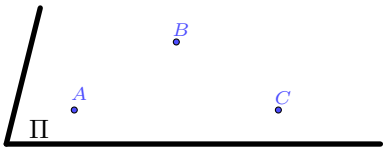
Équations cartésiennes d'un plan dans $\mathbb{R}^3$

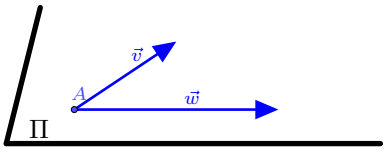
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Un axiome de la géométrie euclidienne énonce : par trois points non alignés de l'espace, il passe un unique plan. Il suffit donc de trois informations pour décrire un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Situation 1 : Le plan Π passe par trois points distincts A, B et C.



Situation 2 : Le plan Π passe par le point A et admet $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme vecteurs directeurs ($\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires).



Remarque : On passe facilement de la situation 1 à la situation 2 en posant $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{w}$.

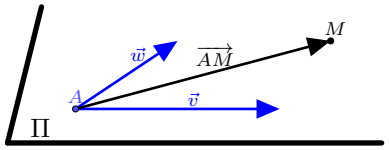
Situation 3 : Le plan Π passe par le point A et admet $\vec{n}$ comme vecteur normal ($\vec{n} \perp \Pi$).



Comment décrire un plan à l'aide d'une équation cartésienne selon que l'on se trouve dans la situation (1)2 ou la situation 3 ?

Soit Π un plan passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et admettant $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ pour vecteurs directeurs (non colinéaires), soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan Π, et soit $M(x, y, z)$ un point mobile de $\mathbb{R}^3$.

A) Situations 1 et 2 : Équation cartésienne du plan donné par un de ses point et deux de ses vecteurs directeurs supposés non-colinéaires.



$$M(x; y; z) \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow \quad det(\overrightarrow{AM}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

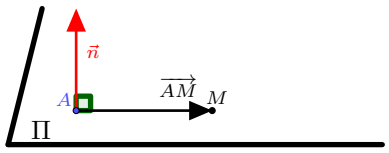
$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & v_1 & w_1 \\ y - a_2 & v_2 & w_2 \\ z - a_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Après développement et réduction du déterminant à gauche de l'égalité, on obtient une équation linéaire en x, y et z. C'est une équation cartésienne de Π.

Exemple : Soit le point $A(1, 2, 3)$, et les vecteurs directeurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'équation cartésienne du plan est donnée, pour un point $M(x, y, z)$ du plan, par :

$$M(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & 1 & 0 \\ y - 2 & 1 & 1 \\ z - 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - 1) - ((y - 2) - (z - 3)) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 2 = 0.$$

B) Équation cartésienne du plan donné par un de ses point et un de ses vecteurs normaux.



$$\begin{array}{lcl} M(x;y;z) \in \Pi & \Leftrightarrow & \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x-a_1 \\ y-a_2 \\ z-a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow & (x-a_1)a + (y-a_2)b + (z-a_3)c = 0 \\ & \Leftrightarrow & ax + by + cz - (a_1a + a_2b + a_3c) = 0 \end{array}$$

Exemple : Soit le point $A(1,2,3)$, et et le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan. L'équation cartésienne du plan est donnée, pour un point $M(x,y,z)$ du plan, par :

$$M(x,y,z) \in \Pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)+(-1)(y-2)+z-3 = 0 \Leftrightarrow x-y+z-2 = 0.$$