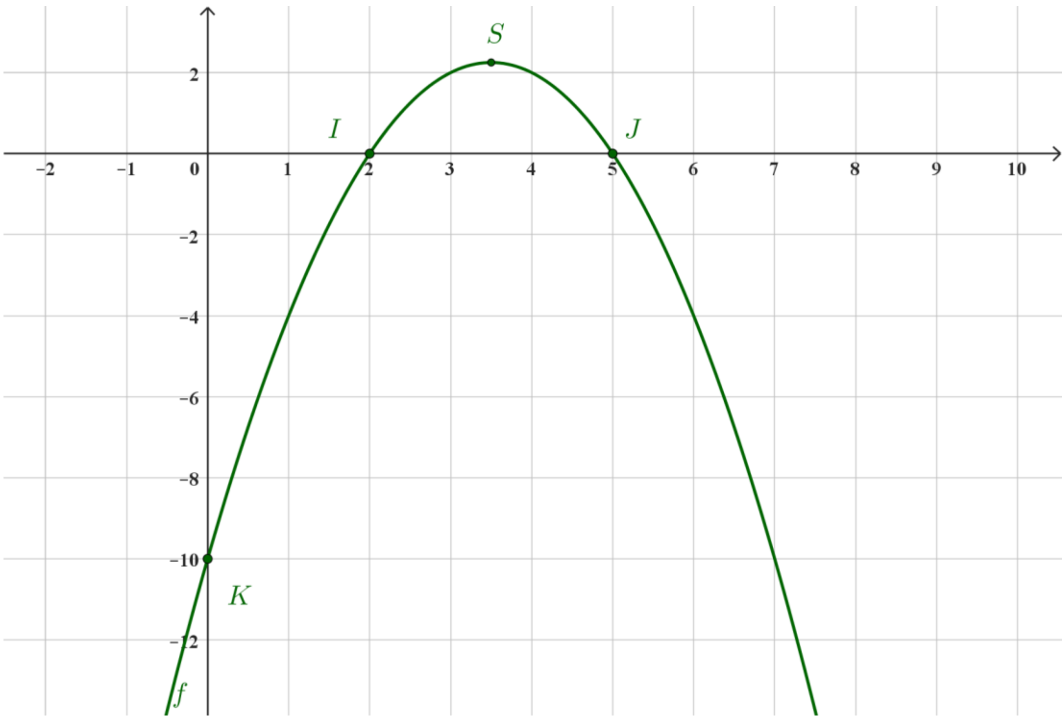
$\Leftrightarrow -\left(x-6\right)\left(x-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - 6 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 1$

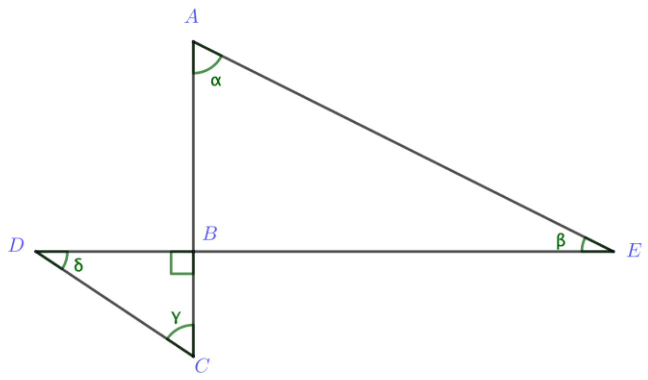
$f^{-1}\left(-4\right) = \{1;6\}$ ou Les préimages de -4 sont 1 et 6.

f)



Exercice 10

$\overline{AE} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AC} \perp \overline{DE}$
$\overline{BC} = 3$ [cm]
$\overline{BD} = 4$ [cm]
$\overline{BE} = 10$ [cm]



a) $\delta = \beta$ angles alternes – internes
$\alpha = \gamma$ idem
donc les triangles sont semblables.

b) Thalès :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{3 \cdot 10}{4} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ [cm]}$$

Pythagore :

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$$

$$\overline{AE}^2 = 7{,}5^2 + 10^2 = 156{,}25 \Leftrightarrow \overline{AE} = \sqrt{156{,}25} = 12{,}5 \text{ [cm]}$$