REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE — Année scolaire 2020-2021

Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)

Enseignement secondaire II

Collège Sismondi

Discipline : Mathématiques

Épreuve Semestrielle - 3ème année

Date : **10 décembre 2020**

Durée de l'épreuve : **160'**

Nombre de pages : **3** *(y compris la page d'en-tête)*

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
3MA1.DF01	23	M : SCHIESS
3MA1.DF02	22	C. SCRUCCA
3MA1.DF03	22	C. CRETTAZ
3MA1.DF04	21	C. CRETTAZ
3MA1.DF05	24	M. WEISS
3MA1.DF06	21	M. WEISS
3MA1.DF07	20	M. SCHIESS

Documents/Matériels autorisés	
Mis à disposition par le collège :	Personnels à l'élève :
Aucun	Calculatrice modèle TI30 ou TI34 sauf modèles PRO. Table CRM **non-annotée** (marques-pages et surlignages autorisés.)
Information au maître-surveillant	
Merci de vérifier que les tables numériques sont conformes	

Nom et prénom :	**Groupe :**

Exercice	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Points :	17	9	16	10	14	6	6	9	87
Obtenu :									

Informations aux élèves :

- Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline. Commencer la rédaction des exercices à la page suivante.
- Numéroter chaque page de l'épreuve et indiquer votre nom sur chaque feuille.
- Rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve en y annotant votre nom et groupe.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type un "nombre" ou "oui/non" ne rapportent aucun point.

Exercice 1 *(17 points)*

Calculer les limites suivantes :

a) *(4 pts)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

b) *(4 pts)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2-3x}{x^4-3x^2}$

c) *(4 pts)* $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-\sqrt{20+x}}{5-x}$

d) *(2 pts)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7-4x-x^3}{4x^3+12x^2-9}$

e) *(3 pts)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\sin(x)}{x^3+2x^2}$

Exercice 2 *(9 points)*

Soit f et g deux fonctions définies par :

$$f(x)=\sqrt{x+4} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{-4}{x-2}$$

a) *(2 pts)* Déterminer le domaine de définition de f et le domaine de définition de g.

b) *(2 pts)* Déterminer si les fonctions f et g sont continues en justifiant votre réponse.

c) Soit la fonction h définie par $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\geqslant 0 \\ g(x) & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

i) *(1 pts)* Déterminer le domaine de définition de h.

ii) *(4 pts)* Déterminer si la fonction h est continue en 0.

Exercice 3 *(16 points)*

Étudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+3x}{2x-1}$ en suivant les points suivants :

a) *(1 pts)* Donner son domaine de définition.

b) *(3 pts)* Donner les coordonnées des éventuels points d'intersections du graphique de f avec les axes.

c) *(5 pts)* Donner l'équation de ses asymptotes.

d) *(3 pts)* Déterminer la position relative de f par rapport à son éventuelle asymptote horizontale/oblique.

e) *(4 pts)* Esquisser soigneusement le graphique de la fonction f et de ses asymptotes. *(Échelle : 2 carrés = 1 unité)*

Exercice 4 *(10 points)*

Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-3x-5$.

a) *(4 pts)* Montrer que $f'(x)=2x-3$ en utilisant la définition de la dérivée.

b) *(3 pts)* Déterminer une équation de la tangente à f au point d'abscisse -2.

c) *(3 pts)* Déterminer les coordonnées du point P auquel la tangente à f a une pente de 5.

Exercice 5 *(14 points)*

Calculer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des règles de dérivation :

a) *(3 pts)* $f(x) = 2x^6 - 4 + \dfrac{1}{x^2}$

b) *(4 pts)* $f(x) = (2x^2 - 3) \cdot \cos(3 - x^2)$

c) *(4 pts)* $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 4}{1 - 3x}$

d) *(3 pts)* $f(x) = \sqrt[3]{6x + 1} - 2$

Exercice 6 *(6 points)*

Sans justifier vos réponses, déterminer :

a) *(3 pts)* Une expression algébrique plausible d'une fonction f telle que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$ et qui possède une asymptote oblique d'équation $y = 5x - 2$.

b) *(3 pts)* Une expression algébrique plausible d'une fonction g qui possède deux asymptotes verticales d'équations $x = -2$ et $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 8$.

Exercice 7 *(6 points)*

Examiner les affirmations suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses. Justifier vos réponses (un croquis peut être utilisé comme justification).

a) *(2 pts)* Si f est continue en $x = 2$, alors $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ existe.

b) *(2 pts)* Si f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) *(2 pts)* Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et telle que $f(a) > 0$ et $f(b) > 0$, alors f ne possède pas de zéro dans l'intervalle $[a; b]$.

Exercice 8 *(9 points)*

Tracer sur un repère orthonormé l'esquisse du graphique d'une fonction f vérifiant toutes les condition suivantes :

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$
- Les zéros de f sont en $x = -5$ et $x = 6$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -4$
- f est continue uniquement sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 4\}$
- f n'est pas dérivable en $x = -1$
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Fin de l'épreuve. Bonne relecture.

Corrigé de la semestrielle 3MA1, décembre 2020

Question 1

4/4 a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overbrace{x^3-8}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)}$ ① ②

1	0	0	-8
	2	4	8
1	2	4	0

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \dfrac{12}{4} = \boxed{3}$ ①

4/4 b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2-3x}{x^4-3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x^2+x-3)}{x^2(x^2-3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-3}{x(x^2-3)} = \not\exists$ ①
①

car $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+x-3}{x(x^2-3)} = \dfrac{-3}{0^-\cdot(-3)} = -\infty$ ① et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x-3}{x\cdot(x^2-3)} = \dfrac{-3}{0^+\cdot(-3)} = +\infty$ ①

2/2 c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{7-4x-x^3}{4x^3+12x^2-9} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cancel{x^3}\overbrace{\left(\frac{7}{x^3}-\frac{4}{x^2}-1\right)}^{\to -1}}{\cancel{x^3}\underbrace{\left(4+\frac{12}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}_{\to 4}} = -\dfrac{1}{4}.$ ①
①

4/4 d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-\sqrt{20+x}}{5-x} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-\sqrt{20+x}}{5-x}\cdot\dfrac{5+\sqrt{20+x}}{5+\sqrt{20+x}}$ ①

① $= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{25-20-x}{(5-x)\cdot(5+\sqrt{20+x})} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\cancel{5-x}}{(\cancel{5-x})\cdot(5+\sqrt{20+x})}$ ①

$= \dfrac{1}{5+5} = \dfrac{1}{10}$ ①

3/3 e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\sin(x)}{x^3+2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}\sin(x)}{x^{\cancel{2}}(x+2)}$ ①

① $= \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{x+2}}_{\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}} = 1\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ ①

Question 2

2/2 a) $x \in D_f \iff x+4 \geq 0 \iff x \geq -4 \implies D_f = [-4; +\infty[$

$x \in D_g \iff x-2 \neq 0 \iff x = 2 \implies D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2/2 b) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto x+4$ et $x \mapsto x-2$ sont continues sur leur domaine, donc les opérations entre ces fonctions aussi.

1/1 c) i) $D_h = \mathbb{R}$

4/4 ii) Il faut vérifier la continuité en $x=0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \frac{-4}{0-2} = 2$ (1)
- $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt{0+4} = 2$ (1)
- $h(0) = f(0) = 2$ (1)

$\implies h$ continue en $x = 0$ (1)

Question 3

1/1 a) $x \in D_f \iff 2x-1 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{2} \implies D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

b) Intersection avec l'axe des ordonnées

$f(0) = \frac{0}{-1} = 0$

2/2 $\implies C_f \cap OY = \{(0;0)\}$ (1)

Intersection avec l'axe des abscisses

$x \in f^{-1}(0) \iff \frac{2x^2+3x}{2x-1} = 0 \iff 2x^2+3x = 0$ (1)

$\iff x(2x+3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{3}{2}$

$\implies f^{-1}(0) = \{-\frac{3}{2}; 0\}$

$\implies C_f \cap OX = \{(-\frac{3}{2}; 0); (0;0)\}$ (1)

5/5 c)

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+3x & 2x-1 \\ \hline -(2x^2-x) & x+2 \\ \quad 4x & \\ \quad -(4x-2) & \\ \quad\quad 2 & \end{array} \quad ② \quad \Rightarrow f(x) = (x+2) + \frac{2}{2x-1} \quad ①$$

frac. rat simplifiée

Equation de l'asymptote verticale : $x = \frac{1}{2}$ ①

Equation de l'asymptote horizontale : $y = x+2$ ①

3/3 d) la position relative de la courbe de f par rapport à ses asymptotes dépend du signe de $\frac{2}{2x-1}$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
2		+		+	
$2x-1$		−	0	+	
$\frac{2}{2x-1}$		−	‖	+	

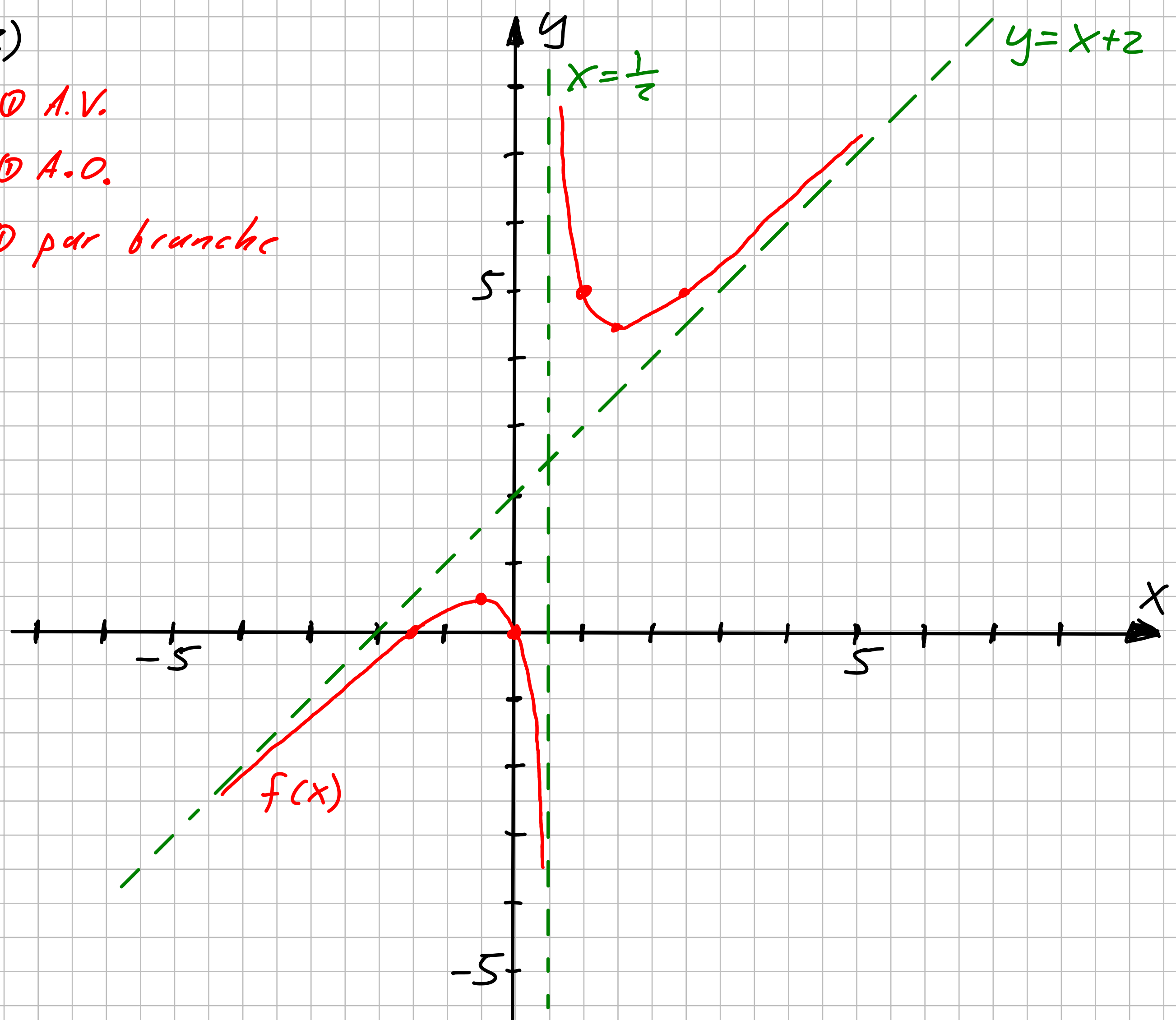
②

4/4 e)

① A.V.

① A.O.

① par branche



Question 4

4/4 a) $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x^2-3x-5)-(a^2-3a-5)}{x-a}$$ 1

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2-(3x-3a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x+a)\cdot\cancel{(x-a)}-3\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}}$$ 1 1

$$= \lim_{x\to a} (x+a)-3 = a+a-3 = 2a-3$$ 1

3/3 b) $$T_{-2} : y = \underbrace{f'(-2)}_{2(-2)-3=-7}\cdot(x-(-2)) + \underbrace{f(-2)}_{=(-2)^2-3\cdot(-2)-5=5}$$ 1 1

$$\Leftrightarrow y = -7(x+2)+5$$ 1

$$T_{-2} : y = -7x-9$$

3/3 c) A résoudre $f'(x) = 5 \Leftrightarrow 2x-3 = 5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$ 1 1

En $(4; \underbrace{f(4)}_{4^2-3\cdot 4-5=-1}) = (4;-1)$ 1 la pente de la tangente vaut 5.

Question 5

3/3 a) $$f'(x) = 2\cdot(x^6)' - \underbrace{(4)'}_{=0} + (x^{-2})' = 2\cdot 6x^5 + (-2)x^{-3}$$ 1 1 1

$$= 12x^5 - \frac{2}{x^3}$$

4/4 c) $$f'(x) = \overbrace{(2x^2-3)'}^{4x}\cos(3-x^2) + (2x^2-3)\cdot(-\sin(3-x^2))\cdot\overbrace{(3-x^2)'}^{-2x}$$

$$= 4x\cos(3-x^2) + (4x^3-6x)\sin(3-x^2)$$

1 règle produit 2 composition 1 dériv poly

4/4 d) $$f'(x) = \frac{(3x^2-x+4)'\cdot(1-3x) - (3x^2-x+4)(1-3x)'}{(1-3x)^2}$$ 1

$$= \frac{(6x-1)(1-3x) - (3x^2-x+4)(-3)}{(1-3x)^2}$$ 1 1

$$= \frac{6x-18x^2-1+3x+9x^2-3x+12}{(1-3x)^2} = \frac{-9x^2-6x+11}{(1-3x)^2}$$ 1

3/3 e) $$f'(x) = ((6x+1)^{1/3})' - \underbrace{(2)'}_{=0} = \underbrace{(6x+1)'}_{=6}\cdot\frac{1}{3}(6x+1)^{-2/3}$$ 1 1 1

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{(6x+1)^2}}$$

Question 6

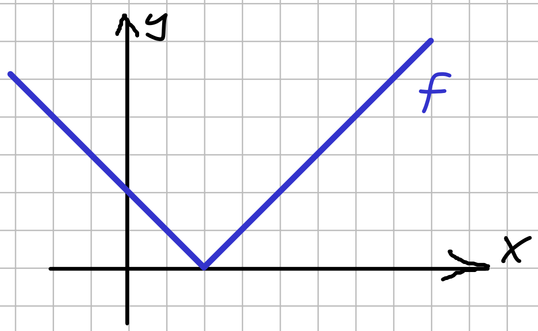
3/3 a) $f(x) = (5x-2) + \frac{1}{(x-3)^2}$ ① ② (1pt si $\frac{1}{x-3}$)

3/3 b) $f(x) = 8 + \frac{1}{(x+2)(x-1)}$ ① ② (si stt une asymptote)

Question 7

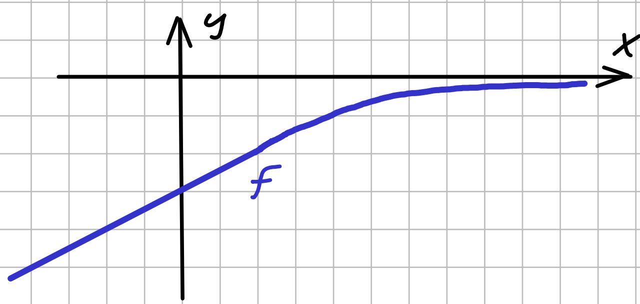
2/2 a) Non, contre exemple

$$f(x)=\begin{cases}(x-2) & \text{si } x\geq 2\\ -(x-2) & \text{si } x<2\end{cases}$$



2/2 b) Non, contre exemple

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & \text{si } x\geq 1\\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & \text{si } x<1\end{cases}$$



2/2 c) Faux, contre exemple $f : [-2;2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2-1$

possède 2 zéros -1 et 1 et $f(-2) = f(2) = 3$

Question 8

① par condition