Collège pour adultes
Alice-Rivaz

Exercices d'entraînement et de préparation au test d'admission
Document disponible sur le site internet du collège pour adultes Alice-Rivaz

Mathématiques

entrée en 2e année

niveau normal (*)

Quelques références bibliographiques :

1. La collection "Fundamentum de mathématique" de la Commission Romande de Mathématique (CRM), en particulier
"Notions élémentaires", Monographie 27, 1e édition, 2005, Éditions G d'Encre

2. "Algèbre" - E.W. Swokowski et J.A. cole - Éditions LEP

3. *"Formulaires et tables Mathématiques, Physique, Chimie",* Editions G d'Encre
Collectif, Commissions romandes de Mathématiques, de Physique et de Chimie.

Matériel autorisé : Formulaires et tables de la Commission romande de Mathématiques (c.f. 3e référence bibliographique ci-dessus).
Sans annotations ajoutées.

Calculatrice personnelle non-programmable et non-communicante.

Remarques :

- N'oubliez pas d'indiquer vos étapes de calcul dans toutes les questions pour lesquelles une réponse immédiate n'est pas évidente.
- Ce « test d'entraînement » vous donne une idée du niveau d'exigence des questions susceptibles d'être posées dans le test d'admission en 2e année.
Cela vous prendra probablement plusieurs heures, mais vous devriez être capable de le faire entièrement. Toutefois, le test d'admission, qui ne dure, quant à lui « que » 105 minutes, sera bien entendu plus court.

(*) pour la préparation au test d'admission en niveau avancé de mathématiques, il appartient au candidat de compléter les notions manquantes en se référant au plan d'étude disponible sur le site internet du collège.

Question 1 :

Décidez à laquelle des 6 illustrations ci-contre le graphe des fonctions ci-dessous correspond (**Justifiez votre réponse)**

$f(x) = -0,2x^2 - 6x - 50$

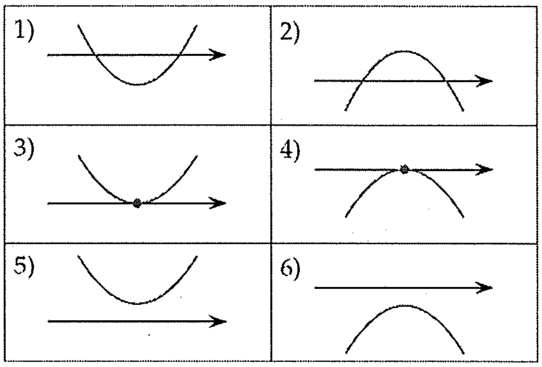
correspond à la situation ....

car :

$g(x) = 2x^2 - 4x + 2$

correspond à la situation ....

car :



Question 2 :

Soient les fonctions $f(x) = x^2 + 4,5x + 5$ et $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$

1. Calculez les zéros de f et de g, s'ils existent.
2. Factorisez les expressions algébrique de f et de g.
3. Trouvez les points d'intersection de f et g.

Question 3 :

Donnez le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - 1} \qquad g(x) = \sqrt{2x+1}$$

Question 4 :

Soient les fonctions : $f(x)=x^2-4x+4$ $\quad g(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+1}$ $\quad$ et $\quad h(x)=x+1$

1. Donnez le domaine de définition de ces trois fonctions
2. Calculez les points d'intersection de ces trois fonctions avec les axes du repère.
3. Donnez le tableau des signes de la fonction g.
4. Effectuez la division de polynômes et exprimez $g(x)$ sous la forme euclidienne.
5. Donnez les ensembles de départ et d'arrivée de f les plus grands possibles pour que f soit une bijection et calculez sa réciproque.
6. Calculez la composée $f \circ h$

Question 5 :

Soit la fonction polynômiale $P(x)=4x^3-3x-1$

1. A l'aide de la division polynomiale, montrer que $P(x)$ est divisible par $x-1$
2. Factoriser au maximum $P(x)$

Question 6 :

Résolvez les équations et inéquations suivantes après avoir précisé leur domaine de définition :

1. $0{,}5x+3<-(1+2x)$
2. $\dfrac{2x+1}{x-2}-\dfrac{x-5}{x+2}=\dfrac{10x}{x^2-4}$
3. $-\dfrac{14x}{5}\geq\dfrac{3x}{20}-\dfrac{11}{10}$
4. $\dfrac{3-2x}{x-5}\leq 0$
5. $2x-\sqrt{4-9x^2}=1$
6. $\log(2x-5)+\log(3x+7)=4\log(2)$

Question 7 :

Un virus infectieux se développe au cours du temps suivant la loi exponentielle :

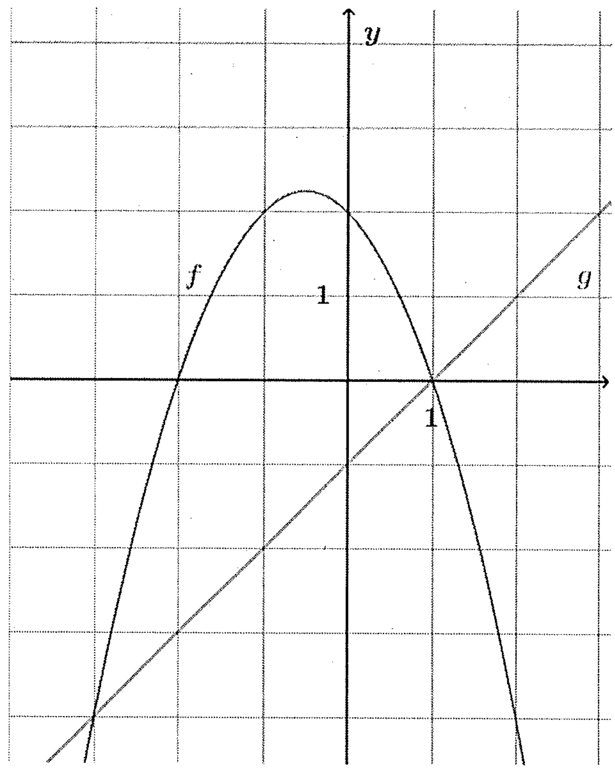
$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad \text{où } N_0 \text{ est le nombre initial de virus et } t \text{ désigne le temps}$$

1. Déterminez N_0 et a sachant qu'un échantillon sanguin contient 11'250 virus après 2 jours et 303'750 après 5 jours.
2. Sachant que ce virus devient dangereux lorsqu'il dépasse la concentration de 8 millions d'individus dans un échantillon sanguin, calculez le nombre de jours à partir duquel, dans la situation ci-dessus, le virus deviendra dangereux.

Question 8 :

Sur le repère ci-contre, esquissez le graphe de :

1. La fonction produit $f \cdot g$
2. La fonction composée $f \circ g$



Indication :

un tableau des valeurs peut-être utile.

Exercices d'entraînement et de préparation au test d'admission

Document disponible sur le site internet du collège pour adultes Alice-Rivaz

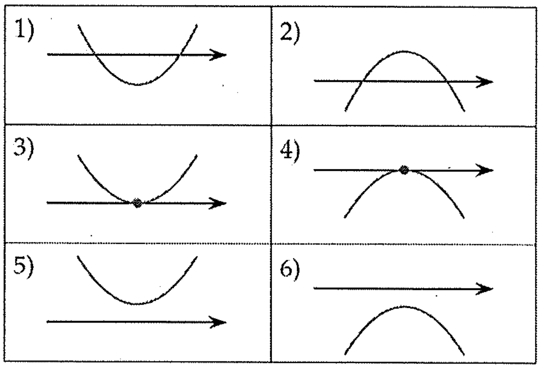
Mathématiques

entrée en 2e année

Corrigé

Question 1 :

<table>
<tr>
<td>$f(x) = -0{,}2x^2 - 6x - 50$

correspond à la situation 6) car la parabole est concave et son discriminant (Δ) est négatif.</td>
<td rowspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>$g(x) = 2x^2 - 4x + 2$

correspond à la situation 3) car la parabole est convexe et son discriminant est nul.</td>
</tr>
</table>

Question 2 :

Soient les fonctions $f(x) = x^2 + 4{,}5x + 5$ et $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4{,}5x + 5 = 0$

   Viète : $\Delta = 0{,}25 > 0 \rightarrow 2$ solutions

   $$x_1 = \frac{-4{,}5 - 0{,}5}{2} = -2{,}5 \qquad x_2 = \frac{-4{,}5 + 0{,}5}{2} = -2$$

   $Z_f = \{-2{,}5; -2\}$

   $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2(x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -1$

   $Z_g = \{-2; -1\}$

2. $f(x) = (x + 2{,}5)(x + 2)$ $\qquad$ $g(x) = 2(x+2)(x+1)$

3. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow$

$x^2+4{,}5x+5=2x^2+6x+4\Leftrightarrow$

$x^2+1{,}5x-1=0\Leftrightarrow$

$(x+2)(x-0{,}5)=0\Leftrightarrow x=-2$ *ou* $x=0{,}5$

$f(-2)=0 \qquad f(0{,}5)=7{,}5$

$f\cap g:(-2;0)\quad(0{,}5;7{,}5)$

Question 3 :

Fonction f :

Valeurs interdites :

$x=0$ *ou* $x^2-1=0\Leftrightarrow x=0$ *ou* $(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ *ou* $x=1$ *ou* $x=-1$

$D_f=IR\setminus\{-1;1\}$

Fonction g :

Domaine : $2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$ $\qquad D_g=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Question 4 :

Soient les fonctions : $f(x)=x^2-4x+4 \qquad g(x)=\frac{x^2-x-6}{x+1}$ et $h(x)=x+1$

1. $D_f=D_h=IR \quad D_g=IR\setminus\{-1\}$

2. Fonction f :

$f\cap O_y:\ f(0)=4$ Point d'intersection avec l'axe $O_y:(0;4)$

$f\cap O_x:\ f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Point d'intersection avec l'axe $O_x:(2;0)$

Fonction g:

$g\cap O_y:g(0)=-6$ Point d'intersection avec l'axe $O_y:(0;-6)$

$g\cap O_x:g(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)=0\Leftrightarrow x=3$ *ou* $x=-2$

Point d'intersection avec l'axe $O_x:(-2;0)\ \ (3;0)$

Fonction h:

$h\cap O_y:h(0)=1$ Point d'intersection avec l'axe $O_y:(0;1)$

$h\cap O_x:h(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Point d'intersection avec l'axe $O_x:(-1;0)$

3. Tableau des signes de g

	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$(x-3)(x-2)$	+	0	-	-	-	0	+
$x+1$	-	-	-	0	+	+	+
$g(x)$	-	0	+		-	0	+

4. Division polynomiale

$$\begin{array}{l|l} x^2-x-6 & \underline{x+1} \\ \underline{-x^2-x} & x-2 \\ \quad -2x-6 & \\ \quad \underline{\ \ 2x+2} & \\ \qquad -4 & \end{array}$$

Par conséquent $g(x)=x-2-\dfrac{4}{x+1}$

5. $f:\left[2;+\infty\right[\to IR_+$

$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-4x+4=y \Leftrightarrow x^2-4x+4-y=0$

Formule de Viète

$\Delta=16-4(4-y)=4y$

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{4y}}{2}=2-\sqrt{y} \qquad x_2=2+\sqrt{y}$

Par rapport aux ensembles de départ et d'arrivé de f, la réciproque de f est donnée par

$$\begin{aligned} {}^r f : IR_+ &\to \left[2;+\infty\right[\\ x &\mapsto 2+\sqrt{x} \end{aligned}$$

6. $\left(f\circ h\right)(x)=f(h(x))=f\left(x+1\right)=(x+1)^2-4(x+1)+4=x^2+2x+1-4x-4+4=x^2-2x+1$

Question 5 :

1. Division polynomiale

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 \qquad -3x-1 & \underline{x-1} \\ \underline{-4x^3+4x^2} & 4x^2+4x+1 \\ \quad 4x^2-3x & \\ \quad \underline{-4x^2+4x} & \\ \qquad\quad x-1 & \\ \qquad\quad \underline{-x+1} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Comme le reste de la division de $4x^3-3x-1$ par $x-1$ est nul, $P(x)$ est divisible par $x-1$ et on peut écrire $P(x)=(x-1)(4x^2+4x+1)$

2. $P(x)=(x-1)(2x+1)^2$

Question 6 :

Résolvez les équations et inéquations suivantes après avoir précisé leur domaine de définition :

1. $D=IR$

$$0{,}5x+3<-(1+2x)\Leftrightarrow$$
$$0{,}5x+3<-1-2x\Leftrightarrow$$
$$2{,}5x<-4\Leftrightarrow$$
$$x<-\frac{8}{5} \qquad S=\left]-\infty;-\frac{8}{5}\right[$$

2. $D=IR\setminus\{-2;2\}$

$$\frac{2x+1}{x-2}-\frac{x-5}{x+2}=\frac{10x}{x^2-4}\Leftrightarrow$$
$$\frac{(2x+1)(x+2)-(x-5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{10x}{(x-2)(x+2)}\overset{x\in D}{\Leftrightarrow}$$
$$2x^2+5x+2-x^2+7x-10=10x\Leftrightarrow$$
$$x^2+2x-8=0\Leftrightarrow$$
$$(x+4)(x-2)=0\Leftrightarrow x=-4 \text{ ou } \underset{\notin D}{x=2}$$
$$S=\{-4\}$$

3. $D=IR$

$$-\frac{14x}{5}\geq\frac{3x}{20}-\frac{11}{10}\Leftrightarrow$$
$$-\frac{56x}{20}-\frac{3x}{20}\geq-\frac{22}{20}\Leftrightarrow$$
$$-\frac{59x}{20}\geq-\frac{22}{20}\Leftrightarrow$$
$$x\leq-\frac{22}{20}\cdot\left(-\frac{20}{59}\right)=\frac{22}{59} \qquad S=\left]-\infty;\frac{22}{59}\right]$$

4. $D=IR\setminus\{5\}$

	$-\infty$	1,5		5	$+\infty$
$3-2x$	+	0	-	-	-
$x-5$	-	-	-	0	+
$g(x)$	-	0	+		+

$$S=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup\left]5;+\infty\right[$$

5. $D: 4-9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-3x)(2+3x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$ (parabole concave) $D=\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$

$$2x-\sqrt{4-9x^2}=1 \Leftrightarrow$$
$$2x-1=\sqrt{4-9x^2} \Leftrightarrow$$
$$(2x-1)^2=4-9x^2 \Leftrightarrow$$
$$4x^2-4x+1=4-9x^2 \Leftrightarrow$$
$$13x^2-4x-3=0$$

Par la formule de Viète on trouve : $x_1=\frac{4-\sqrt{4\cdot 43}}{2\cdot 13}=\frac{2-\sqrt{43}}{13}$ *et* $x_2=\frac{4+\sqrt{4\cdot 43}}{2\cdot 13}=\frac{2+\sqrt{43}}{13}$

$$S=\left\{\frac{2-\sqrt{43}}{13};\frac{2+\sqrt{43}}{13}\right\}$$

6. $D: 2x-5>0$ *et* $3x+7>0$ $D=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$$\log(2x-5)+\log(3x+7)=4\log(2) \Leftrightarrow$$
$$\log\left[(2x-5)(3x+7)\right]=\log(2^4) \Leftrightarrow$$
$$(2x-5)(3x+7)=16 \Leftrightarrow$$
$$6x^2-x-35=16 \Leftrightarrow$$
$$6x^2-x-51=0 \Leftrightarrow$$
$$(6x+17)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\notin D \text{ ou } x=3 \qquad S=\{3\}$$

Question 7 :

Un virus infectieux se développe au cours du temps suivant la loi exponentielle :

$N(t)=N_0\cdot a^t$ où N_0 est le nombre initial de virus et t désigne le temps

1. Après 2 jours : $11'250=N_0\cdot a^2$ (1)

   Après 5 jours : $303'750=N_0\cdot a^5$ (2)

   De (1) : $N_0=\frac{11'250}{a^2}$. On substitue dans (2) : $303'750=\frac{11'250}{a^2}\cdot a^5 \Leftrightarrow \frac{303'750}{11'250}=a^3 \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{27}=3$

   Finalement : $N_0=\frac{11'250}{3^2}=1'250$ et $N(t)=1'250\cdot 3^t$

2. $8\cdot 10^6=1'250\cdot 3^t \Leftrightarrow \frac{8\cdot 10^6}{1'250}=3^t \Leftrightarrow \log\left(\frac{8\cdot 10^6}{1'250}\right)=\log\left(3^t\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{8\cdot 10^6}{1'250}\right)=t\cdot\log\left(3\right) \Leftrightarrow t=\frac{\log\left(\frac{8\cdot 10^6}{1'250}\right)}{\log(3)}\cong 8\,\textit{jours}$

   Dès le 8ème jour, le virus devient dangereux.

Question 8 :