REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE — Année scolaire 2020-2021
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

Discipline : MATHÉMATIQUES
Epreuve Semestrielle

Semestre :	**1er**
Date :	**17 Decembre 2020**
Durée de l'épreuve :	**100'**
Nombre de pages :	**3** *(y compris la page d'en-tête)*

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
2MA2.DF01	17	C. CRETTAZ
2MA2.DF02	17	S. PICCHIONE
2MA2.DF03	14	M. SCHIESS
2MA2.DF04	16	C. SCRUCCA

Documents/Matériels autorisés :

- Table CRM non annotée : marque-pages et surlignage acceptés
- Calculatrice agréée TI30 et TI34 sauf modèles Pro

Nom et prénom : **Groupe :**

Exercice	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	4	4	8	15	10	14	55
Obtenu :							

Informations aux élèves :

- Sur la première page des feuilles d'épreuve, se limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline. Commencer la rédaction des exercices à la page suivante.
- Numéroter chaque page de l'épreuve et indiquer votre nom sur chaque feuille.
- Rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve en annotant votre nom et numéro de groupe.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type un "nombre" ou "oui/non" ne rapportent aucun point.

Question 1 *(4 points)*

Soient les polynômes $A(x) = 4x^3 + 8x + 1$ et $B(x) = x^2 + 2x + 1$.

(a) *(3 pts)* Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

(b) *(1 pts)* Écrire l'égalité fondamentale de la division euclidienne effectuée en (a).

Question 2 *(4 points)*

Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 satisfaisant simultanément les 3 conditions suivantes :

- $P(x)$ est divisible par $(2x - 1)$;
- 3 est une racine de $P(x)$;
- 0 est une racine de multiplicité 2 de $P(x)$;
- $P(1) = 5$.

Question 3 *(8 points)*

Soit le polynôme $P(x) = 6x^4 + 19x^3 - 4x^2 - 31x + 10$.

(a) *(7 pts)* Factoriser complètement $P(x)$;

(b) *(1 pts)* Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Question 4 *(15 points)*

(a) *(6 pts)* Après avoir donné le domaine de définition, résoudre l'équation

$$\frac{6}{x+2} - \frac{3x-2}{x+1} = \frac{5}{x^2+3x+2}.$$

(b) *(9 pts)* Après avoir donné le domaine de définition, résoudre l'inéquation

$$\frac{1}{x^3} - \frac{x+1}{x^4-x^3} \leqslant \frac{3}{x^4-2x^3+x^2}.$$

Question 5 *(10 points)*

Soit les fonctions f, g, h et j définies respectivement par :

$$f\left(x\right) = 2x - 1 \qquad g\left(x\right) = \frac{2}{x-1} \qquad h\left(x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad j\left(x\right) = \frac{6x+5}{3x+2}$$

(a) *(4 pts)* Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f \circ g \circ f$ et simplifier au maximum le résultat.

(b) *(2 pts)* La fonction h est-elle la fonction réciproque de f ? Justifier par un calcul.

(c) *(4 pts)* Calculer l'expression algébrique de la réciproque de la fonction j.

Question 6 *(14 points)*

Soit la fonction $f : A \longrightarrow B$ définie par $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

(a) *(4 pts)* Exprimer la fonction f comme une composition de fonctions élémentaires.

(b) *(2 pts)* Déterminer un ensemble A et un ensemble B (maximaux) tels que la fonction f : $A \longrightarrow B$ soit une bijection.

(c) *(3 pts)* Déterminer la réciproque de la fonction f en précisant les ensembles de départ et d'arrivée de cette réciproque.

(d) *(5 pts)* Tracer dans le même repère orthonormé la fonction f, sa réciproque ${}^r f$(notée aussi f^{-1}), ainsi que la fonction identité i.

Fin de l'épreuve. Bonne relecture.

Correction exercice 1 (4 points)

(3) a)

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{4x^3 + 8x + 1}^{A(x)} & \overbrace{x^2+2x+1}^{B(x)} \\ \cline{2-2} -(4x^3 + 8x^2 + 4x) & 4x - 8 = Q(x) \\ \hline -8x^2 + 4x + 1 & \\ -(-8x^2 - 16x - 8) & \\ \hline 20x + 9 = R(x) & \end{array}$$

(1) b) $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad 0 \leq \deg(R) < \deg(B)$

$$= (x^2+2x+1)(4x-8) + 20x+9$$

Correction exercice 2 (4 points)

(2) $P(x) = \alpha \cdot x^2 (2x-1)(x-3) \qquad \alpha \in \mathbb{R}^*$

Mais $P(1) = 5$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1^2 \cdot (1) \cdot (-2) = 5$

(1) $\Leftrightarrow \alpha = -5/2$

(1) Donc $P(x) = -\frac{5}{2}(2x-1)(x-3) \cdot x^2$

---

aussi $P(x) = (-5) \cdot x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3)$

Correction exercice 3 (8 points)

a) **Methode 1**

(1) Par tâtonnement on trouve $P(1)=0$ et $P(-2)=0$

(1) On peut donc écrire $P(x) = \underbrace{(x-1)(x+2)}_{=x^2+x-2} \cdot Q(x)$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par x^2+x-2 avec un reste $R(x)=0$:

(2)

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4+19x^3-4x^2-31x+10 & x^2+x-2 \\
\hline
-(6x^4+6x^3-12x^2) & 6x^2+13x-5 \\
\quad 13x^3+8x^2-31x+10 & \\
\quad -(13x^3+13x^2-26x) & \\
\qquad -5x^2-5x+10 & \\
\qquad -(-5x^2-5x+10) & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow P(x) = (x+2)(x-1)\underbrace{(6x^2+13x-5)}$

(2)
$\Delta = 13^2 - 4\cdot 6(-5) = 289 > 0$

$\Rightarrow$ factorisable avec Viète

$x_{1,2} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{289}}{2\cdot 6}$ $\nearrow \frac{1}{3}$ $\searrow -\frac{5}{2}$

(1) $\Rightarrow P(x) = (x+2)(x-1)\,6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$= (x+2)(x-1)(3x-1)(2x+5)$

Methode 2

(2) • $P(1)=0 \overset{\text{D.N.E.}}{\Leftrightarrow} P(x) = (x-1)\underbrace{(6x^3+25x^2+21x-10)}_{Q(x)}$

(2) • $P(-2)=Q(-2)=0 \overset{\text{D.N.E.}}{\Leftrightarrow} P(x) = (x-1)(x+2)(6x^2+13x-5)$

(2) • Viète : $\Delta = 289 > 0$ $x_{1,2} < \begin{smallmatrix} 1/3 \\ -5/2 \end{smallmatrix}$

(1) $P(x) = (x-1)(x+2)\,6\left(x-1/3\right)\left(x+5/2\right)$

(1) b) $P(x)=0$ $S = \{-5/2 ; -2 ; 1/3 ; 1\}$

Correction exercice 4 (6+9=15 points)

a) $\dfrac{6}{x+2} - \dfrac{3x-2}{x+1} = \dfrac{5}{x^2+3x+2}$

(1) $\iff \dfrac{6}{x+2} - \dfrac{3x-2}{x+1} - \dfrac{5}{(x+1)(x+2)} = 0$

(1) Dom $= \mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$

(1) PPCM $\iff \dfrac{6(x+1)-(3x-2)(x+2)-5}{(x+2)(x+1)} = 0$

$\iff 6x+6-(3x^2+6x-2x-4)-5=0$

(1) $\iff -3x^2+2x+5=0$

(1) Avec Viète : $\Delta = 2^2-4(-3)\cdot 5 = 64 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2\pm 8}{2(-3)}$ → $5/3 \in$ Dom ; $-1 \notin$ Dom

(1) $S = \{5/3\}$

b) $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{x+1}{x^4-x^3} \leq \dfrac{3}{x^4-2x^3+x^2}$

$\iff \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{x+1}{x^3(x-1)} - \dfrac{3}{x^2(x^2-2x+1)} \leq 0$

(1) $\iff \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{x+1}{x^3(x-1)} - \dfrac{3}{x^2(x-1)^2} \leq 0$

(1)
(1) PPCM $\iff \dfrac{1\cdot(x-1)^2-(x+1)(x-1)-3x}{x^3(x-1)^2} \leq 0$ Dom $= \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

$\iff \dfrac{x^2-2x+1-x^2+1-3x}{x^3(x-1)^2} \leq 0$

(1) $\iff \underbrace{\dfrac{-5x+2}{x^3(x-1)^2}}_{F(x)} \leq 0$

(4) Tableau des signes :

		0		$2/5$		1	
$-5x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$F(x)$	$-$	$\notin\mathbb{R}$	$+$	0	$-$	$\notin\mathbb{R}$	$-$

(1) $S =]-\infty;0[\cup [2/5;1[\cup]1;+\infty[$

Correction exercice 5 (10 points)

(4) a) $(f\circ g\circ f)(x) = f(g(f(x)))$

$= f(g(2x-1))$

$= f\left(\dfrac{2}{(2x-1)-1}\right) = f\left(\dfrac{2}{2x-2}\right)$

$= 2\cdot\left(\dfrac{2}{2x-2}\right) - 1 = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{1}$

$= \dfrac{2-1(x-1)}{x-1} = \dfrac{-x+3}{x-1}$

(2) b) A verifier que: $h\circ f = i$ ou $f\circ h = i$

- $(h\circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x-1)$

$= \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}$

$= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x = i(x)$

- h est bien la réciproque de f car $h\circ f = i$ (aussi $(f\circ h)(x) = i(x)$)

(4) c) $j(x) = \dfrac{6x+5}{3x+2}$

- Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} \overset{A(x)}{6x+5} & \overset{B(x)}{3x+2} \\ \hline -(6x+4) & 2 = Q(x) \\ \hline 1 = R(x) & \end{array}$$

$\Leftrightarrow y = 2 + \dfrac{1}{3x+2}$

$\Leftrightarrow y-2 = \dfrac{1}{3x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y-2} = 3x+2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y-2} - 2 = 3x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{y-2} - 2\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3y-6} - \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2y+5}{3y-6} \Leftrightarrow j^{-1}(y) = \dfrac{-2y+5}{3y-6}$

Correction exercice 6 (14 points)

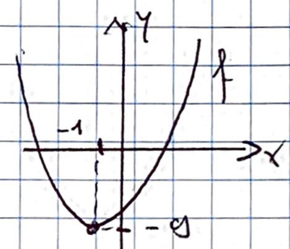
(4) a) Complétion du carré :

$f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x^2 + 2x + 1) - 8 - 1$

$= (x+1)^2 - 9$ (de la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$)

Si $f_1(x) = x + 1$; $f_2(x) = x^2$; $f_3(x) = x - 9$

alors $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$



(2) b) Sommet : $S(h;k) = (-1;-9)$

parabole convexe $a > 0$

- Cas 1 : f est bijective de $A_1 =]-\infty;-1]$ vers $[-9;+\infty[= B$

ou

- Cas 2 : f " " " $A_2 = [-1;+\infty[$ vers $[-9;+\infty[= B$

(3) c) $y = (x+1)^2 - 9 \Leftrightarrow y + 9 = (x+1)^2$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{y+9} = x + 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y+9} - 1$

- Cas 1 : $f^{-1}(y) = -\sqrt{y+9} - 1$ de B vers A_1

ou

- Cas 2 : $f^{-1}(y) = \sqrt{y+9} - 1$ de B vers A_2

(5) d)

Graphique de f, f^{-1} et i