ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021

Collège Sismondi

Semestre : 1
Date : Jeudi 10 décembre 2020
Durée de l'épreuve : 200'
Nombre de pages de l'énoncé (y compris la page d'en-tête) : 4

Discipline : Mathématiques......................................

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
4MA1.DF01	24	S. PICCHIONE
4MA1.DF02	24	T. ZWISSIG / G. GANDOLFI
4MA1.DF03	24	T. ZWISSIG / G. GANDOLFI
4MA1.DF04	24	M. SAN MILLAN
4MA1.DF05	24	S. PICCHIONE
4MA1.DF06	19	S. EZAHR

Documents autorisés	
a) **mis à disposition par le collège** : (description précise et nombre, etc.)	b) **personnels à l'élève** :
	Calculatrice agréée non programmable (TI30 ou TI34 sauf modèle PRO)
	Table CRM non annotée, seuls les maques-pages et surlignages sont autorisés

Informations pour les maîtres-surveillants
Merci de vérifier que les tables numériques et les calculatrices soient conformes.

Nom, Prénom du candidat : .... Groupe : ....

Informations aux élèves :

1. Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
2. Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
3. N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.
4. Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
5. Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs, les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne rapportent aucun point.

	Ex. n°1	Ex. n°2	Ex. n°3	Ex. n°4	Ex. n°5	Ex. n°6	Ex. n°7	Ex. n°8	Total
Points	26	12	15	7	14	7	7	12	100
Vos points									

Exercice 1 : (26 points) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{4(x+2)}$.

a) (*1 pt*) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

b) (*3 pts*) Déterminer les zéros et l'ordonnée à l'origine de la fonction f. En déduire les coordonnées des éventuels points d'intersection du graphe de f avec les axes Ox et Oy.

c) (*5 pts*) Déterminer les équations de toutes les asymptotes de la fonction f. Justifier par des calculs.

d) (*3 pts*) Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à l'éventuelle asymptote horizontale ou oblique de la fonction f en utilisant un tableau des signes.

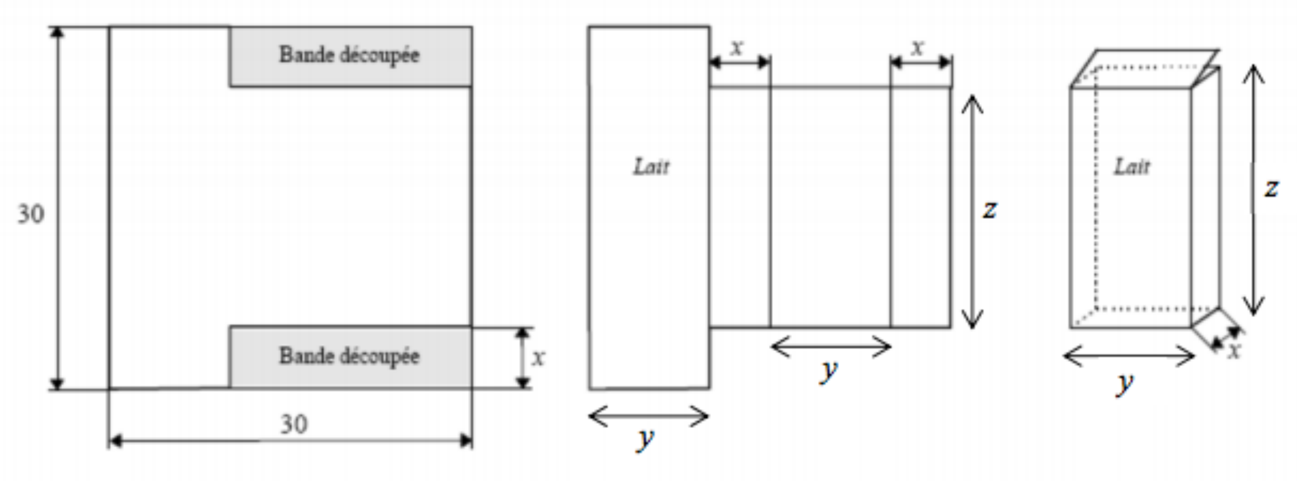
e) (*3 pts*) Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{4(x+2)^2}$.

f) (*4 pts*) Établir le tableau des variations de f en précisant les coordonnées des éventuels extremums.

g) (*2 pts*) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = -4$.

h) (*5 pts*) Représenter graphiquement, dans un même repère, la fonction f, ses asymptotes et la tangente en tenant compte de tous vos résultats précédents (prendre 2 carreaux = 1 unité).

Exercice 2 : (12 points) Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir illustration ci-dessous).
Le côté de la feuille carrée mesure *30 cm* et on désigne par x la mesure en *cm* de la largeur des bandes découpées.



a) (*4 pts*) Montrer que le volume V de la brique de lait en fonction de x est donné par $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

b) (*7 pts*) Déterminer les dimensions de la brique (longueur, largeur et hauteur) en *cm* afin que le volume soit maximal. Résoudre le problème à l'aide du calcul différentiel.

c) (*1 pt*) Déterminer ce volume maximal en litres.

Exercice 3 : (15 points) Soit la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{18}x^3 + 2x$.

a) (*3 pts*) Calculer les zéros de la fonction f.

b) (*1 pt*) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

c) (*4 pts*) Établir le tableau des variations de f en précisant les coordonnées des éventuels extremums.

d) (*2 pts*) Tracer la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.

e) (*3 pts*) Calculer l'aire du domaine borné D délimité par la représentation graphique de f, l'axe Ox et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 6$.

f) (*2 pts*) Calculer la valeur moyenne $\mu = f(c)$ de f sur l'intervalle $[1; 6]$ et représenter le rectangle de côtés $\mu = f(c)$ et $b - a$.

Exercice 4 : (7 points) Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(5x) - 2x^2 + 4$.

a) (*1 pt*) Déterminer le domaine de définition de la fonction g.

b) (*2 pts*) Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x} - 4x$.

c) (*3 pts*) Établir le tableau des variations de g.

d) (*1 pt*) Déterminer le ou les intervalles sur lesquels la fonction g est croissante.

Exercice 5 : (14 points)

A) Déterminer une primitive F de la fonction f lorsque celle-ci est définie par :

a) (*2 pts*) $f(x) = (5x + 2)^7$

b) (*2 pts*) $f(x) = (1 + \sin(x))^3 \cos(x)$

c) (*2 pts*) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

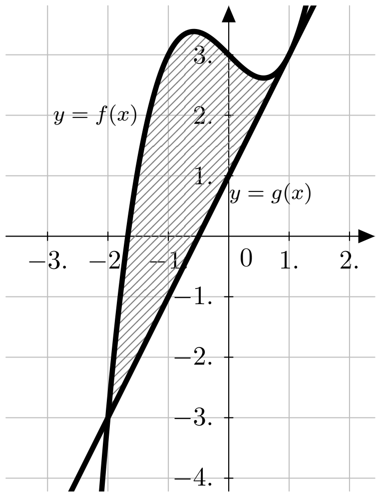
B) Calculer en valeurs exactes les intégrales définies suivantes :

a) (*3 pts*) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin(x) + \cos(x))dx$

b) (*2 pts*) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^x dx$

c) (*3 pts*) $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{2x - 1}dx$

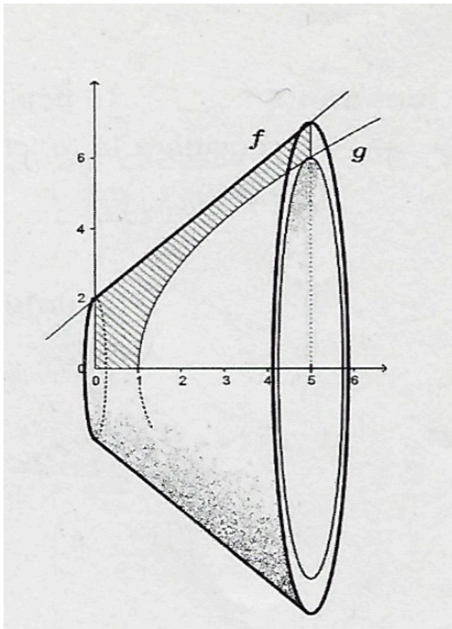
Exercice 6 : (7 points) Soit f et g deux fonctions définies respectivement par $f(x) = x^3 - x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$.



a) (*3 pts*) Calculer les coordonnées des points d'intersection du graphe de f avec celui de g.

b) (*4 pts*) Calculer l'aire de la surface plane hachurée délimitée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

Exercice 7 : (7 points) Un archéologue a découvert la coupe ci-contre dans un site sous-marin en Méditerranée. Il souhaite calculer le volume de matière qui constitue cette pièce, sachant qu'il s'agit d'un corps de révolution (données en cm).



Les fonctions f et g délimitant l'objet sont définies respectivement par : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = 3\sqrt{x - 1}$.

Exprimer le volume engendré par la rotation de la surface hachurée autour de l'axe Ox à l'aide d'intégrales, puis calculer ce volume en donnant tous les détails de ces calculs.

Exercice 8 : (12 points) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) (*3 pts*) Soit une fonction continue f sur $[a; b]$. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ alors $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\, dx = 0$.

b) (*3 pts*) Les fonctions F et G définies respectivement par $F(x) = \cos^2(x)$ et $G(x) = -\sin^2(x)$ sont deux primitives d'une même fonction.

c) (*3 pts*) Toute fonction intégrable possède une unique primitive.

d) (*3 pts*) Le résultat du calcul d'une intégrale est toujours positif.

Fin de l'épreuve

Correction exercice 1 (26 points)

$$f(x) = \frac{x^2-6x}{4(x+2)} \quad \left(= \frac{A(x)}{B(x)} \right)$$

(1) a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ car $4(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$

(2) b) • Zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$

$f \cap Ox = \{(0;0) ; (6;0)\}$

(1) • Ordonnée à l'origine : $f(0) = 0$

$f \cap Oy = \{(0;0)\}$

c) Asymptotes

(1) • $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \frac{16}{0^+} = +\infty$

(1) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \frac{16}{0^-} = -\infty$

$\Big\}$ AV en $x = -2$

(3)

$$\begin{array}{r|l} \overbrace{x^2 - 6x}^{A(x)} & \overbrace{4x + 8}^{B(x)} \\ \cline{2-2} -(x^2 + 2x) & \frac{1}{4}x - 2 = Q(x) \\ \hline -8x & \\ -(-8x - 16) & \\ \hline 16 = R(x) & \end{array}$$

donc A.O en $\pm\infty$:

$Q(x) = \frac{1}{4}x - 2$

(3) d) $f(x) - Q(x) = \frac{R(x)}{B(x)} = \frac{16}{4x+8}$

x		-2	
$f-Q$	$-$	$\notin \mathbb{R}$	$+$

(3) e) $f'(x) = \left(\frac{x^2-6x}{4(x+2)}\right)' = \frac{(x^2-6x)'(4(x+2)) - (x^2-6x)(4(x+2))'}{(4(x+2))^2}$

$= \frac{(2x-6)(4(x+2)) - (x^2-6x)4}{16(x+2)^2} = \frac{4x^2+16x-48}{16(x+2)^2}$

$= \frac{\cancel{4}(x^2+4x-12)}{\cancel{4} \cdot 4(x+2)^2}$

Suite exercice 1

f) $f'(x) = \dfrac{(x+6)(x-2)}{4(x+2)^2}$

Tableau des variations :

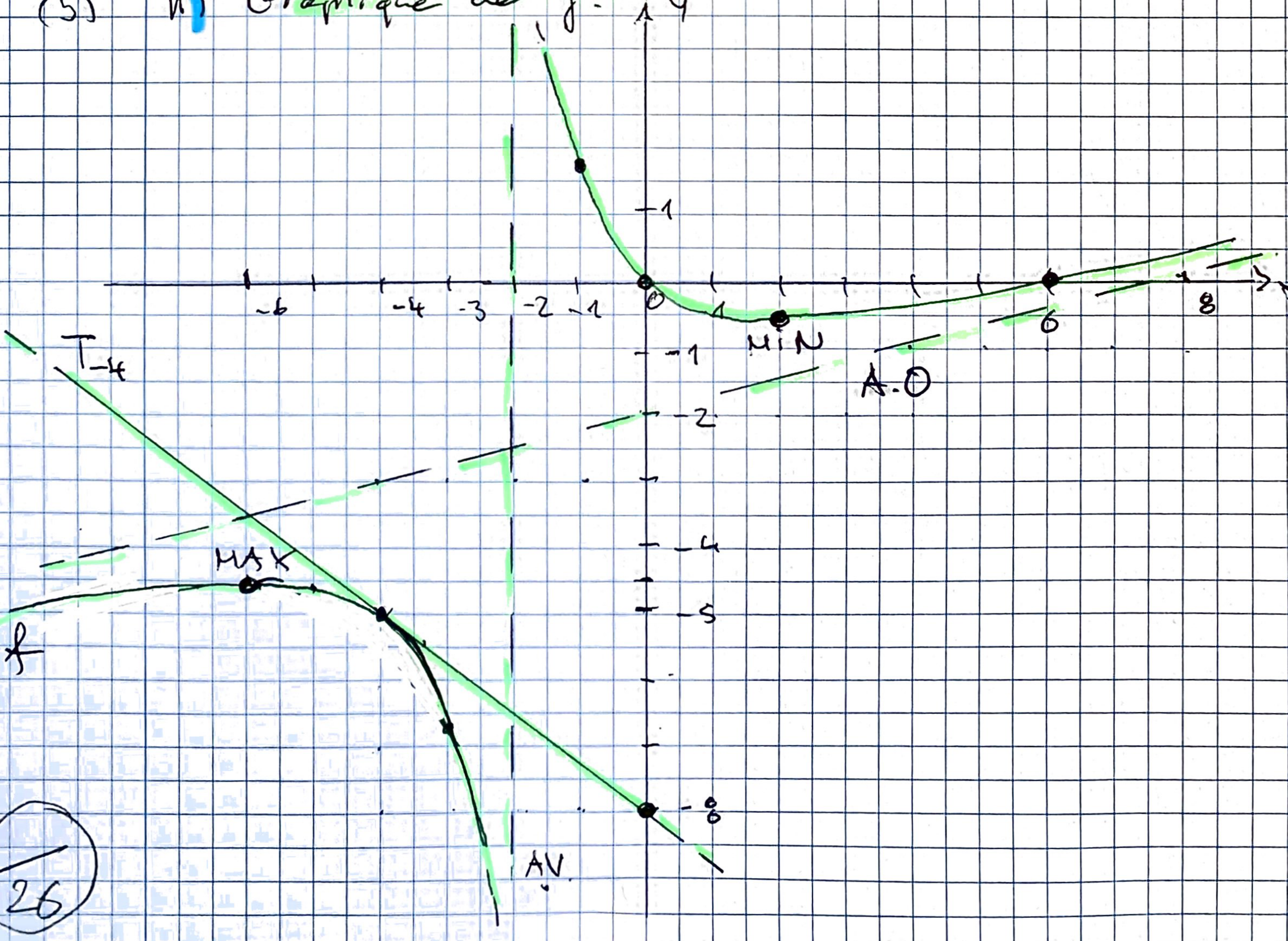
(1)

x		-6		-2		2	
$x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
(1) $f'(x)$	$+$	0	$-$	$\notin \mathbb{R}$	$-$	0	$+$
(1) $f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\notin \mathbb{R}$ A.V.	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

(1) MAX $(-6; f(-6)) = (-6; -4{,}5)$
MIN $(2; f(2)) = (2; -0{,}5)$

(2) g) $T_{-4}(x) = f'(4)(x-4) + f(4) = -\frac{3}{4}(x+4) - 5 = -\frac{3}{4}x - 8$

(5) h) Graphique de f :



/26

Correction exercice 2 (12 points)

a) • Déclaration des variables :

x = largeur de la brique en cm $x \in]0;15[$

y = longueur " " " " "

z = hauteur " " " " "

V = volume " " " en cm^3

• Constantes : longueur et largeur du carton = 30 cm

• Liens entre les var. et les cte :

(1) (I) $V(x;y;z) = x \cdot y \cdot z$

(1) (II) $2x + 2y = 30 \Rightarrow y = 15 - x$

(1) (III) $2x + z = 30 \Rightarrow z = 30 - 2x$

(1) (II) et (III) → (I) $V(x) = x(15-x)(30-2x)$

$= (15x - x^2)(30 - 2x)$

$= 2x^3 - 60x^2 + 450x$

b) • Calcul de la dérivée :

(1) $V'(x) = (2x^3 - 60x^2 + 450x)' = 6x^2 - 120x + 450$

(2) • $V'(x) = 0 \overset{:6}{\Leftrightarrow} x^2 - 20x + 75 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-15) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 15$

(1) • Tableau des variations

x		5		15	
$6(x-5)$	−	0	+	+	+
$x-15$	−	−	−	0	+
$V'(x)$	+	0	−	0	+
$V(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

Donc :

(1) $x = 5$ cm (largeur)

(1) $y = 15 - 5 = 10$ cm (longueur)

(1) $z = 30 - 2 \cdot 5 = 20$ cm (hauteur)

(1) c) Volume max $= V(5) = 5 \cdot 10 \cdot 20 = 1000\ cm^3$

$= 1\ dm^3 = 1\ l$

$\frac{}{12}$

Correction exercice 3 (15 points)

$f(x) = -\frac{1}{18}x^3 + 2x$

(3) a) Zéros :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x^3 + 2x = 0 \overset{\cdot(-18)}{\Leftrightarrow} x^3 - 36x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 36) = 0 \Leftrightarrow x(x-6)(x+6) = 0$

$f^{-1}(0) = \{-6; 0; 6\}$

(1) b) $f'(x) = \left(-\frac{1}{18}x^3 + 2x\right)' = -\frac{3}{18}x^2 + 2$

(4) c) Tableau des variations :

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{18}x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{3} = 12$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} \simeq \pm 3{,}46$

x		$-\sqrt{12}$		$\sqrt{12}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

MIN $(-3{,}46 ; -4{,}62)$

MAX $(3{,}46 ; 4{,}62)$

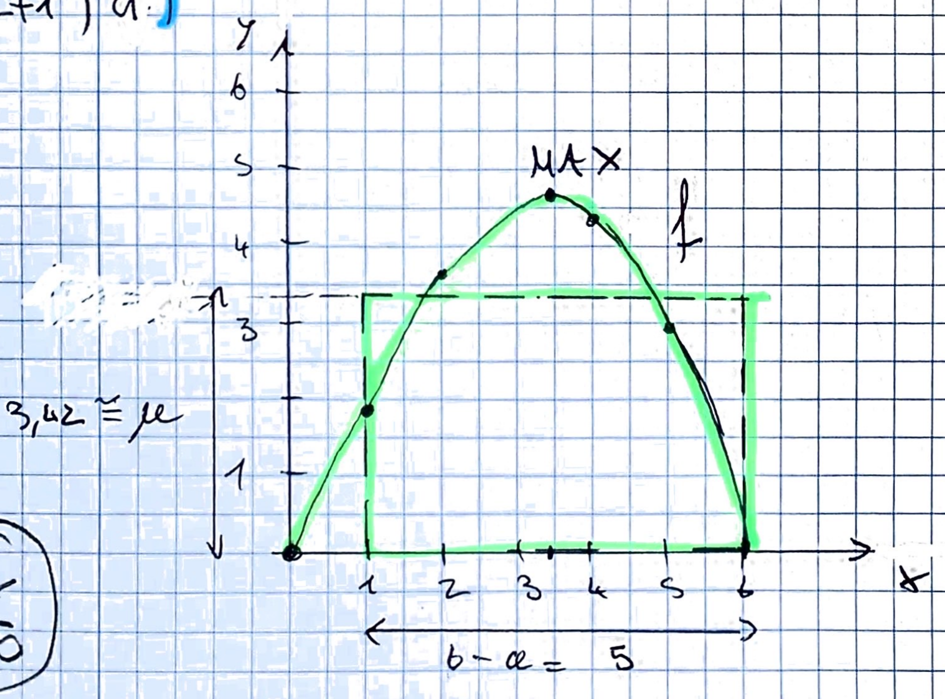
(3) e) $A(D) = \int_1^6 \left(-\frac{1}{18}x^3 + 2x\right)dx = -\frac{1}{18}\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^6$

$= \left(-\frac{1}{72}x^4 + x^2\right)\Big|_1^6 \simeq 18 - 0{,}99 \simeq \underline{\underline{17{,}1}}$

(1) f) $\mu = f(c) = \frac{1}{6-1}\int_1^6 f(x)\,dx \simeq \frac{17{,}1}{5} \simeq \underline{\underline{3{,}42}}$

(+)

(2+1) d)



15

Correction exercice 4 (7 points)

$$g(x) = \ln(5x) - 2x^2 + 4$$

(1) a) $D_g = \mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[$ car $5x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

(2) b) $g'(x) = (\ln(5x) - 2x^2 + 4)'$

$= \frac{1}{5x}(5x)' - (2x^2)' + (4)'$

$= \frac{1}{5x} \cdot 5 - 4x + 0$

$= \frac{1}{x} - 4x = h(x)$

(3) c) Tableau des variations de g :

$g'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x^2}{x} = \frac{(1-2x)(1+2x)}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 1-2x = 0$ ou $1+2x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in D_g$ ou $x = -\frac{1}{2} \notin D_g$

x	0		1/2	
$1-2x$	+	+	0	−
$1+2x$	+	+	+	+
x	0	+	+	+
$g'(x)$	‖	+	0	−
$g(x)$	‖	↗	MAX	↘

(4) d) g est croissante sur l'intervalle $]0; 1/2[$

/7

Correction exercice 5 (14 points)

A)

(2) a) $F(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{8} (5x+2)^8 \right) = \frac{1}{40} \cdot (5x+2)^8$

(2) b) $F(x) = \frac{1}{4} \left(1 + \sin(x) \right)^4$

(2) c) $F(x) = \ln |x^2+1|$

B)

(3) a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin(x) + \cos(x)) \, dx$

$= \left[(-2) \cdot \cos(x) + \sin(x) \right] \Big|_0^{\pi/2}$

$= \left((-2)\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) \right) - \left((-2)\cos(0) + \sin(0) \right)$

$= \left((-2) \cdot 0 + 1 \right) - \left((-2) \cdot 1 + 0 \right)$

$= 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$ //

(3) b) $\int_0^{\ln(2)} e^x \, dx = e^x \Big|_0^{\ln(2)}$

$= e^{\ln(2)} - e^0 = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$ //

(3) c) $\int_2^5 \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2} \cdot \ln |2x-1| \Big|_2^5$

$= \frac{1}{2} \left(\ln(9) - \ln(3) \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{9}{3} \right)$

$= \frac{1}{2} \ln(3) = \ln \left(3^{1/2} \right) = \underline{\ln(\sqrt{3})}$ //

$\frac{\quad}{14}$

Correction exercice 6 (7 points)

(3) a) $f(x) = g(x)$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 3 = 2x + 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - 3x + 2}_{P(x)} = 0$

$P(1) = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x - 1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & x^2 + x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \\ -(x^2 - x) & \\ -2x + 2 & \\ -(-2x + 2) & \\ 0 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

$I = \{(-2; -3); (1; 3)\}$

(4) b) $A = \int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-2}^{1} x^3 - 3x + 2\, dx$

$= \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right|_{-2}^{1}$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{12}{2} - 4\right)$

$= \frac{1 - 6 + 8 - \cancel{16} + 24 + \cancel{16}}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$

$\frac{\quad}{7}$

Correction exercice 7 (7 points)

(2) $$\text{Volume} = \boxed{\pi \int_0^5 (f(x))^2\,dx} - \boxed{\pi \int_1^5 (g(x))^2\,dx}$$

$$= \pi \int_0^5 (x+2)^2\,dx - \pi \int_1^5 (3\sqrt{x-1})^2\,dx$$

(2) $$= \pi \int_0^5 (x^2+4x+4)\,dx - \pi \int_1^5 9(x-1)\,dx$$

(2) $$= \pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]\Big|_0^5 - \pi \left[\frac{9x^2}{2} - 9x\right]\Big|_1^5$$

$$= \pi\left(\left[\frac{5^3}{3} + 2\cdot 5^2 + 4\cdot 5\right] - [0]\right) - 9\pi\left(\left[\frac{5^2}{2} - 5\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1\right]\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{335}{3} - 9\pi \cdot \frac{16}{2}$$

(1) $$= \frac{335}{3}\pi - 72\pi = \frac{119}{3}\pi$$

/7

Correction exercice 8 (12 points)

(3) a) Contre exemple :

$f(x) = x \qquad a = -1$

$(f(x))^2 = x^2 \qquad b = 1$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \neq 0$$

donc FAUX

(3) b)

$$F'(x) = (\cos^2(x))' = 2\cdot(\cos(x))\cdot(\cos(x))'$$
$$= 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x))$$
$$= (-2)\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)$$

$$G'(x) = (-\sin^2(x))' = (-1)\cdot 2(\sin(x))\cdot(\sin(x))'$$
$$= (-2)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$$

=

VRAI

(3) c) Contre-exemple:

$f(x) = x^2$ est intégrable car continue (sur $\mathbb{R}$)

$F(x) = \frac{x^3}{3}$ et $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ sont deux primitives de f.

donc FAUX

(3) d) Contre exemple

$$\int_{-1}^{0} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}$$
$$= \left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0$$

donc FAUX

/12