Théorie résumée : fonctions de degré 2

1/ Définition

Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction du type :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to ax^2 + bx + c = f(x)$$

où $a \neq 0$, b et c sont trois constantes réelles quelconques $a \in \mathbb{R}^*$, $et\ b, c \in \mathbb{R}$

2/ Exemple de fonction polynomiale de degré 2

La fonction définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ est une fonction de degré 2. $(a = -1\ ; b = 2\ ; c = 3)$

3/ Étude générale d'une fonction de degré 2

1) Le domaine de définition d'une fonction de degré 2 est. $\mathbb{R}$

2) Le graphique d'une fonction de degré 2 est **une parabole** symétrique.

3) Pour déterminer les zéros, il faut résoudre l'équation : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c = 0}$

Une fonction de degré 2 peut, selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, avoir respectivement :

- **Deux zéros** : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $lorsque\ \Delta > 0$

  Le graphique de f coupe l'axe horizontal en deux points : $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$

- **Un zéros** : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ $lorsque\ \Delta = 0$

  Le graphique de f coupe l'axe horizontal en un point : $(x_0;0)$

- **Aucun zéro** : $lorsque\ \Delta < 0$

  Le graphique de f ne coupe pas l'axe horizontal.

4) L'ordonnée à l'origine d'une fonction de degré 2 est $\boldsymbol{c}$. En effet : $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$

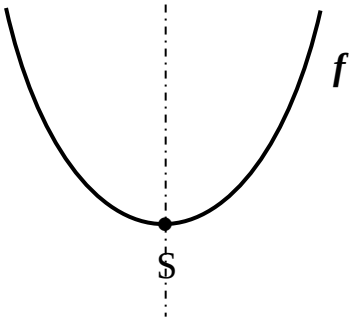
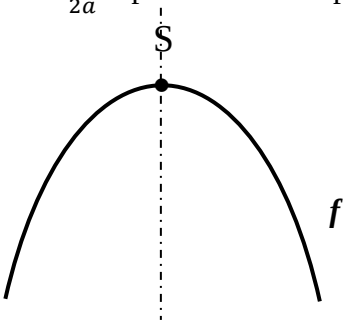
Le graphique de f coupe l'axe vertical en un point : $(0;c)$

5) Théorème

Toute fonction polynomiale de degré 2 admet **un axe de symétrie**.

Cet axe est la droite verticale d'équation $\boldsymbol{x = -\dfrac{b}{2a}}$

6)

Si $\boxed{a>0}$ la fonction de degré 2 est d'abord décroissante et ensuite croissante, l'axe de symétrie $\frac{-b}{2a}$ séparant les deux parties.	Si $\boxed{a<0}$ la fonction de degré 2 est d'abord croissante et ensuite décroissante, l'axe de symétrie $\frac{-b}{2a}$ séparant les deux parties.
	
Le graphique est une parabole symétrique **convexe**.	Le graphique est une parabole symétrique **concave**.

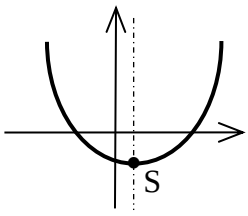
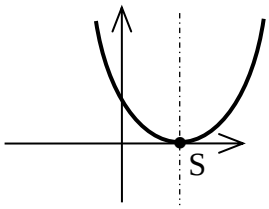
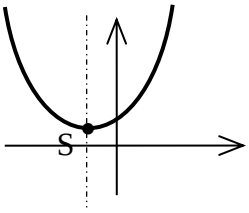
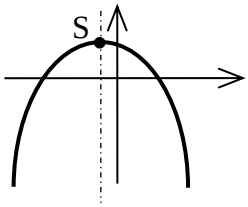
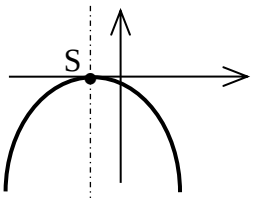
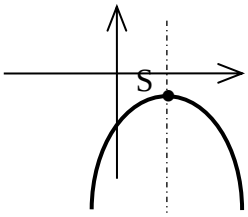
7) Le point du graphique de *f* qui sépare la partie croissante de la partie décroissante, s'appelle le **sommet S de la parabole**.

Le sommet de la parabole a donc comme coordonnées : $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

8) Si $a<0$ alors *f* admet un **maximum** en $x=-\frac{b}{2a}$ sur $\mathbb{R}$ et $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur **maximale** de *f*.

Si $a>0$ alors *f* admet un **minimum** en $x=-\frac{b}{2a}$ sur $\mathbb{R}$ et $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ est la valeur **minimale** de *f*.

Résumé des diverses situations pour les fonctions de degré 2 :

	Δ > 0	**Δ = 0**	**Δ < 0**
a > 0			
a < 0			

4/ Exemples d'étude de fonction de degré 2

4.1/ Étude de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad (a = -1; b = 2; c = 3)$

1) Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$

2) Le graphique de f est une parabole (symétrique).

3) Zéro(s) de f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16 > 0 \Rightarrow$ *2 solutions*.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = 3$ *et* $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = -1$ donc $Z_f = \{-1\,; 3\}$

Le graphique de f coupe l'axe horizontal en deux points : $(-1;0)$ *et* $(3;0)$

4) Ordonnée à l'origine de f : $f(0) = 3$
Le graphique de f coupe l'axe vertical en un point : $(0;3)$

5) La parabole possède un axe de symétrie en : $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1$ donc x=1

6) $a = -1 < 0$; la parabole est concave.

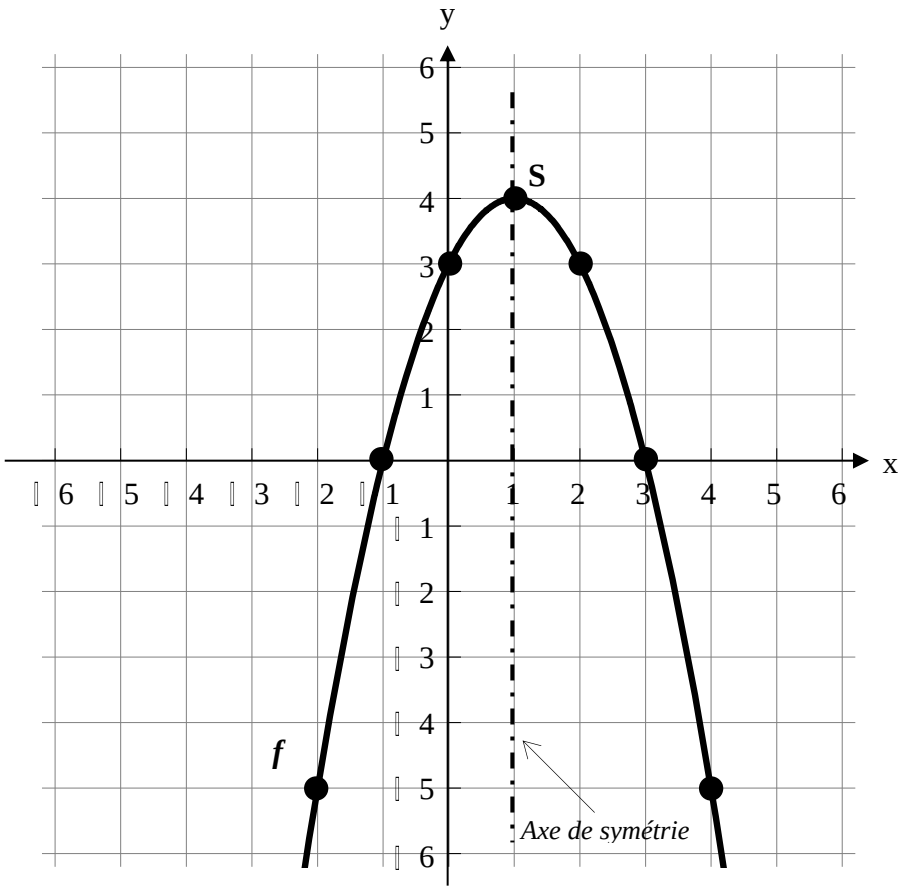
7) Le sommet de la parabole a pour coordonnées : $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = S(1; f(1))$

$f(1)) = -(1)^2 + 2\,(1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

donc S(1 ;4)

8) f admet un maximum en $x = 1$ et 4 est la valeur maximale de f.

9) On utilise les résultats obtenus aux points ***1)***, ***2)***, ***3)***, ***4)***, ***5)***, ***6)***, ***7)*** et ***8)*** pour **tracer le graphique de *f***.



Calcul supplémentaire (pour tracer plus précis la courbe et obtenir un point supplémentaire) :
$f(-2) = f(4) = -5$
donc (-2 ;-5)

4.2/ Exemple vidéo : étude de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 8$

http://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym--e/complements/ch07/videos/VII-e

5/ Les différentes formes d'écriture possibles d'une fonction de degré 2

Une fonction du second degré peut s'écrire sous 3 formes. Selon la forme certaines informations peuvent être obtenues directement.

Forme	Ecriture algébrique	Avantage
développée	$f(x) = ax^2 + bx + c$	• Ecriture toujours possible • Lecture rapide de l'o.o (i.e c)
canonique	$f(x) = a(x-k)^2 + m$, avec $k = \frac{-b}{2a}$ et $m = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ et $S(k\,;m)$ sommet de la parabole	• Ecriture toujours possible • Lecture rapide des coordonnées du sommet de la parabole et de l'axe de symétrie (k)
factorisée	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec x_1 et x_2 les zéros de f	• Lecture rapide des zéros de la fonction.

6/ Intersections entre deux fonctions de degré 1 et 2

Pour déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersections de 2 fonctions f et g il faut résoudre le système $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ c'est-à-dire $f(x) = g(x)$

La méthode de résolution est la même que celle vue pour les fonctions de degré 1(utilisation de la méthode par comparaison). Dans le cas de fonctions de degré 2, la différence est qu'il faut résoudre une équation de degré 2.

Exemple : déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection des fonctions f et d définies par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 2$

Il faut résoudre $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases}$

On utiliser la méthode par comparaison et on a $\frac{1}{2}x + 1 = x^2 + x - 2 \iff$

$$0 = -\frac{1}{2}x - 1 + x^2 + x - 2 \iff$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

C'est une équation du second degré : a=1, b=1/2 et c=-3

On applique la méthode de Viète :

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$\Delta = \frac{49}{4} > 0$ donc 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}{2}$$

$$x_1 = -2 \text{ et } x_2 = \frac{3}{2}$$

On remplace x_1 dans la 1ère équation pour trouver y_1 : $y_1 = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0$

On fait de même avec x_2 : $y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{7}{4}$

D'où $S = \{(-2\,;0)\,;\ (\frac{3}{2};\frac{7}{4})\}$

Les points d'intersection sont donc (-2 ;0) et $(\frac{3}{2};\frac{7}{4})$

