REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE ANNEE SCOLAIRE 2020-2021
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

Semestre : 2
Date : 1 juin 2021
Durée de l'épreuve : 160'

Discipline : Mathématiques

Nombre de pages de l'énoncé
(y compris la page d'en-tête) : 4

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
2MA2.DF01	16	C. Crettaz
2MA2.DF02	17	S. Picchione
2MA2.DF03	12	M. Schiess
2MA2.DF04	13	C. Scrucca

Documents autorisés	
a) **mis à disposition par le collège** : (description précise et nombre, etc.)	b) **personnels à l'élève** :
Aucun	- Calculatrice agréée TI30 ou 34 sauf modèle Pro
	- Table CRM non annotée : marque-pages et surlignages acceptés

Informations pour les maîtres-surveillants
Merci de vérifier que les tables numériques et les calculatrices soient conformes.

Nom, Prénom du candidat : ……………………………………….…. Groupe : ……………

Informations aux élèves :

- **Recommandations générales :**

  - Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez-vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
  - Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
  - N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.

- **Recommandations particulières à la discipline :**

  - Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
  - Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.
  - Les résultats sont à donner sous forme exacte, réduite et simplifiée.
  - Sauf mention du contraire, les résultats approchés sont approximés à deux décimales.
  - Les élèves de M. Picchione doivent écrire au stylo (mais pas rouge).

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Total
Points	16	8	16	10	28	10	88
Vos points							

Note :………………

Exercice 1 **(16 points)**

Résoudre les équations ci-dessous. Donner les résultats en valeurs exactes.

a) (3 pts) $9^{x+4} = \sqrt[4]{3^8}$

b) (6 pts) $log_4(x+6) = log_4(2x+5)+1$

Déterminer le domaine de définition de l'équation logarithmique.

c) (7 pts) $cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Représenter les solutions appartenant à $[0;2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2 **(8 points)**

Si le système de réfrigération d'un camion transportant des laitues tombe brusquement en panne, la température des laitues tend vers la température de $22\ ^{\circ}C$ de l'air ambiant extérieur.
La fonction définie par $T(t) = 22 - a \cdot e^{b \cdot t}$ dans laquelle a et b sont des constantes, représente la température T en degrés Celsius des laitues au bout de t heures après le début de la panne.

a) (4 pts) Sachant que la température des laitues était de $10^{\circ}C$ après 1 heure et qu'elle était de $14\ ^{\circ}C$ après 2 heures, calculer les constantes a et b de la fonction $T(t)$.

Uniquement dans le cas où vous n'avez pas trouvé les constantes, prendre $a = 15$ *et* $b = -0{,}51$.

b) (1 pts) Si la panne dure 3 heures, déterminer la température des laitues à la fin de la panne.

c) (3 pts) Les laitues commencent à pourrir à partir de $18^{\circ}C$. Calculer le temps dont dispose le conducteur du camion pour réparer le système de réfrigération avant que les laitues ne commencent à pourrir.

Exercice 3 **(16 points)**

a) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \cdot cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$.

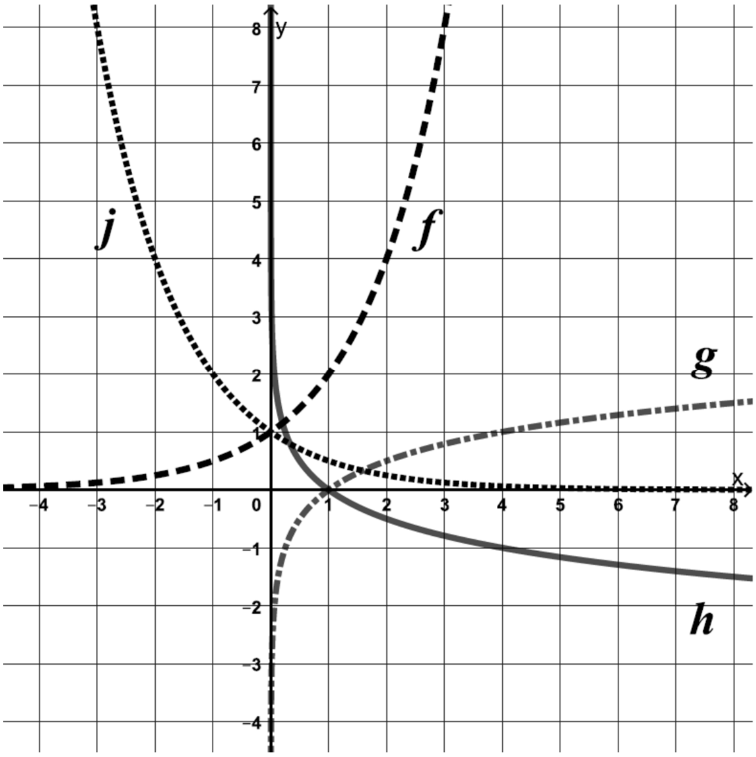
1) (1 pt) Donner le domaine de définition de f.
2) (1 pt) Déterminer la période de f.
3) (1 pt) Déterminer l'amplitude de f.
4) (3 pts) Déterminer algébriquement l'ordonnée à l'origine et les zéros de f.
5) (2 pts) Déterminer algébriquement toutes les valeurs de x qui donnent un maximum pour f.
6) (4 pts) Représenter soigneusement le graphique de f sur l'intervalle $[-8\pi\ ;\ 16\pi]$.

b) Soit la fonction g définie par $g(x) = 2cos\left(\frac{1}{4}x\right)+2$.

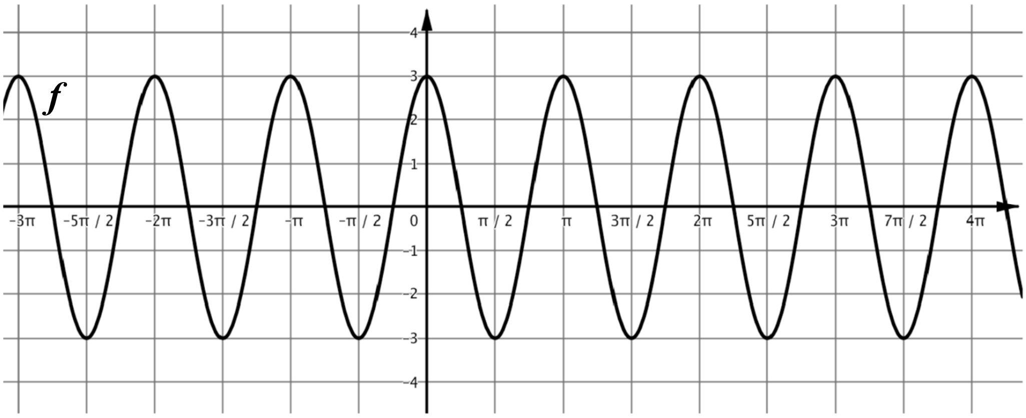
1) (2 pts) Déterminer algébriquement les zéros de g.
2) (2 pts) Représenter soigneusement le graphique de g sur le même repère que f.

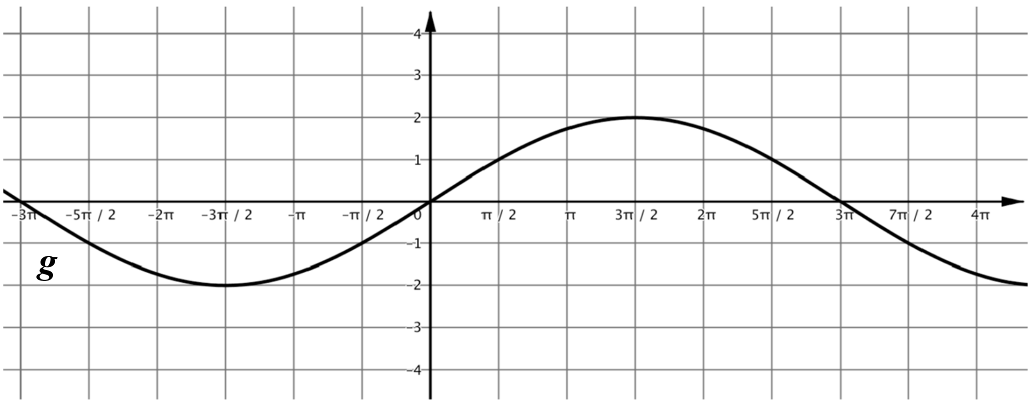
Exercice 4 (10 points)

a) (4 pts) Déterminer l'expression algébrique des fonctions exponentielles ou logarithmiques f, g, h et j qui sont représentées graphiquement ci-dessous.



b) (6 pts) Déterminer l'expression algébrique des fonctions de type trigonométrique f et g qui sont représentées graphiquement ci-dessous.





Exercice 5 (28 points)

Soient les points suivants dans le plan : $A(-8;2)$, $B(-6;-6)$, $C(2;-4)$ et $D(8;6)$.

Utiliser le calcul vectoriel pour répondre aux questions suivantes.

a) (1 pt) Représenter dans un repère le quadrilatère *ABCD*.

b) (4 pts) Montrer que le quadrilatère *ABCD* est un trapèze rectangle.

c) (4 pts) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DCB}$.

d) (3 pts) Calculer le périmètre du quadrilatère *ABCD.*

e) (3 pts) Calculer l'aire du triangle *BCD.*

f) (3 pts) Calculer les coordonnées du point *E* afin que le quadrilatère *ABED* soit un rectangle.

g) (4 pts) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DC}$ comme la somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, où $\vec{a}$ est colinéaire à $\overrightarrow{DB}$ et $\vec{b}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DB}$.

h) (3 pts) Soit le point $F(30;12)$. Les points *A*, *D* et *F* sont-ils alignés ?
Justifier par des calculs.

i) (3 pts) Est-ce que les diagonales du trapèze *ABCD* se coupent en leurs milieu ?
Justifier par des calculs.

Exercice 6 (10 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) (2 pts) $log_b\left(\frac{x}{9y^2}\right) = log_b(x) - 2 \cdot log_b(3) - 2 \cdot log_b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

b) (2 pts) $sin(2x) = 2\,sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) (2 pts) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls.
La projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ est un vecteur de même sens que $\vec{b}$.

d) (2 pts) $cos^2(x)\left(tan^2(x) + 1\right) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

e) (2 pts) Soient *A, B, C, D* et *E* cinq points distincts du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD}$ est égal au vecteur nul.

Fin de l'épreuve

Bon travail !

Correction Exercice 1 (16 points)

a) (3 pts) $9^{x+4}=\sqrt[4]{3^8}\Leftrightarrow\left(3^2\right)^{x+4}=3^{\frac{8}{4}}\Leftrightarrow 3^{2x+8}=3^{\frac{8}{4}}\Leftrightarrow 2x+8=2\Leftrightarrow x=-3\quad S=\{-3\}$

b) (6 pts) Domaine : $x+6>0\Leftrightarrow x>-6$

$$2x+5>0\Leftrightarrow 2x>-5\Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}\qquad Dom=\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$$

$$log_4(x+6)=log_4(2x+5)+1\quad\Leftrightarrow log_4(x+6)=log_4(2x+5)+log_4(4)$$

$$\Leftrightarrow log_4(x+6)=log_4\big(4(2x+5)\big)\Leftrightarrow x+6=8x+20$$

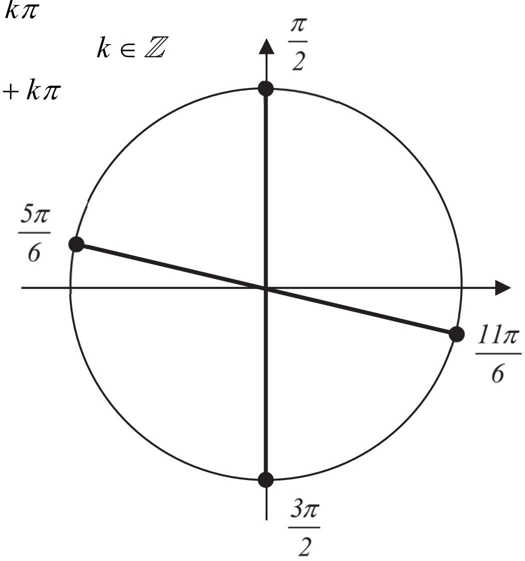
$$\Leftrightarrow 7x=-14\Leftrightarrow x=-2\in Dom\qquad S=\{-2\}$$

c) (7 pts) $$cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\pi+k2\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;-\frac{\pi}{6}+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Solutions appartenant à $[0;2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.



Correction Exercice 2 (8 points)

a) (4 pts)

$$\begin{cases}T(1)=10\\ T(2)=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}22-a\cdot e^{b\cdot 1}=10\\ 22-a\cdot e^{b\cdot 2}=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\cdot e^{b}=12\\ a\cdot e^{b\cdot 2}=8\end{cases}\Rightarrow\frac{e^{2b}}{e^{b}}=\frac{8}{12}\Rightarrow e^{b}=\frac{2}{3}\Rightarrow b=ln\left(\frac{2}{3}\right)\cong-0,41$$

$$T(1)=10\Leftrightarrow 22-a\cdot e^{-0,41}=10\Leftrightarrow a\cdot e^{-0,41}=12\Leftrightarrow a=\frac{12}{e^{-0,41}}\Leftrightarrow a=12\cdot e^{0,41}\cong 18.01$$

b) (1 pt) $T(3)\cong 22-18\cdot e^{-0,41\cdot 3}\cong 16,74^{\circ}[C]$

c) (3 pts) $T(t)=18\Leftrightarrow 22-18\cdot e^{-0,41\cdot t}=18\Leftrightarrow 18\cdot e^{-0,41\cdot t}=4\Leftrightarrow e^{-0,41\cdot t}=\frac{2}{9}$

$$\Leftrightarrow ln\left(e^{-0,41\cdot t}\right)=ln\left(\frac{2}{9}\right)\Leftrightarrow -0,41\cdot t=ln\left(\frac{2}{9}\right)\Leftrightarrow t=-\frac{1}{0,41}ln\left(\frac{2}{9}\right)\cong 3,67$$

Réponse : Après *3,67 heures*

Correction Exercice 3 (16 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=2\cdot cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)$.

a.1) (1 pt) $D_f=\mathbb{R}$ **a.2)** (1 pt) $\omega=\frac{1}{4}$ $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1/4}=8\pi$ **a.3)** (1 pt) $A=2$

a.4) (3 pts) • Ordonnée à l'origine : $f(0)=2\cdot cos\left(\frac{1}{4}\cdot 0\right)=2\cdot cos(0)=2\cdot 1=2$

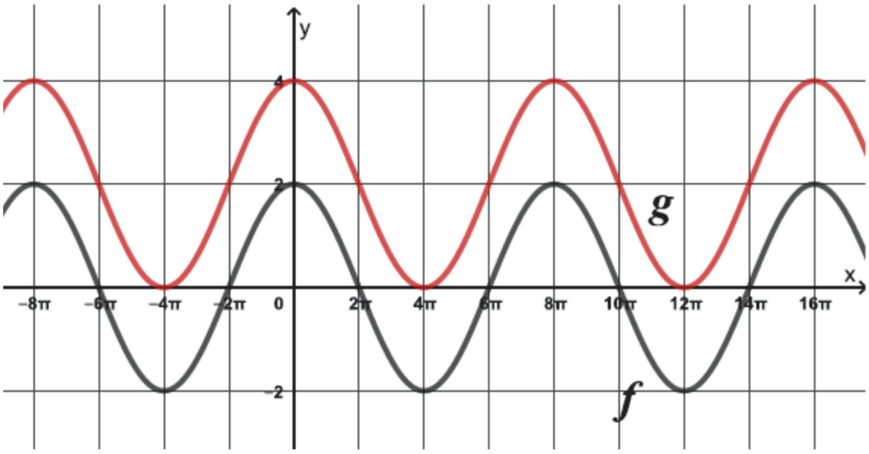
• Zéros : $f(x)=0\Leftrightarrow 2\cdot cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)=0\Leftrightarrow cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

a.5) (2 pts) Maximum : $f(x)=2\Leftrightarrow 2\cdot cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)=2\Leftrightarrow cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)=1$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}x=0+k2\pi\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=k8\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

a.6) et **b.2)** (4+2 pts) Graphique de la fonction f et g sur l'intervalle $[-8\pi\,;\,16\pi]$.



b.2) (2 pts) Zéros : $g(x)=0\Leftrightarrow 2\cdot cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)+2=0\Leftrightarrow cos\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)=-1$

$\Leftrightarrow\frac{1}{4}x=\pi+k2\pi\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=4\pi+k8\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

Correction Exercice 4 (10 points)

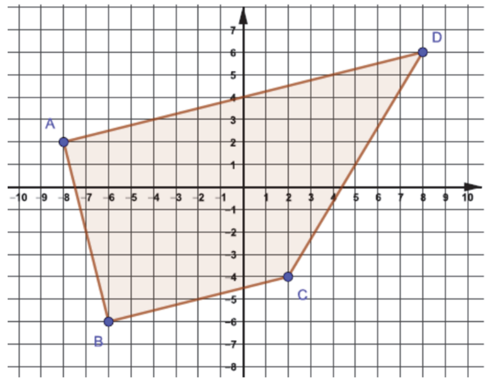
a) (4 pts) $f(x)=2^x$ car $f(1)=2$ $j(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ car $j(-1)=\frac{1}{2}$

$g(x)=log_4(x)$ car $g(4)=1$ $h(x)=-log_4(x)=log_{\frac{1}{4}}(x)$ **(**symétrie)

b.1) (3 pts) $A_f=3$; $T_f=\pi\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Leftrightarrow\omega=2$; $f(0)=3$ donc $f(x)=3\cdot cos(2\cdot x)$

b.2) (3 pts) $A_g=2$; $T_g=6\pi\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}=6\pi\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{3}$; $g(0)=0$ donc $g(x)=2\cdot sin\left(\frac{1}{3}\cdot x\right)$

Correction Exercice 5 (28 points)



a) (1 pt) Dessin

b) (4 pts)

- Angle droit : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}16\\4\end{pmatrix}=2\cdot 16+(-8)\cdot 4=0$ donc $\widehat{BAD}=90^\circ$

- Une paire de droite parallèles : $det\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}16 & 8\\4 & 2\end{vmatrix}=0$ donc $\overrightarrow{AD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

c) (4 pts)

$$\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CD}=\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\bullet\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\cdot cos\left(\widehat{DCB}\right)\Leftrightarrow \widehat{DCB}=cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\bullet\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}\right)=cos^{-1}\left(\frac{-68}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{136}}\right)=135^\circ$$

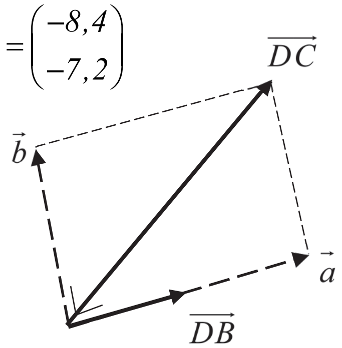
d) (3 pts) $Périmètre=\left\|\overrightarrow{CB}\right\|+\left\|\overrightarrow{CD}\right\|+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|+\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{68}+\sqrt{136}+\sqrt{68}+\sqrt{272}\cong 44{,}65$

e) (3 pts) $Aire\ du\ triangle\ BCD\ =\frac{1}{2}\cdot\left|det\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}-8 & 6\\-2 & 10\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|-68\right|=34$

f) (3 pts) $ABED\ est\ un\ rectangle\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$ donc $E(10;-2)$

g) (4 pts) • $\vec{a}=\frac{\overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{DB}}{\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{DB}=\frac{\begin{pmatrix}-6\\-10\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-14\\-12\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{(-14)^2+(-12)^2}\right)^2}\cdot\begin{pmatrix}-14\\-12\end{pmatrix}=\frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix}-14\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8{,}4\\-7{,}2\end{pmatrix}$



• $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{DC}\ \Leftrightarrow\ \vec{b}=\overrightarrow{DC}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\-10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8{,}4\\-7{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}4\\-2{,}8\end{pmatrix}$

h) (3 pts) Test : A, D et F sont-ils alignés $\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AF}\right)=0$

$det\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AF}\right)=\begin{vmatrix}16 & 38\\4 & 10\end{vmatrix}=16\cdot 10-4\cdot 38=160-152=8\neq 0$ donc A, D et F ne sont pas alignés.

i) (3 pts) Milieu du segment $[AC]$: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ donc $M(-3;-1)$

Milieu du segment $[BD]$: $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ donc $N(1;0)$

Les coordonnées du point N ne sont pas égales aux coordonnées du point M donc les diagonales du trapèze $ABCD$ ne se coupent en leurs milieu.

Correction Exercice 6 **(10 points)**

a) (2 pts)

$$\log_b\left(\frac{x}{9y^2}\right)=\log_b(x)-\log_b\left(9y^2\right)$$
$$=\log_b(x)-\left[\log_b\left(3^2\right)+\log_b\left(y^2\right)\right]$$
$$=\log_b(x)-2\cdot\log_b(3)-2\cdot\log_b(y)\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$$

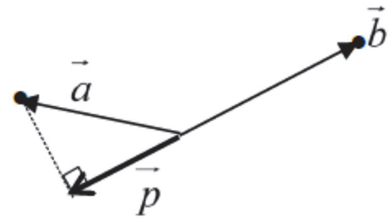
VRAI

b) (2 pts) Contre-exemple :

Si $x=\frac{\pi}{2}$ alors $\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi)=0\quad et\quad 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot 1=2$ **FAUX**

c) (2 pts) Contre-exemple :

Notons $\vec{p}$ la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$. $\vec{p}$ et $\vec{b}$ n'ont pas le même sens.



FAUX

d) (2 pts)

$$\cos^2(x)\left(\tan^2(x)+1\right)=\cos^2(x)\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1\right)$$
$$=\frac{\cancel{\cos^2(x)}\sin^2(x)}{\cancel{\cos^2(x)}}+\cos^2(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1\qquad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

VRAI

e) (2 pts)

$$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DD}$$
$$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\vec{0}$$
$$=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}+\vec{0}$$
$$=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$$
$$=\overrightarrow{AE}\neq\vec{0}\ car\ \ A\ et\ E\ distincts$$

FAUX