Théorie résumé (5,6,7) : Les pentes et les droites

1 Les droites 2

1.1 Pente entre deux points du plan 2

1.2 Pente et ordonnée à l'origine d'une droite (non verticale) 3

1.3 Représenter graphiquement une droite à partir d'un point et de la pente 3

2 Les équations de droites 4

3 Comment représenter graphiquement une droite à partir de son équation ? 4

3.1 Méthode 1: Construction graphique (similaire au paragraphe 1.3) 4

3.2 Méthode 2: Construction à l'aide du tableau de valeur 5

4 Déterminer l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique 6

4.1 Méthode 1 : Calcul de pente à l'aide des coordonnées de 2 points 6

4.2 Méthode 2 : Lecture graphique 7

5 Les droites particulières (horizontales ou verticales) 7

5.1 Droites horizontales 7

5.2 Droites verticales 8

6 Les droites parallèles et perpendiculaires 8

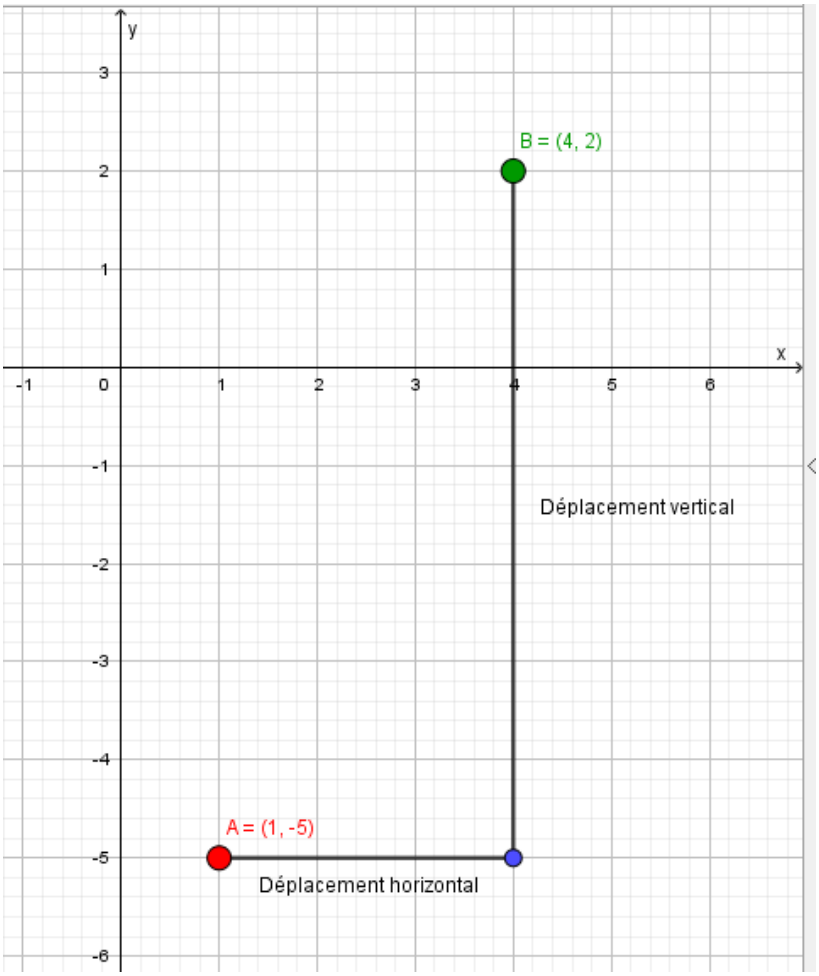
1 Les droites

1.1 Pente entre deux points du plan

Soient $A(x_a\,;y_a)$et $B(x_b\,;y_b)$ deux points du plan non alignés verticalement.

La pente m entre A et B est définie par : $\boxed{m = \frac{distance\ verticale}{distance\ horizontale} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}}$

Exemple : calculer la pente entre les points A (1 ;-5) et B (4 ;2)



$$m = \frac{(-5)-2}{1-4} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} \text{ ou } \quad m = \frac{2-(-5)}{4-1} = \frac{7}{3}$$

1.2 Pente et ordonnée à l'origine d'une droite (non verticale)

Soit *d* une droite non verticale du plan, $A(x_a\ ;y_a)$ et $B(x_b\ ;y_b)$ appartiennent à d (c'est-à-dire qui se trouvent sur d):

► **la pente m de *d*** est $m = \frac{distance\ verticale}{distance\ horizontale} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$

> ***Remarque*** **:** *La pente d'une droite ne dépend pas du choix des points de la droite utilisés pour la calculer, on peut donc choisir n'importe quel point A et B à condition qu'ils soient situés sur la droite.*

► **l'ordonnée à l'origine (o.o.) de d :** la seconde coordonnée (l'ordonnée) du point d'intersection de *d* avec l'axe des ordonnées (axe vertical [Oy)) ;

Exemple : déterminer la pente et l'o.o. de la droite d passant par les points A(0 ;1) et B(3 ;2)

►La pente de d est : $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{2-1}{3-0} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

►Comme d passe par le point A (0 ;1), on sait que l'ordonnée à l'origine de d est 1.

1.3 Représenter graphiquement une droite à partir d'un point et de la pente

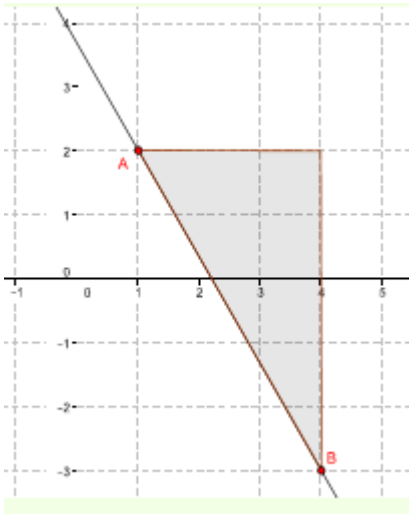
Si on connaît un point de la droite et sa pente, on peut construire cette droite en obtenant un second point.

Exemple : représenter graphiquement la droite d passant par A(1 ;2) et de pente $m = -\frac{5}{3}$

$m = -\frac{5}{3}$, on peut obtenir un deuxième point B en partant de A et en se déplaçant

- de 3 unités vers la droite (horizontalement dans le sens de l'axe)
- et de 5 unités vers le bas (verticalement dans le sens opposé.

Ainsi on trouve une second point de la droite: B(4;-3).



2 Les équations de droites

Une droite *d* non verticale a pour expression algébrique une équation de la forme $y = mx + n$ où m représente la pente de la droite et n son ordonnée à l'origine.

3 Comment représenter graphiquement une droite à partir de son équation ?

On présente ici 2 méthodes pour représenter une droite d'équation de la forme y=ax+b. Même si elles sont équivalentes, la seconde méthode est plus générale et systématique.

3.1 Méthode 1: Construction graphique (similaire au paragraphe 1.3)

Pour représenter graphiquement une droite d'équation y=ax+b :

Etape 1 : on **place l'ordonnée à l'origine (ou un point facile à placer)**, c'est à dire le point de coordonnées (0,b).

Etape 2 : on part de **l'ordonnée à l'origine et on se déplace de la pente a** qui correspond à un déplacement vertical puis horizontal..On obtient le second point de la droite.

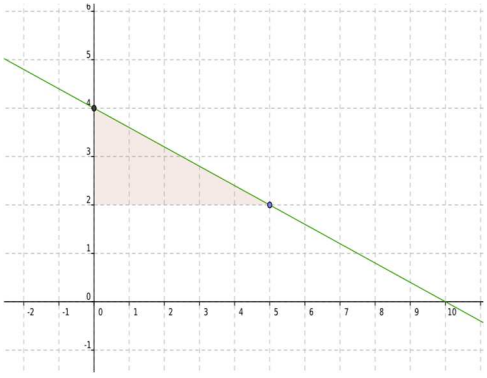
$$Pente = \frac{V}{H} = \frac{distancedudéplacementverticalentreles2pointschoisis}{distancedudéplacementhorizontalentreles2pointschoisis}$$

Etape 3 : on **relie** les deux points obtenus.

Remarque : Le signe – est interprété comme un déplacement dans le sens opposé à celui de l'axe concerné.

Exemple : Représenter graphiquement la droite d'équation $y = -\frac{2}{5}x + 4$

La pente est donc $-\frac{2}{5}$ et l'ordonnée à l'origine 4.



Etape 1 : Placer l'ordonnée à l'origine 4 sur l'axe vertical des ordonnées; cela donne un premier point de *d : (0;4).*

Etape 2 :A partir de ce point, on construit un deuxième point de d de telle sorte que la pente entre ces deux points soit égale à $-\frac{2}{5}$; comme $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$, on peut choisir d'associer le signe – au numérateur ou au dénominateur. Si on fait le choix du numérateur, le déplacement vertical entre les deux points est égal à -2 et le déplacement horizontal est égal à 5.

Etape 3 :Il suffit enfin de relier ces deux points pour obtenir d.

Remarque : généralement on est plus précis avec 3 points.

3.2 Méthode 2: Construction à l'aide du tableau de valeur

Pour représenter graphiquement une fonction de degré 1 de la forme y=ax+b :

Etape 1 : On **construit un tableau de valeur** et on **choisit 3 valeurs de x** , x_1, x_2, x_3qui vont représenter les abscisses des 3 points de la droite.

Etape 2: On **calcule pour chaque x choisit son image**, c'est à dire $y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b, y_3 = ax_3 + b$.

Etape 3: On **place dans le repère les 3 points** de coordonnées(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

Etape 4: On **trace la droite** d en reliant les 3 points.

***Exemple*:** Représenter graphiquement la droite d'équation y=2x-1.

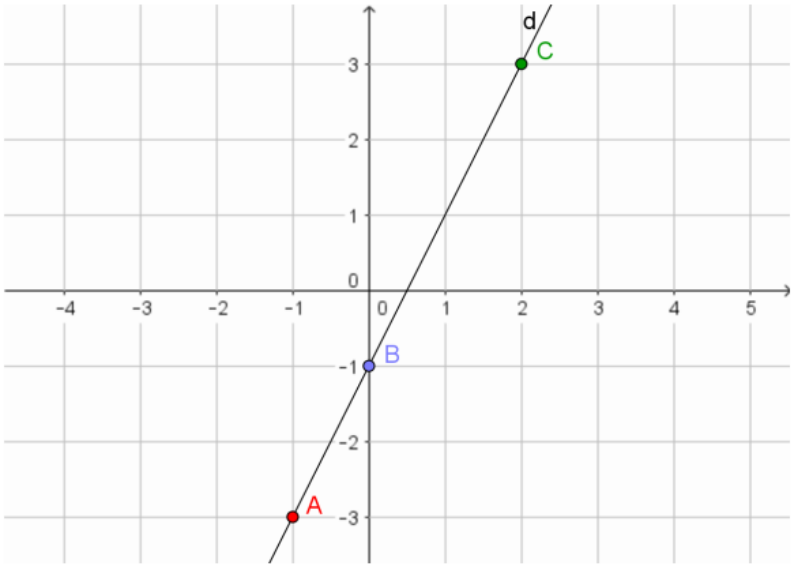
Etape 1 : On construit le tableau et on choisit 3 valeurs de x :-1; 0 et 2.

x	**- 1**	**0**	**2**
y			

Etape 2: On calcule respectivement l'image de -1, 0 et 2 :

x	**- 1**	**0**	**2**
y	2·**(-1)**-1=**- 3**	2·**0**-1=**-1**	2·**2**-1=**3**

Etape 3 et 4 :On place dans le repère les 3 points de coordonnées $A(-1,-3)$, $B(0,-1)$, $C(2,3)$et on relie les points entre eux.



4 Déterminer l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique

4.1 Méthode 1 : Calcul de pente à l'aide des coordonnées de 2 points

Soit la droite d'équation $y = ax + b$. Pour calculer la pente a et l'ordonnée à l'origine on procède en 3 étapes :

Etape 1 : On **choisit 2 points situés sur la droite** $A(x_a; y_a)$et $B(x_b; y_b)$.

Etape 2 : La pente de la droite est alors le **rapport entre la différence des coordonnées** de ces points : $Pente = a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$

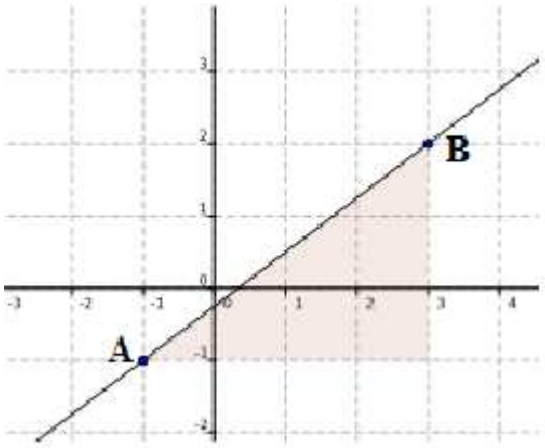
Etape 3 : On **calcule l'ordonnée à l'origine** en substituant dans l'équation x et y par les coordonnées du point A (ou B) qui appartient à la droite : $y_A = ax_A + b$.(ou $y_B = ax_B + b$)

On déduit $b = y_A - ax_A$(ou $b = y_B - ax_B$)

Etape 4 : on écrit l'équation finale de la droite

Exemple: Déterminer l'équation de la droite ci-contre :

1. On identifie deux points dont on est certain des coordonnées ; ici A(-1 ;-1) et B(3;2).
2. On calcule la pente entre ces deux points : $\mathrm{p} = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$.
   Cette droite est donc d'équation $\mathrm{y} = \frac{3}{4}\mathrm{x} + \mathrm{b}$; reste à trouver b …
3. Le point B(3;2) appartient à la droite, donc le couple (3;2) est solution de l'équation $\mathrm{y} = \frac{3}{4}\mathrm{x} + \mathrm{b}$; on substitue alors x et y par respectivement 3 et 2 : $2 = \frac{3}{4} \cdot 3 + \mathrm{b} \Leftrightarrow \mathrm{b} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$.
4. $\mathrm{y} = \frac{3}{4}\mathrm{x} - \frac{1}{4}$ est l'équation de la droite d.

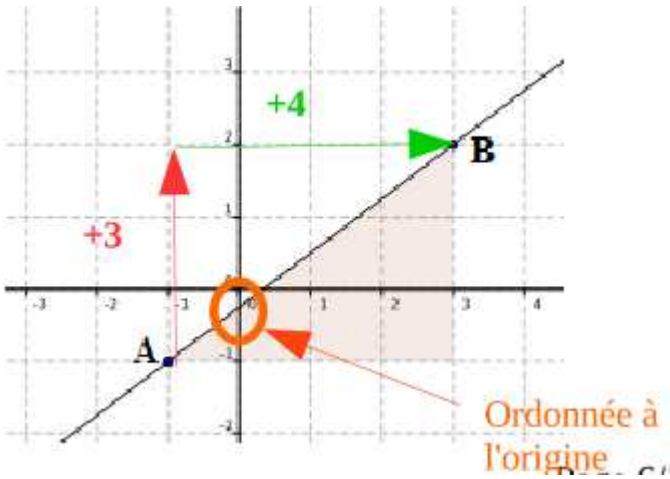


4.2 Méthode 2 : Lecture graphique

Il est possible de lire graphiquement la pente et l'ordonnée à l'origine d'une droite. Toutefois cette méthode a une portée limitée car parfois il n'est pas possible de lire et choisir des points aux coordonnées entières.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. On choisit 2 points A *et* B. sur la droite.
On peut lire graphiquement :

- l'ordonnée à l'origine $-\frac{1}{4}$ point d'intersection entre la droite et l'axe y.

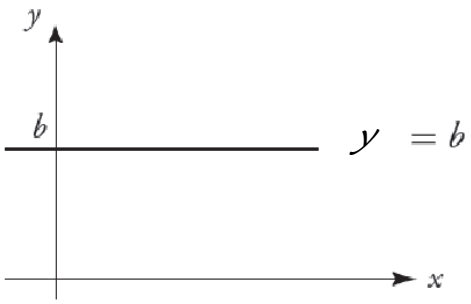


- la pente : on part de A, on effectue un déplacement vertical de 3 (ou horizontal de 4) puis un déplacement horizontal de 4 (ou vertical de 3) pour arriver à B. La pente est donc $\frac{3}{4}$

5 Les droites particulières (horizontales ou verticales)

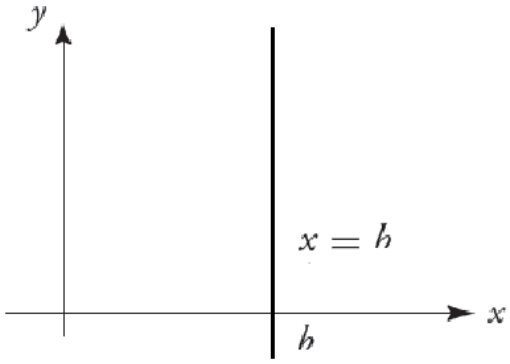
5.1 Droites horizontales

L'équation d'une droite horizontale s'écrit y=b. Son graphe est une droite parallèle à l'axe des *x* qui passe par le point (0;b).
Dans ce cas, la pente de d est nulle.



5.2 Droites verticales

Une droite verticale est une droite ayant une pente infinie. Elle se définit par *x = h. La pente de d est infinie.*



6 Les droites parallèles et perpendiculaires

Soit deux droites d_1 et d_2 d'équations $y_1 = a_1x + b_1$et $y_2 = a_2x + b_2$

$d_1 \parallel d_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$

Soit deux droites d_1 et d_2 d'équations $y_1 = a_1x + b_1$et $y_2 = a_2x + b_2$

$d_1 \perp d_2$ si et seulement si $a_1 = -\frac{1}{a_2}$ (ou $a_1 \cdot a_2 = -1$)

Exemples :

