REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE ANNEE SCOLAIRE 2020-2021
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

Semestre : 1er

Date : 10 décembre 2020

Epreuve semestrielle regroupée

Durée de l'épreuve : 200'

Discipline : **Mathématiques**

Nombre de pages de l'énoncé (y compris la page d'en-tête): 4

Cours	Nombre d'élèves	Maître correcteur
4MA2.DF01	15	A. SCHLEINING
4MA2.DF02	15	M. SAN MILLAN

Documents autorisés	
a) mis à disposition par le collège	**b) personnels de l'élève**
Aucun	Calculatrice. Modèles autorisés: TI 30 et TI 34, sauf modèles Pro
	Table CRM non annotée, seuls les maques-pages et surlignages sont autorisés

Informations pour les maîtres surveillants
Merci de vérifier que les calculatrices et les tables CRM soient conformes

Nom, Prénom du candidat : .... Groupe : ....

Total : / 120 points

Informations aux élèves :

- **Recommandations générales :**
  - Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez-vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
  - Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
  - N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.
- **Recommandations particulières à la discipline :**
  - Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
  - Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.

Exercice 1 **(25 points)**

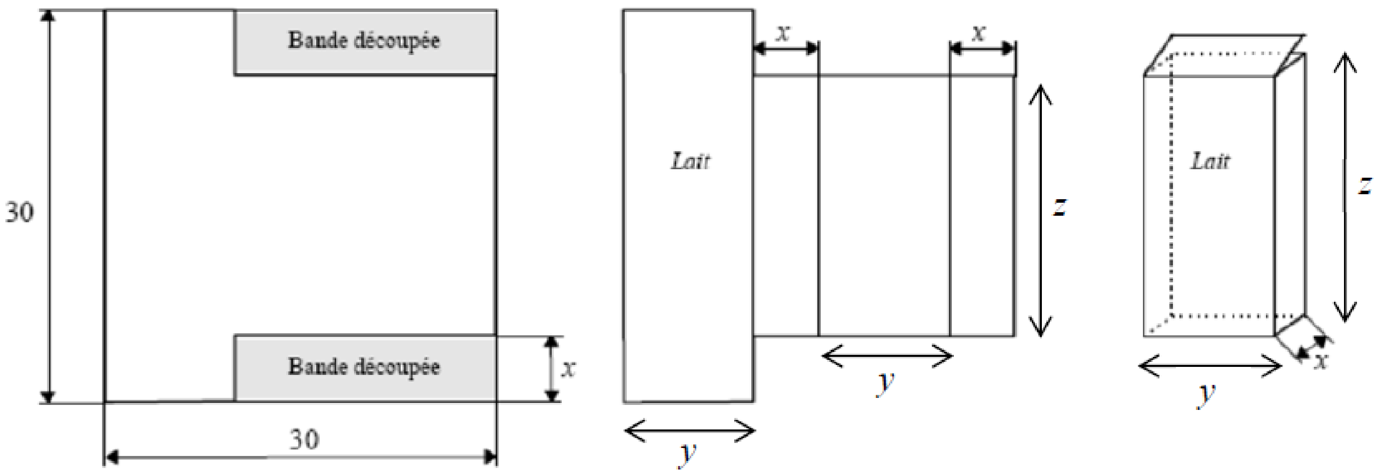
Soit f une fonction définie par $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

a) (4 points) Montrer que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 2\ln(x) + 3$.

b) (21 points) Effectuer une étude détaillée de la fonction f puis tracer son graphique.

Exercice 2 **(12 points)**

Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir illustration ci-dessous).
Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par *x* la mesure en cm de la largeur des bandes découpées.



a) (4 points) Montrer que le volume V de la brique de lait en fonction de x est donné par
$V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x.$

b) (7 points) Déterminer les dimensions de la brique (longueur, largeur et hauteur) en cm afin que le volume soit maximal.

c) (1 points) Déterminer ce volume maximal en litres.

Exercice 3 **(10 points)**

Soit la relation suivante : $\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

a) (4 points) Démontrer cette relation à l'aide de l'intégration par parties.

b) (3 points) Démontrer cette relation en utilisant un calcul de dérivée.

c) (3 points) Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\pi} x\cos(-2x)dx$.

Exercice 4 **(23 points)**

A. Déterminer une primitive de la fonction f lorsque celle-ci est définie par :

a) (3 points) $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^5}$

b) (2 points) $f(x)=(1+sin(x))^3 cos(x)$

c) (6 points) $f(x)=\dfrac{7x+8}{(x-3)(x+2)}$

B. Calculer en valeurs exactes les intégrales définies suivantes :

a) (3 points) $\int_0^2 x\sqrt{3x^2+4}\,dx$

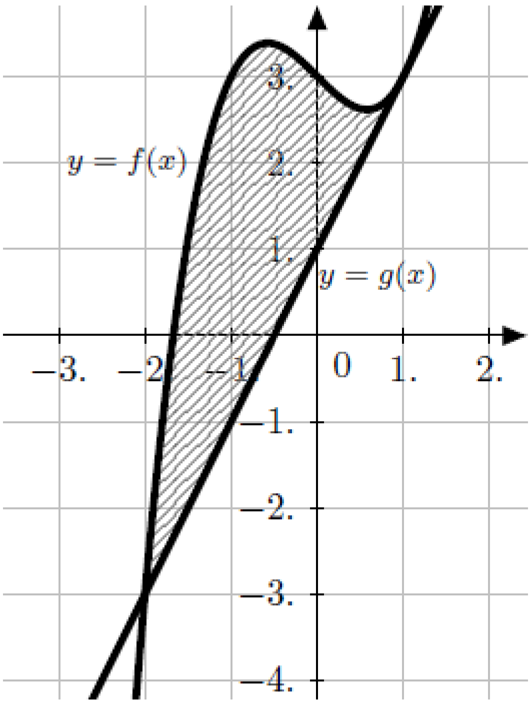
b) (3 points) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos(2x)\sin(2x)dx$

c) (6 points) $\int_0^2 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

Exercice 5 **(7 points)**

Soit *f* et *g* deux fonctions définies respectivement par

$f(x)=x^3-x+3$ et $g(x) = 2x + 1$.



a) (3 points) Calculer les coordonnées des points d'intersection du graphe de *f* avec celui de *g*.

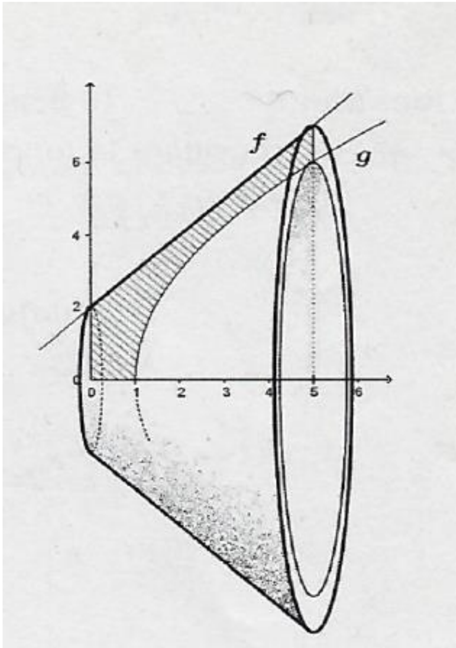
b) (4 points) Calculer l'aire de la surface plane hachurée délimitée par les graphes de *f* et *g*.

Exercice 6 **(7 points)**

Un archéologue a découvert la coupe ci-contre dans un site sous-marin en Méditerranée.
Il souhaite calculer le volume de matière qui constitue cette pièce, sachant qu'il s'agit d'un corps de révolution (données en cm).

Les fonctions f et g délimitant l'objet sont définies respectivement par : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = 3\sqrt{x-1}$.

Exprimer le volume engendré par la rotation de la surface hachurée autour de l'axe Ox à l'aide d'intégrales, puis calculer la valeur exacte de ce volume en donnant tous les détails des calculs.



Exercice 7 **(12 points)**

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) (3 points) Soit une fonction f continue sur [a; b]. Si $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ alors $\int_a^b \left(f(x)\right)^2\,dx = 0$.

b) (3 points) Les fonctions F et G définies respectivement par $F(x) = \cos^2(x)$ et $G(x) = -\sin^2(x)$ sont deux primitives d'une même fonction.

c) (3 points) Toute fonction intégrable possède une unique primitive.

d) (3 points) Le résultat du calcul d'une intégrale définie est toujours positif.

Exercice 8 **(24 points)**

A. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) (8 points) $y' - \dfrac{1-y}{1+x} = 0$ avec $y(0) = 0$

b) (9 points) $\tan(x)y' + y = \sin(x)$

B. (7 points) Déterminer l'équation de la courbe C passant par les points $(0;0)$ et $(3;3)$ telle que la pente de la tangente en chaque point $M(x\,;y)$ de C soit proportionnelle au carré de l'abscisse de M .

FIN DE L'EPREUVE

4Ma2 Epreuve semestrielle - Semestre 1. 10.12.20

Ex 1. $f(x) = x^2 \ln(x)$ /25

a) $f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \frac{1}{x}$

/3 $= 2x \ln(x) + x$ 11

$= x(2\ln(x) + 1)$

$f''(x) = 2\ln(x) + 1 + x\left(\frac{2}{x}\right)$
$= 2\ln(x) + 3$ si $x \neq 0$ ✓ 1

b). $D_f = \mathbb{R}_+^*$ 1

/21

- $f \cap O_y = \emptyset$ car $0 \notin D_f$ 1
- $f \cap O_x$: $x^2 \ln(x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ (exclu) ou $x = 1$

$\Rightarrow f \cap O_x = \{(1;0)\}$ 1

- A.V. /trou: $\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \ln(x) = 0^+ \cdot (-\infty)$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{+\infty}$

R.H

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}$ 11

$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2} \cdot x^2 = 0$

$\Rightarrow$ trou en $(0;0)$ 1

- AH: $\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$

$\Rightarrow$ pas de AH. 1

- A.O: $y = ax + b$

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln(x)$

$= +\infty \cdot +\infty$

$= +\infty$ 1

$\Rightarrow$ pas de A.O.

T.V: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (exclu) ou $\ln(x) = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \underbrace{x}_{>0}(2\ln(x) + 1)$ $\Leftrightarrow x = e^{-1/2}$ 1 $= \frac{1}{\sqrt{e}} \cong 0{,}6$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f'	//	$-$	0	$+$	
f	//	↘	min rel	↗	

11

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(e^{-1/2}\right) = \frac{-1}{2e}$
$\cong -0{,}18$

min rel en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} ; \frac{-1}{2e}\right) \cong (0{,}6 ; -0{,}2)$ 1

$f''(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-3/2}$
$\cong 0{,}22$ 1

x	0		$\frac{1}{e\sqrt{e}}$		$+\infty$
f''	//	$-$	0	$+$	
f	//	$\cap$	pt d'infl	$\cup$	

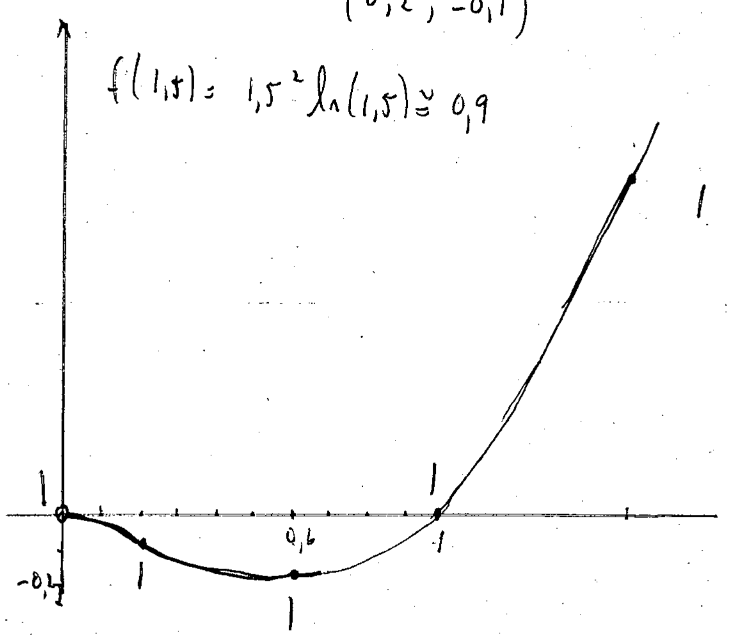
11

$f\left(e^{-3/2}\right) = \left(e^{-3/2}\right)^2 \cdot \ln\left(e^{-3/2}\right)$

$= \frac{1}{e^3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$
$\cong -0{,}07$ 1

$\Rightarrow$ pt d'infl en $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}} ; \frac{-3}{2e^3}\right)$
$\cong (0{,}2 ; -0{,}1)$

$f(1{,}5) = 1{,}5^2 \ln(1{,}5) \cong 0{,}9$



Ex. 2. /12 [4N-A]

a) $V = x \cdot y \cdot z$ $\quad x \in]0;15[$

$z = 30 - 2x$ 1

$y: \; 2y + 2x = 30 \Rightarrow y = 15 - x$ 1

$\Rightarrow V(x) = x \cdot (30-2x) \cdot (15-x)$

$= 2x(x-15)^2$

$= 2x(x^2 - 30x + 225)$

$= 2x^3 - 60x^2 + 450x$ 1

b) $V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$ $\quad 75 = 1 \cdot 75 = 3 \cdot 25 = 5 \cdot 15$

$= 6(x^2 - 20x + 75)$ 1

$= 6(x-5)(x-15)$ 1

x	$-\infty$	0		5		15		$+\infty$
$V'(x)$			+	0	−	0	+	
			↗	max rel	↘		↗	
	excl					excl		

1

$x = 5 \Rightarrow z = 20$, et $y = 10$ 1

Le volume est max pour une boîte de dim. 5 cm x 20 cm x 10 cm. 1

c) $5 \cdot 20 \cdot 10 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \ell.$

f) f cont sur $[1;6]$ car f poly

$\Rightarrow \exists\, c \in [1;6]$ tq $\int_1^6 f(x)\,dx = f(c)(6-1)$

$\Leftrightarrow \frac{1225}{72} \cdot \frac{1}{5} = f(c)$

$\Rightarrow f(c) = \frac{245}{72} \cong 3{,}40$ 1

Ex 3.

$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$.

/10

a) $\int x\cos(ax)\,dx = I$

/4 $f(x) = x$ $\quad g'(x) = \cos(ax)$ 1

$f'(x) = 1$ $\quad g(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$

$\Rightarrow I = \left(x \cdot \frac{1}{a}\sin(ax)\right) - \int \frac{1}{a}\sin(ax)\,dx$ 1

$= \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\int -a \cdot \sin(ax)\,dx$ 1

$= \frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C$, $C \in \mathbb{R}$

b) $\left(\frac{1}{a}x\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax)\right)'$

/3 $= \frac{1}{a}\sin(ax) + \frac{1}{a}x \cdot \cos(ax) \cdot \cancel{a} - \frac{1}{a^{\cancel{2}}}\sin(ax) \cdot \cancel{a}$ 1

$= x\cos(ax)$ ✓ 1

c) $\int_0^\pi x\cos(-2x)\,dx$ $\quad a = -2$

/3 $= \left[\frac{1}{-2}x\sin(-2x) + \frac{1}{4}\cos(-2x)\right]_0^\pi$ 1

$= \left(0 + \frac{1}{4} \cdot 1 - \left(0 + \frac{1}{4} \cdot 1\right)\right)$

$= 0$ 1

(/23)

Ex 4.

A.

(/3) a) $f(x) = \frac{x^4+2x^2+1}{x^5} = \frac{1}{x} + 2x^{-3} + x^{-5}$ 1

$\Rightarrow F(x) = \ln(|x|) - x^{-2} - \frac{x^{-4}}{4}$

/11 $= \ln(|x|) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x^4}$ 1

(/2) b) $f(x) = (1+\sin(x))^3 \cos(x)$

$F(x) = \frac{(1+\sin(x))^4}{4}$

a) $\frac{1}{6}\int_0^2 6x(3x^2+4)^{1/2}\,dx$

(/3) $= \frac{1}{6}\left[(3x^2+4)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^2$ 1

$= \frac{1}{9}\left(16^{3/2} - 4^{3/2}\right)$ 1

/12 $= \frac{1}{9}(64-8) = \frac{56}{9}$ 1

b) $2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2x)(\sin(2x))^1\,dx$

(/3) $= \cancel{2}\left[\frac{\sin^2(2x)}{4}\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\pi/4}$ 11 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ 1

c) $\frac{7x+8}{x^2-x-6} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$ 1

(/6) $\Rightarrow 7x+8 = a(x+2) + b(x-3)$

$x=-2 \Rightarrow -6 = b(-5) \Rightarrow b = \frac{6}{5}$ 1

$x=3 \quad 29 = a(5) \Rightarrow a = \frac{29}{5}$ 1

$\Rightarrow f(x) = \frac{29}{5}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{6}{5}\,\frac{1}{x+2}$ 1

$\Rightarrow F(x) = \frac{29}{5}\ln|x-3| + \frac{6}{5}\ln|x+2|$ 11

c) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^2 x(x+1)^{-1/2}\,dx = I$ 1

(/6) $f(x) = x \qquad g'(x) = (x+1)^{-1/2}$ 1

$f'(x) = 1 \qquad g(x) = (x+1)^{1/2}\cdot 2$ 1

$\Rightarrow I = \left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^2 - \int_0^2 2(x+1)^{1/2}\,dx$ 11

$= 4\sqrt{3} - 2\left[(x+1)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\right]_0^2$ 1

$= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\left(3^{3/2} - 1\right)$

$= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}(3\sqrt{3}) + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ 1

Ex 6 [9A'] $f(x) = x^3 - x + 3 \qquad g(x) = 2x+1$
Ex 5 [9H']

a) $\cap f, g$: $f(x) = g(x)$

/3 $\Leftrightarrow x^3 - x + 3 = 2x+1$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - 3x + 2}_{h(x)} = 0$ /

/7

?

zéros possibles : $\pm 1 ; \pm 2$

$1^3 - 3 + 2 = 0$ (ou lire sur graphique)

$\Rightarrow (x-1) \mid (x^3 - 3x + 2)$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$

$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$
$= (x-1)(x+2)(x-1)$
$= (x-1)^2 (x+2)$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x = -2$ /

$g(1) = 3$
$g(-2) = -3$ $\Big\} \Rightarrow \cap f g = \{(1;3);(-2;-3)\}$

/

b) $A = \int_{-2}^{1} (\overbrace{f(x) - g(x)}^{h(x)})\, dx$

/4

$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2) \, dx$ /

$= \left[\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$ /

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - (4 - 6 - 4)$

$= \frac{1 - 6 + 32}{4}$

$= \frac{27}{4}$ //

Ex7. [4N]   Ex 6 [4A]

$f(x) = x+2 \qquad g(x) = 3\sqrt{x-1}$

$$V = \pi \int_0^5 (f(x))^2\,dx - \pi \int_1^5 (g(x))^2\,dx \quad 1$$

/7

$$= \pi \int_0^5 (x+2)^2\,dx - \pi \int_1^5 9(x-1)\,dx \quad 1$$

$$= \pi \left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_0^5 - 9\pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 \quad 1$$

$$= \pi\left(\frac{343}{3} - \frac{8}{3}\right) - 9\pi\left(\frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{335\pi}{3} - 9\pi \quad (8)$$

$$= \frac{119\pi}{3} \quad 1$$

$(\cong 124{,}62\ u^3)$

Ex 7a) [4Ma2]

Expliquer pourquoi l'argument suivant est faux:

L'affirmation est vraie car:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot f(x)\,dx = I$$

$c(x) = f(x) \qquad d'(x) = f(x)$

$c'(x) = f'(x) \qquad d(x) = \underbrace{F(x)}_{= \int f(x)dx = 0}$

$$I = \left[f(x)\cdot F(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot F(x)\,dx$$

Comme $\int_a^b f(x)\,dx = F(x) = 0$,

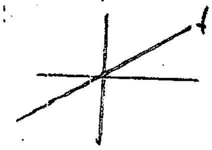
$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \left[f(x)\cdot 0\right]_a^b - \int_a^b 0\cdot f'(x)\,dx$$

$$= 0 - \int_a^b 0\,dx$$

$$= 0 \quad ✓$$

Ex 8. [4N]
Ex 7 [4A]   /12

a) Faux: $f(x) = x$



$$\int_{-1}^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = 0$$

mais $$\int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$$

b) $F(x) = \cos^2(x) \qquad G(x) = -\sin^2(x)$

$\Rightarrow F'(x) = -2\cos(x)\cdot\sin(x) = G'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

$\Rightarrow$ Vrai   ou: $F(x) = \cos^2(x)$
$= 1 - \sin^2(x)$
$= 1 + G(x)$
$\Rightarrow$ F et G prims d'une même fct (Thm).

c) Faux: $f(x) = 1$

$\Rightarrow F_1(x) = x$
$F_2(x) = x + 1$

d) Faux: $$\int_{-1}^0 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2} < 0.$$

Ex 8. (/24) [4A]

A. a) /7 (/8)

$$y' - \frac{1-y}{1+x} = 0 \qquad y(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-y}\,dy = \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\ln|1-y| = \ln|1+x| + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |1-y| = \frac{1}{1+x} \cdot e^{-k}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \alpha \frac{1}{1+x} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{1+x}$$

b) (/4)

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} y' + y = \sin(x) \qquad (*)$$

1)

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} y' + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = -\underbrace{\cos(x)}_{d.i.} \cdot \frac{1}{\sin(x)}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln(\sin(x)) + k, \; k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |y| = \frac{1}{\sin(x)} \cdot e^{k}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^{k} \cdot \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow y = \alpha \cdot \frac{1}{\sin(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

b) ii) (/5) $y = \alpha(x) \frac{1}{\sin(x)}$ sol^n de $(*)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \left(\alpha'(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} + \alpha(x) \left(\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)} \right) \right) + \frac{\alpha(x)}{\sin(x)} = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \sin(x)$$

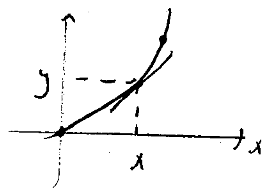
$$\Leftrightarrow \alpha'(x) = \sin(x)\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x) = \frac{\sin^2(x)}{2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{\sin^2(x)}{2} + k \right) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{\sin(x)}{2} + \underbrace{\frac{k}{\sin(x)}}_{y_h} \qquad k \in \mathbb{R}$$

B. /7



$$y' = k \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = k x^2$$

$$\Leftrightarrow dy = k x^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow y = k\frac{x^3}{3} + l \qquad l \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

$$y(3) = 3 \Leftrightarrow k \cdot \frac{3^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{3}} = 3$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{9} \cdot x^3 \; : \; C$$

Vérif : $(0;0) \in C$ ✓

$(3;3) \in C \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{9} \cdot 3^3$ ✓

$y'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2$ ✓