Département de l'instruction publique, de la formation et de la jeunesse (DIP)
Enseignement secondaire II
Collège Sismondi

Semestre : 2
Date : 1 juin 2021
Durée de l'épreuve : 160'

Discipline : Mathématiques

Nombre de pages de l'énoncé (y compris la page d'en-tête) : 4

Cours (libellé complet)	**Nombre d'élèves**	**Maître correcteur**
2MA1.DF01	20	C. Crettaz
2MA1.DF02	23	S. Picchione
2MA1.DF03	23	M. Schiess
2MA1.DF04	21	G. Vorpe
2MA1.DF05	22	G. Vorpe
2MA1.DF06	22	C. Scrucca
2MA1.DF07	22	S. Moody

Documents autorisés	
a) **mis à disposition par le collège** : (description précise et nombre, etc.)	b) **personnels à l'élève** :
Aucun	- Calculatrice agréée TI30 ou 34 sauf modèle Pro
	- Table CRM non annotée : marque-pages et surlignages acceptés

Informations pour les maîtres-surveillants
Merci de vérifier que les tables numériques et les calculatrices soient conformes.

Nom, Prénom du candidat : ……………………………………….…. Groupe : ……………

Informations aux élèves :

- **Recommandations générales :**

- Sur la première page des feuilles d'épreuves, veuillez-vous limiter aux informations administratives, à savoir votre nom, la date et le nom du maître de la discipline, et commencer l'épreuve proprement dite à la page suivante.
- Notez ensuite votre nom en haut de chaque page et numérotez-la.
- N'oubliez pas de rendre l'énoncé avec votre travail à la fin de l'épreuve.

- **Recommandations particulières à la discipline :**

- Le travail doit être propre et bien présenté ; il sera réalisé sur les feuilles quadrillées distribuées au début de l'épreuve. Aucune réponse ne doit figurer sur l'énoncé.
- Toutes les réponses doivent être justifiées, au moins par des calculs. Les réponses du type « un nombre » ou « oui/non » ne suffisent pas.
- Les résultats sont à donner sous forme exacte, réduite et simplifiée.
- Sauf mention du contraire, les résultats approchés sont approximés à deux décimales.
- Les élèves de M. Picchione doivent écrire au stylo (mais pas rouge).

	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Total
Points	16	8	14	10	27	8	83
Vos points							

Note :………………

Exercice 1 (16 points)

Résoudre les équations ci-dessous. Donner les résultats en valeurs exactes.

a) (3 pts) $9^{x+4} = \sqrt[4]{3^8}$

b) (6 pts) $\log_4(x+6) = \log_4(2x+5) + 1$

Déterminer le domaine de définition de l'équation logarithmique.

c) (7 pts) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Représenter les solutions appartenant à $[0;2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2 (8 points)

Si le système de réfrigération d'un camion transportant des laitues tombe brusquement en panne, la température des laitues tend vers la température de $22\ ^\circ C$ de l'air ambiant extérieur.
La fonction définie par $T(t) = 22 - a \cdot e^{b \cdot t}$ dans laquelle a et b sont des constantes, représente la température T en degrés Celsius des laitues au bout de t heures après le début de la panne.

a) (4 pts) Sachant que la température initiale des laitues était de $4^\circ C$ et qu'elle est de $10\ ^\circ C$ après 1 heure, calculer les constantes a et b de la fonction $T(t)$.

Uniquement dans le cas où vous n'avez pas trouvé les constantes, prendre $a = 15$ *et* $b = -0{,}51$.

b) (1 pt) Si la panne dure 3 heures, déterminer la température des laitues à la fin de la panne.

c) (3 pts) Les laitues commencent à pourrir à partir de $18\ ^\circ C$. Calculer le temps dont dispose le conducteur du camion pour réparer le système de réfrigération avant que les laitues ne commencent à pourrir.

Exercice 3 (14 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$.

a) (1 pt) Donner le domaine de définition de f.

b) (1 pt) Déterminer la période de f.

c) (1 pt) Déterminer l'amplitude de f.

d) (3 pts) Déterminer algébriquement l'ordonnée à l'origine et les zéros de f.

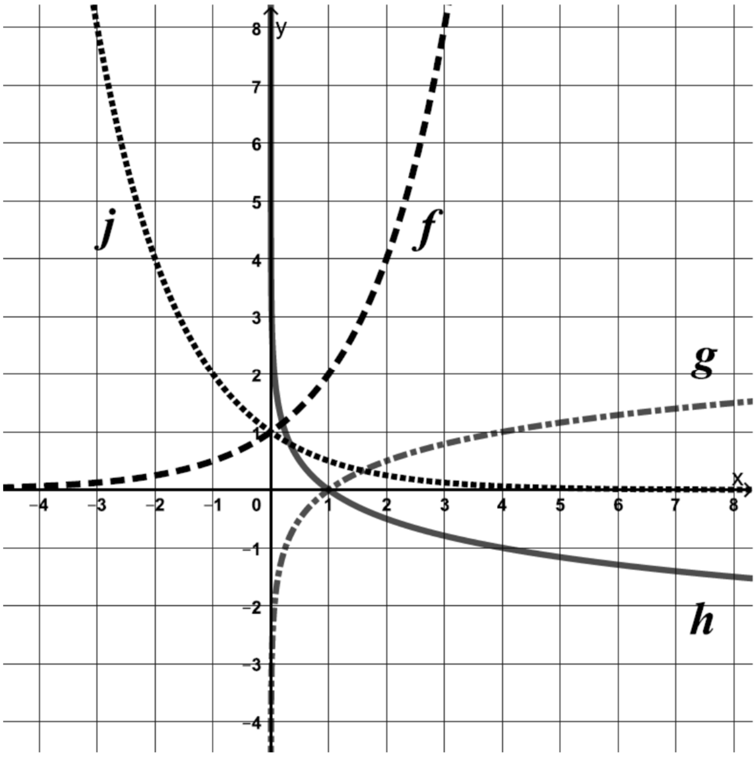
e) (2 pts) Déterminer algébriquement toutes les valeurs de x qui donnent un minimum pour f.

f) (2 pts) Déterminer algébriquement toutes les valeurs de x qui donnent un maximum pour f.

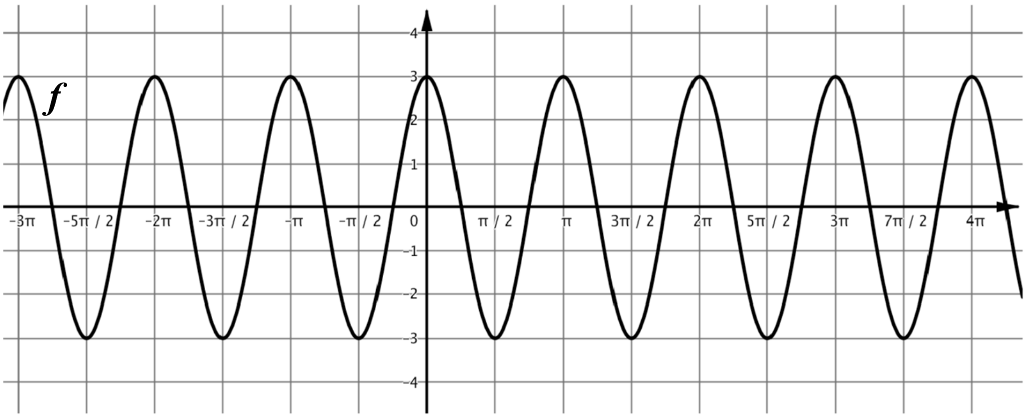
g) (4 pts) Représenter soigneusement le graphique de f sur l'intervalle $[-8\pi\ ;\ 16\pi]$.

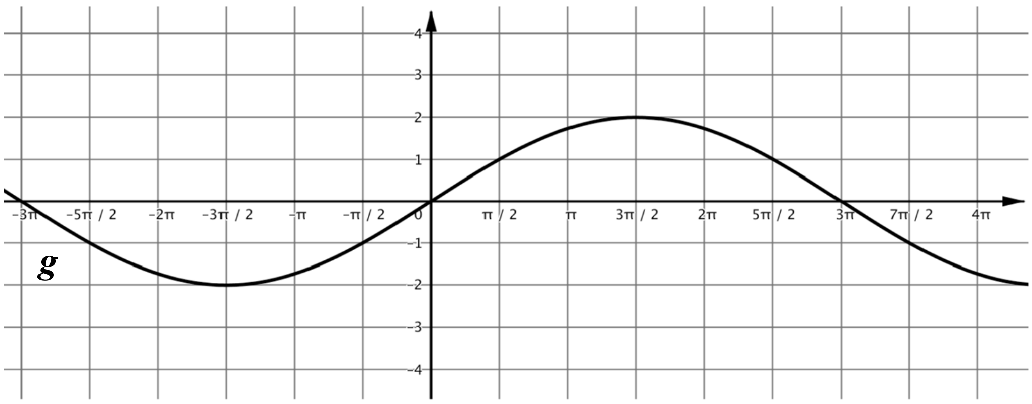
Exercice 4 (10 points)

a) (4 pts) Déterminer l'expression algébrique des fonctions exponentielles ou logarithmiques f, g, h et j qui sont représentées graphiquement ci-dessous.



b) (6 pts) Déterminer l'expression algébrique des fonctions de type trigonométrique f et g qui sont représentées graphiquement ci-dessous.





Exercice 5 (27 points)

Soient les points suivants dans le plan : $A(-8;2)$, $B(-6;-6)$, $C(2;-4)$ et $D(8;6)$.

Utiliser le calcul vectoriel pour répondre aux questions suivantes.

a) (1 pt) Représenter dans un repère le quadrilatère *ABCD*.

b) (4 pts) Montrer que le quadrilatère *ABCD* est un trapèze rectangle.

c) (4 pts) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DCB}$.

d) (3 pts) Calculer le périmètre du quadrilatère *ABCD.*

e) (3 pts) Calculer l'aire du triangle *BCD.*

f) (3 pts) Calculer les coordonnées du point *E* afin que le quadrilatère *ABED* soit un rectangle.

g) (3 pts) Calculer les composantes du vecteur $\vec{p}$, projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sur $\overrightarrow{DB}$.

h) (3 pts) Soit le point $F(30;12)$. Les points *A*, *D* et *F* sont-ils alignés ?
Justifier par des calculs.

i) (3 pts) Est-ce que les diagonales du trapèze *ABCD* se coupent en leur milieu ?
Justifier par des calculs.

Exercice 6 (8 points)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

a) (2 pts) $log_b\left(\frac{x}{3y^2}\right) = log_b(x) - log_b(3) - 2 \cdot log_b(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

b) (2 pts) $sin(2x) = 2\,sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) (2 pts) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs non nuls.
La projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ est un vecteur de même sens que $\vec{b}$.

d) (2 pts) $cos^2(x)\left(tan^2(x)+1\right)=1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Fin de l'épreuve

Bon travail !

Correction Exercice 1 (16 points)

a) (3 pts) $9^{x+4}=\sqrt[4]{3^8}\Leftrightarrow\left(3^2\right)^{x+4}=3^{\frac{8}{4}}\Leftrightarrow 3^{2x+8}=3^{\frac{8}{4}}\Leftrightarrow 2x+8=2\Leftrightarrow x=-3\quad S=\{-3\}$

b) (6 pts) Domaine : $x+6>0\Leftrightarrow x>-6$

$$2x+5>0\Leftrightarrow 2x>-5\Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}\qquad Dom=\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$$

$$log_4(x+6)=log_4(2x+5)+1\quad\Leftrightarrow log_4(x+6)=log_4(2x+5)+log_4(4)$$

$$\Leftrightarrow log_4(x+6)=log_4\left(4(2x+5)\right)\Leftrightarrow x+6=8x+20$$

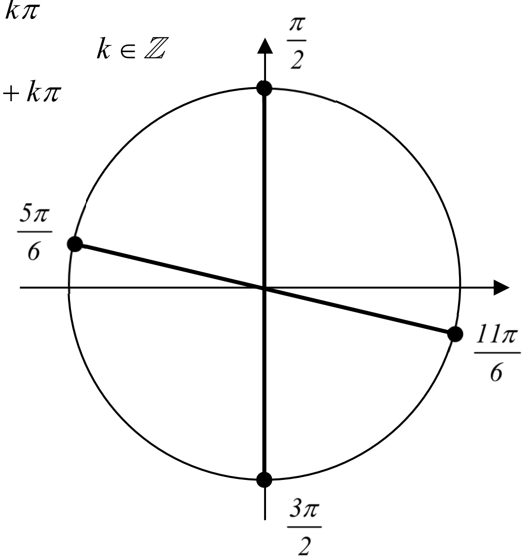
$$\Leftrightarrow 7x=-14\Leftrightarrow x=-2\in Dom\qquad S=\{-2\}$$

c) (7 pts) $$cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\quad\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\pi+k2\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;-\frac{\pi}{6}+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Solutions appartenant à $[0;2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.



Correction Exercice 2 (8 points)

a) (4 pts) $T(0)=4\Leftrightarrow 22-a\cdot e^{b\cdot 0}=4\Leftrightarrow 22-a=4\Leftrightarrow a=18$

$$T(1)=10\Leftrightarrow 22-18\cdot e^{b}=10\Leftrightarrow 18\cdot e^{b}=12\Leftrightarrow e^{b}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow b=ln\left(\frac{2}{3}\right)\cong-0,41$$

b) (1 pt) $T(3)\cong 22-18\cdot e^{-0,41\cdot 3}\cong 16,74^{\circ}[C]$

c) (3 pts) $T(t)=18\Leftrightarrow 22-18\cdot e^{-0,41\cdot t}=18\Leftrightarrow 18\cdot e^{-0,41\cdot t}=4\Leftrightarrow e^{-0,41\cdot t}=\frac{2}{9}$

$$\Leftrightarrow ln\left(e^{-0,41\cdot t}\right)=ln\left(\frac{2}{9}\right)\Leftrightarrow-0,41\cdot t=ln\left(\frac{2}{9}\right)\Leftrightarrow t=-\frac{1}{0,41}ln\left(\frac{2}{9}\right)\cong 3,67$$

Réponse : Après *3,67 heures*

Correction Exercice 3 (14 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$.

a) (1 pt) $D_f = \mathbb{R}$ **b)** (1 pt) $\omega = \frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi$ **c)** (1 pt) $A = 2$

d) (3 pts) • Ordonnée à l'origine : $f(0) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot 0\right) = 2 \cdot \cos(0) = 2 \cdot 1 = 2$

• Zéros : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2\pi + k4\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

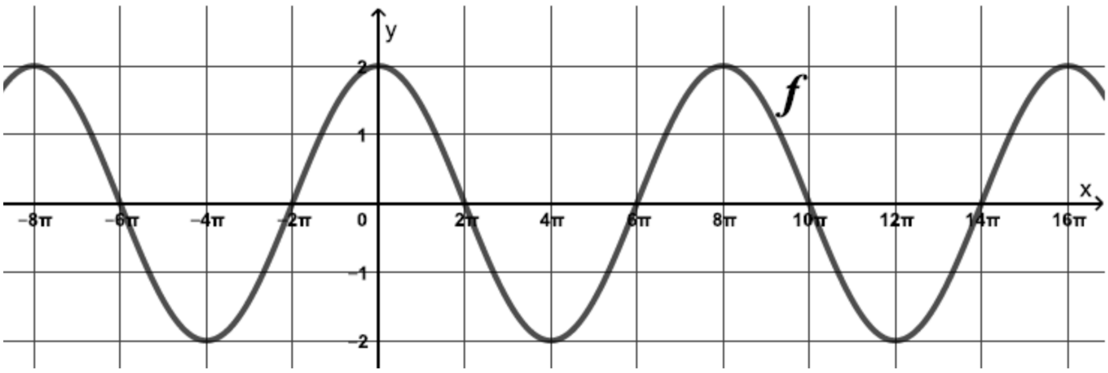
e) (2 pts) Minimum : $f(x) = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = -2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x = \pi + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4\pi + k8\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

f) (2 pts) Maximum : $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x = 0 + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k8\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

g) (4 pts) Graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-8\pi ; 16\pi]$.



Correction Exercice 4 (10 points)

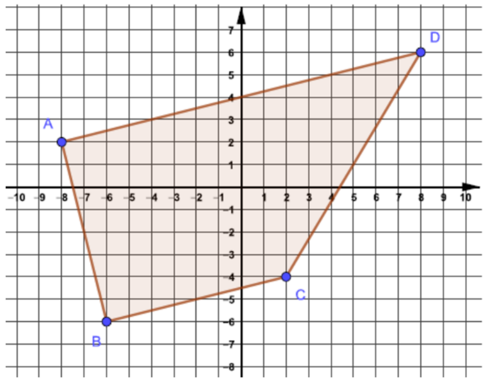
a) (*4 pts*) $f(x) = 2^x$ car $f(1) = 2$ $j(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ car $j(-1) = \frac{1}{2}$

$g(x) = \log_4(x)$ car $g(4) = 1$ $h(x) = -\log_4(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x)$ (symétrie)

b.1) (*3 pts*) $A_f = 3$; $T_f = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega = 2$; $f(0) = 3$ donc $f(x) = 3 \cdot \cos(2 \cdot x)$

b.2) (*3 pts*) $A_g = 2$; $T_g = 6\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = 6\pi \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{3}$; $g(0) = 0$ donc $g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot x\right)$

Correction Exercice 5 (27 points)



a) (*1 pt*) Dessin

b) (*4 pts*)

- Angle droit : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 16 + (-8) \cdot 4 = 0$ donc $\widehat{BAD} = 90^\circ$
- Une paire de droite parallèles : $det\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}\right) = \begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ donc $\overrightarrow{AD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.

c) (*4 pts*)

$$\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CD} = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \bullet \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \cdot cos\left(\widehat{DCB}\right) \Leftrightarrow \widehat{DCB} = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\| \bullet \left\|\overrightarrow{CD}\right\|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{-68}{\sqrt{68} \cdot \sqrt{136}}\right) = 135^\circ$$

d) (*3 pts*) $Périmètre = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\| + \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{68} + \sqrt{136} + \sqrt{68} + \sqrt{272} \cong 44{,}65$

e) (*3 pts*) $Aire\ du\ triangle\ BCD = \frac{1}{2} \cdot \left|det\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-68| = 34$

f) (*3 pts*) $ABED\ est\ un\ rectangle \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $E(10;-2)$

g) (*3 pts*) $$\vec{p} = \frac{\overrightarrow{DC} \bullet \overrightarrow{DB}}{\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{(-14)^2 + (-12)^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42/5 \\ -36/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8{,}4 \\ -7{,}2 \end{pmatrix}$$

h) (*3 pts*) Test : A, D et F sont-ils alignés $\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AF}\right) = 0$

$det\left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AF}\right) = \begin{vmatrix} 16 & 38 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 16 \cdot 10 - 4 \cdot 38 = 160 - 152 = 8 \neq 0$ donc A, D et F ne sont pas alignés.

i) (*3 pts*) Milieu du segment $[AC]$: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $M(-3;-1)$

Milieu du segment $[BD]$: $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $N(1;0)$

Les coordonnées du point N ne sont pas égales aux coordonnées du point M
donc les diagonales du trapèze $ABCD$ ne se coupent en leurs milieu.

Correction Exercice 6 (8 points)

a) (2 pts)

$$log_b\left(\frac{x}{3y^2}\right) = log_b(x) - log_b(3y^2)$$

$$= log_b(x) - \left[log_b(3) + log_b(y^2)\right]$$ **VRAI**

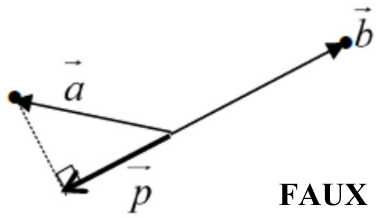
$$= log_b(x) - log_b(3) - 2 \cdot log_b(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

b) (2 pts) Contre-exemple :

Si $x = \frac{\pi}{2}$ alors $sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = sin(\pi) = 0 \quad et \quad 2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$ **FAUX**

c) (2 pts) Contre-exemple :

Notons $\vec{p}$ la projection orthogonale
de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$. $\vec{p}$ et $\vec{b}$ n'ont pas le même sens.



FAUX

d) (2 pts)

$$cos^2(x)\left(tan^2(x) + 1\right) = cos^2(x)\left(\frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} + 1\right)$$

$$= \frac{\cancel{cos^2(x)}\, sin^2(x)}{\cancel{cos^2(x)}} + cos^2(x) = sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

VRAI