REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE
Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

ANNEE SCOLAIRE 2019-2020

Semestre: 1
Date: 12.12.2019
Durée de l'épreuve:160'

Discipline : Mathématiques................................

Nombre de pages de l'énoncé: 3
(y compris la page d'en-tête)

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
3MA2.DF01	15	M. SAN MILLAN
3MA2.DF02	16	A. SCHLEINING

Documents autorisés	
a) **mis à disposition par le collège** : (description précise et nombre, etc.)	b) **personnels à l'élève** :
	Calculatrice agréée Ti30 et Ti34 sauf modèles Pro
	Table numérique non annotée (seuls les marque-pages et le surlignage sont autorisés)

Informations pour les maîtres-surveillants
Merci par avance de vérifier que les tables numériques et les calculatrices soient conformes.

Nom, Prénom du candidat :	Groupe : ....

Total des points : 100

Informations aux élèves :

- Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
- Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
- N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.
- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs, les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.
- Donner les réponses en valeurs exactes ou avec deux décimales.

Exercice 1 : (14 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ (3 points) b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-1}{x^2-4}$ (1 point)

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{3-x}$ (3 points) d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$ (2 points)

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x-1}{2x^3-x}$ (2 points) f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{2x}$ (3 points)

Exercice 2 : (12 points)

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^2-2x \quad ; \quad g(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{si } x<-2 \\ x+1 & \text{si } -2\le x\le 3 \\ 2x-k & \text{si } x>3 \end{cases} \text{ avec } k\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad h(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x^2-1 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}.$$

a) À l'aide de la définition de la dérivée, montrer que $f'(2)=10$. (3 points)

b) Déterminer la valeur du paramètre k pour que la fonction g soit continue en $x=3$.

(3 points)

c) La fonction g est-elle continue en $x=-2$? Justifier. (3 points)

d) Montrer que h n'est pas dérivable en $x=0$. (3 points)

Exercice 3 : (14 points)

Déterminer toutes les asymptotes de la fonction f définie par $f(x)=5x+\sqrt{4x^2+x+1}$

Exercice 4 : (30 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$.

a) Montrer que les dérivées première et seconde de f sont données par :

$f'(x)=\dfrac{-x+2}{(x-1)^3}$ et $f''(x)=\dfrac{2x-5}{(x-1)^4}$. (4 points)

b) Etudier complètement cette fonction et tracer sa représentation graphique. (26 points)

Exercice 5 : (12 points)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des règles de dérivation, puis simplifier si nécessaire :

a) $f(x)=2x^5-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-4$ (3 points)   b) $f(x)=\cos(2x+1)\sin(5x)$ (3 points)

c) $f(x)=\left(\sqrt{\arcsin(2x)}\right)^4$ (3 points)   d) $f(x)=\dfrac{x^3-12}{(3x-4)^2}$ (3 points)

Exercice 6 : (9 points)

Soit f une fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2+(m-2)x-10}{x^2-2x-3}$ avec $m\in\mathbb{R}$ un paramètre.

Déterminer la valeur de m pour que la tangente à la courbe représentative de f au point où celle-ci coupe l'axe O_y soit parallèle à la droite d'équation $y=-\dfrac{20}{9}x+3$.

Exercice 7 : (9 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) La fonction f définie sur $\left[-1;0\right]$ par $f(x)=x^{2019}+3x+1$ possède un zéro dans cet intervalle. (3 points)

b) Si une fonction f est continue en $x=5$, alors $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}$ existe. (3 points)

c) La fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2}$ n'a pas d'asymptote verticale. (3 points)

Exercice 1 :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-6x^2+8x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\underbrace{=}_{RH}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-12x+8}{4x^3-6x^2+4x-2}\underbrace{=}_{RH}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{12x^2-12}{12x^2-12x+4}=\dfrac{0}{4}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-1}{x^2-4}=\dfrac{3}{-3}=-1$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{3-x}\cdot\dfrac{3+\sqrt{x+6}}{3+\sqrt{x+6}}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{(3-x)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{3+\sqrt{x+6}}=\dfrac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}\underbrace{=}_{RH}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=\dfrac{0}{2}=0$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+x-1}{2x^3-x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)\cdot 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cdot\cos(x)}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Exercice 2 :

a) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(3x+4)}{x-2}=10$

b) $g(3)=4=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(2x-k\right)=6-k=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(x+1\right)=4\Leftrightarrow 6-k=4\Leftrightarrow k=2$

c) $\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2+3\right)=7\neq\lim\limits_{x\to -2^+}\left(x+1\right)=-1$ donc discontinue en $x=-2$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1-(-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-1-(-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$

Exercice 3 :

$4x^2+x+1\geq 0$; $\Delta<0$; $Dom(f)=\mathbb{R}\Rightarrow$ pas d'av

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+\sqrt{4x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=7$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(-2x+\sqrt{4x^2+x+1}\right)\cdot\frac{-2x-\sqrt{4x^2+x+1}}{-2x-\sqrt{4x^2+x+1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x-1}{-2x-\sqrt{4x^2+x+1}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{4}$$

ao $y=7x+\frac{1}{4}$ si $x\to+\infty$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+\sqrt{4x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=3$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(2x+\sqrt{4x^2+x+1}\right)\cdot\frac{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x-1}{2x-\sqrt{4x^2+x+1}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{4}$$

ao $y=3x-\frac{1}{4}$ si $x\to-\infty$

Exercice 4 :

a) $f'(x)=\dfrac{(6x-4)2(x-1)^2-(3x^2-4x)4(x-1)}{4(x-1)^4}=\dfrac{(6x-4)(x-1)-(3x^2-4x)2}{2(x-1)^3}=$

$=\dfrac{6x^2-6x-4x+4-6x^2+8x}{2(x-1)^3}=\dfrac{-2x+4}{2(x-1)^3}=\dfrac{-x+2}{(x-1)^3}$

$f''(x)=\dfrac{-(x-1)^3-3(-x+2)(x-1)^2}{(x-1)^6}=\dfrac{-(x-1)-3(-x+2)}{(x-1)^4}=\dfrac{2x-5}{(x-1)^4}$

b) $Dom(f)=Dom(f')=Dom(f'')=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$N(f)=\left\{0;\dfrac{4}{3}\right\}$; $f(0)=0$; $N(f')=\{2\}$; $N(f'')=\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

		1		2		$\frac{5}{2}$	
f'	$-$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$	$\max(2;2)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
f	$\cap$		$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\inf\left(\frac{5}{2};\frac{35}{18}\right)$	$\cup$

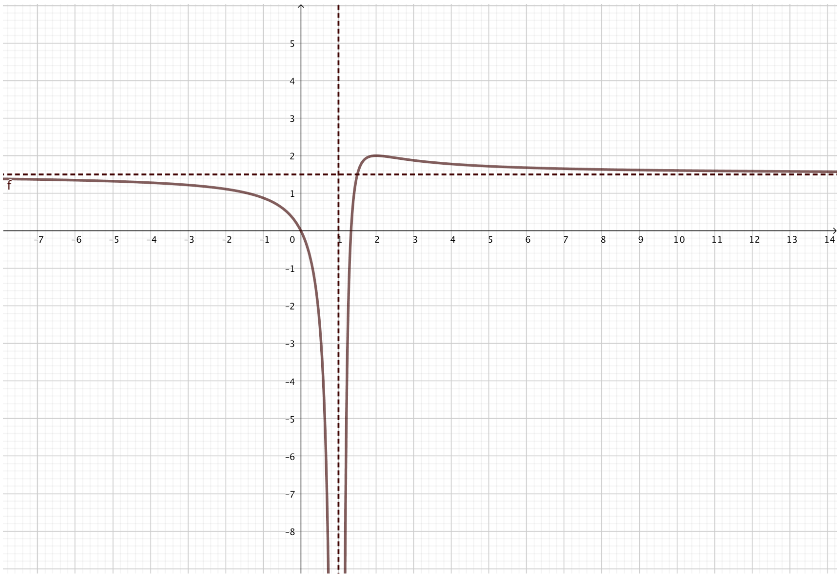
$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{x(3x-4)}{2(x-1)^2}=\dfrac{1\cdot(-1)}{2\cdot 0^+}=-\infty$ donc av d'équation $x=1$.

$\dfrac{3x^2-4x}{2x^2-4x+2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2x-3}{2x^2-4x+2}$ donc ah d'équation $y=\dfrac{3}{2}$

$\delta(x)=\dfrac{2x-3}{2x^2-4x+2}=\dfrac{2x-3}{2(x-1)^2}$

		1		$\frac{3}{2}$	
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$2(x-1)^2$	$+$		$+$	$+$	$+$
$\delta(x)$	$-$		$-$	0	$+$

$I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$



Exercice 5 :

a) $f(x)=2x^5-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-4=2x^5-x^{\frac{4}{5}}+4x^{-3}-4$

$f'(x)=10x^4-\dfrac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}-12x^{-4}=10x^4-\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}-\dfrac{12}{x^4}$

b) $f'(x)=-2\sin(2x+1)\sin(5x)+5\cos(2x+1)\cos(5x)$

c) $f'(x)=\dfrac{4\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}$

d) $f'(x)=\dfrac{3x^2(3x-4)^2-6(x^3-12)(3x-4)}{(3x-4)^4}=\dfrac{3x^2(3x-4)-6(x^3-12)}{(3x-4)^3}=$

$=\dfrac{9x^3-12x^2-6x^3+72}{(3x-4)^3}=\dfrac{3x^3-12x^2+72}{(3x-4)^3}$

Exercice 6 :

$f'(x)=\dfrac{(2x+m-2)(x^2-2x-3)-(x^2+(m-2)x-10)(2x-2)}{\left(x^2-2x-3\right)^2}$

$f'(0)=\dfrac{(m-2)(-3)-(-10)(-2)}{9}=-\dfrac{20}{9}\Leftrightarrow -3m+6-20=-20\Leftrightarrow m=2$

Exercice 7 :

a) $f(-1)=-3<0\,;\,f(0)=1>0$

f est continue car c'est un polynôme

Par un théorème de continuité : VRAI

b) FAUX, la fonction est continue mais forcément dérivable.

c) VRAI, $Dom(f)=\mathbb{R}$ donc impossible d'obtenir une av.