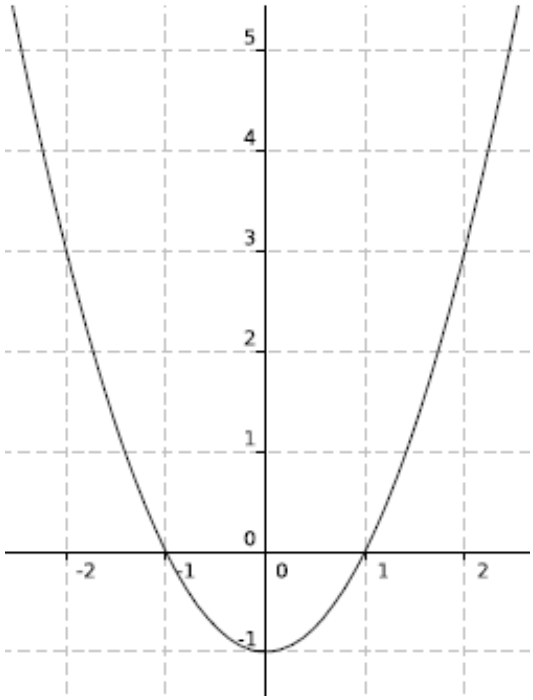
Activité 9 : Images et préimages, ordonnée à l'origine et zéros

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$. On donne sa représentation graphique :



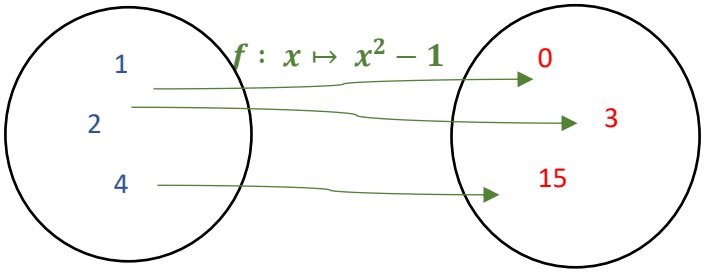
<u>Vocabulaire</u> :

Image : Si l'on choisit $x = 2$ dans l'ensemble de départ, alors *f* fait correspondre à 2 le nombre $2^2 - 1$, soit 3. On dit que 3 est **l'image** de 2 par *f* et on note $f\ (2) = 3$.

Pré-image : Réciproquement, on dit que **2 est une préimage de 3** par *f*.

Les images appartiennent à l'ensemble d'arrivée, les préimages à celui de départ.

<u>Illustration</u> :



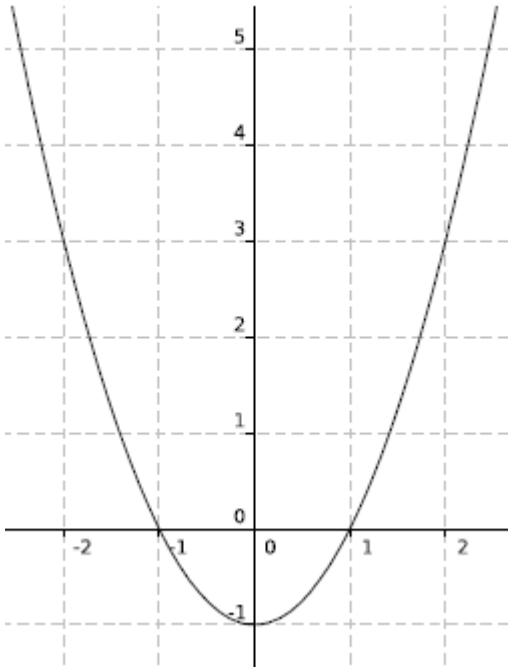
Ensemble de départ
X
Ensemble des préimages

Ensemble d'arrivée
Y
Ensemble des images

<u>PARTIE 1</u> : Sur le graphique, indiquer comment se détermine l'image de 2 par *f*.
(Laisser les traits de constructions).

PARTIE 2 : On donne à nouveau la représentation graphique de la fonction f définie par

$$f : x \mapsto x^2 - 1$$



a) Lire graphiquement l'image de 1,5 (laisser les traits de construction sur le graphique).

b) Calculer l'image de 1,5.

c) Existe-t-il d'autre(s) préimage(s) de 3 que 2? Comment noter ce résultat ?

d) Pourquoi parle-t-on de l'image et d'une préimage, et non de l'image et de la préimage, ou encore d'une image et d'une préimage ?

e) Déterminer les préimages de – 1 et de – 2.

f) Déterminer sur le graphique l'**ordonnée à l'origine** de f.

g) Déterminer l'**ensemble des zéros** de f.

Théorie : image, préimage(s), ordonnée à l'origine et zéros

1/ Définitions et notations

1.1 Image et Préimage(s)

Soit *f* une fonction, *a* un élément de l'ensemble de départ et *b* un élément de l'ensemble d'arrivée tels que *f* (*a*)=*b,* alors :

□ *b* est **l'image** de *a* par *f* ;

□ *a* est **une préimage** de *b* par *f*.

1.2 Ordonnée à l'origine et Ensemble des zéros

L'**ordonnée à l'origine** de *f*, parfois notée o.o., est l'image de 0 par *f*, soit *f* (0)

L'**ensemble des zéros** de *f*, note Z_f , est l'ensemble des préimages de 0 par *f.*

Remarque importante : l'image, quand elle existe, est toujours unique (par la définition d'une fonction), alors qu'un élément *b* de l'ensemble d'arrivée peut avoir aucune, une ou plusieurs préimages. On parle de l'**ensemble des préimages** de *b*.

1.3 Notation :

L'expression « *a* est l'unique préimage de *b* par *f* » se note $\boldsymbol{f^{-1}(b) = \{a\}}$ **.**

L'expression « *c* et *d* sont les deux préimages de *b* par *f* » se note $\boldsymbol{f^{-1}(b) = \{c; d\}}$

2 / Comment déterminer une image et préimage(s) ?

2.1 Quand la fonction est définie par un tableau de valeurs

→ Il suffit de lire la 1ère ou 2ème ligne du tableau.

Exemple :

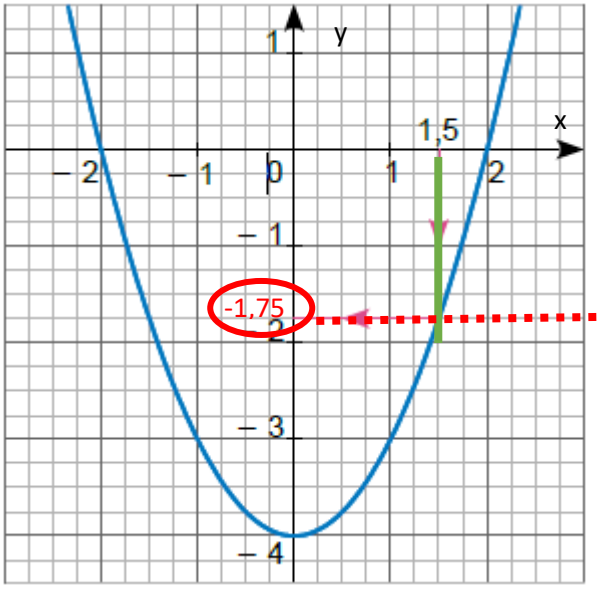
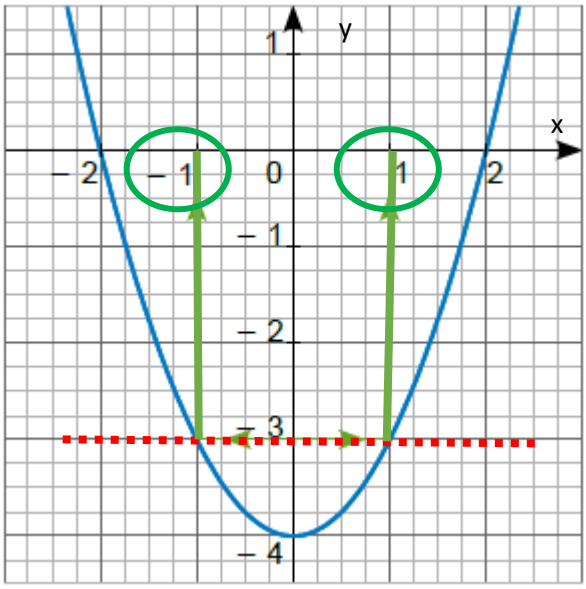
x	−5,25	**−3**	−1,75	0	2	**5,5**	**8**
***h* (*x*)**	−358	**−125**	3	7	12,5	**−125**	20

●Trouver l'image de 8 par *h*: chercher 8 sur la 1ère ligne et **lire l'image sur la 2ème ligne** *h*(8) = 20.

●Trouver une préimage de -125 par *h*: chercher -125 sur la 2ème ligne et **lire une ou des préimage sur la 1ère ligne :** $\{-3\,;5{,}5\} \subseteq h^{-1}(-125)$

2.2 Quand la fonction est définie par une représentation graphique

→ Pour l'image d'un nombre n, il faut lire l'ordonnée du point situé sur la courbe représentative de la fonction ayant pour abscisse n.
→ Pour la(les) préimage(s) d'un nombre n, il faut lire la (les) abscisses du (des) points situés sur la courbe représentative de la fonction ayant pour ordonnée n.

Déterminer l'image de 1.5 par g	***Déterminer la (les) pré-images de -3 par g***
	
⇔ Chercher l'ordonnée du point qui a pour **abscisse 1,5**. ⇔	⇔ Chercher l'abscisse (ou les abscisses) du (ou des) point(s) ayant pour **ordonnée − 3**. ⇔
1-Tracer la droite parallèle à l'axe des ordonnées (y) passant par le point d'abscisse **1,5**. 2-Tracer la droite parallèle à l'axe des abscisses (x) passant par le point d'intersection de la courbe de *g* et de la droite précédente. Cette parallèle coupe l'axe des ordonnées (y) en **− 1,75**. 3- Conclure que -1.75 est l'image de 1,5 par *g* donc $g(1,5) = -1,75$.	1-Tracer la droite parallèle à l'axe des abscisses (x) passant par le point d'ordonnée **− 3**. 2-Tracer les droites parallèles à l'axe des ordonnées (y) passant par les points d'intersection de la courbe de *g* et des droites précédentes. Ces parallèles coupent l'axe des abscisses (x) en **− 1** et **1**. 3- Conclure que **- 3** a deux préimages par la fonction *g* qui sont **− 1 et 1** donc $g^{-1}(-3) = \{-1; 1\}$

2.3 Quand la fonction est définie par une expression algébrique

→ Pour calculer l'image d'un nombre n il faut remplacer x par n et calculer.
→ Pour calculer la / les préimages d'un nombre il faut remplacer y par n et résoudre l'équation.

Soit la fonction *f* définie par $f\ (x) = 2x + 4$.	
Déterminer l'image de -1 par f	***Déterminer la(les) pré-images de 6 par f***
Remplacer x par -1 et calculer f(x)	*Remplacer y par 6 et résoudre l'équation* *y =f(x)*
$f\ (\mathbf{-1}) = 2 \cdot (\mathbf{-1}) + 4 \iff$ $= -2 + 4 \iff$ $= \mathbf{2}$	$\mathbf{6} = 2x + 4 \iff$ $-2x = 4 - 6 \iff$ $x = \frac{-2}{-2} \iff$ $x = \mathbf{1}$
L'image de **-1** par f est **-2**	La préimage de **6** par f est **1**

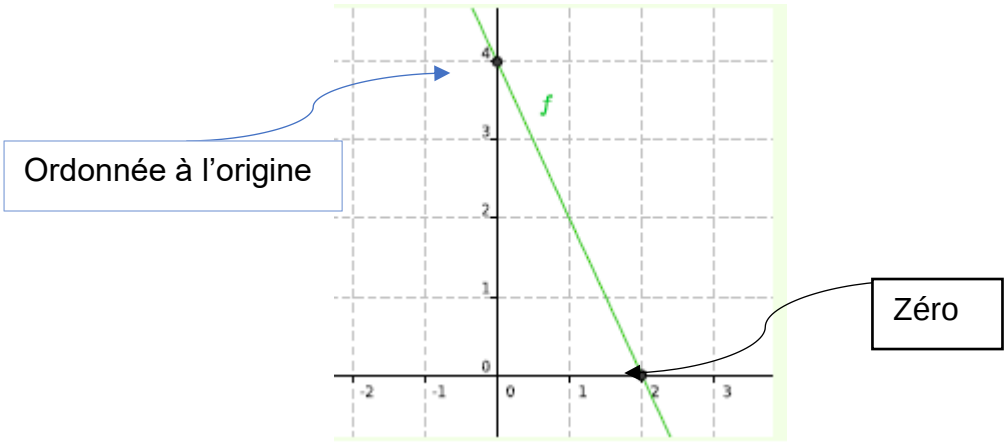
➔ *Au prochain chapitre révision des équations*

3/ Interprétation graphique de l'ordonnée à l'origine et de l'ensemble des zéros

- L'ordonnée a l'origine est ; si elle existe ; la seconde coordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de *f* avec l'axe des ordonnées (axe y) :
- L'ensemble des zéros donne la(les) première(s) coordonnée(s) du(des) point(s) d'intersection(s) de la courbe représentative de *f* avec l'axe des abscisses (axe x).

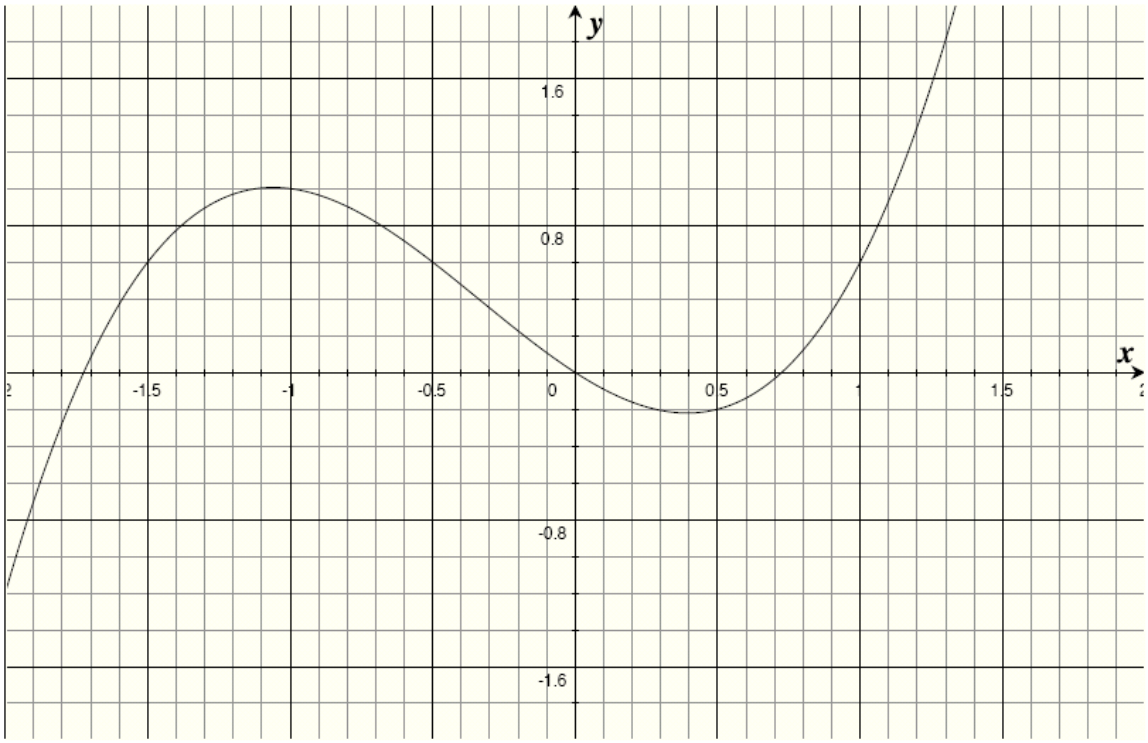
Exemple : Soit la fonction *f* définie par $f\ (x) = 2x + 4$

- *o.o : image de 0 par f donc f(0)= 4*
- *ensemble des zéros :* $0 = 2x + 4 \iff x = -2$ donc $Z_f = \{-2\}$



Exercices d'applications

Exercice 1 : Voici une fonction f représentée dans le repère suivant (attention à la graduation):



Par lecture graphique, en laissant les traits de constructions, déterminer :

1) image de 0.5 : ……..

2) image de 1 : ……..

3) ordonnée à l'origine : . ……..

4) zéros de f : ……..

5) pré-image(s) de 0,6 : ……..

6) image de 0 : ……..

7) pré-image(s) de 0 : ……..

8) image de -1 : ……..

Exercice 2: Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 3$

1) Remplir le tableau de valeurs ci-dessous :

x	- 4	- 3	- 2	-1	0	1	2	3
f(x)	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

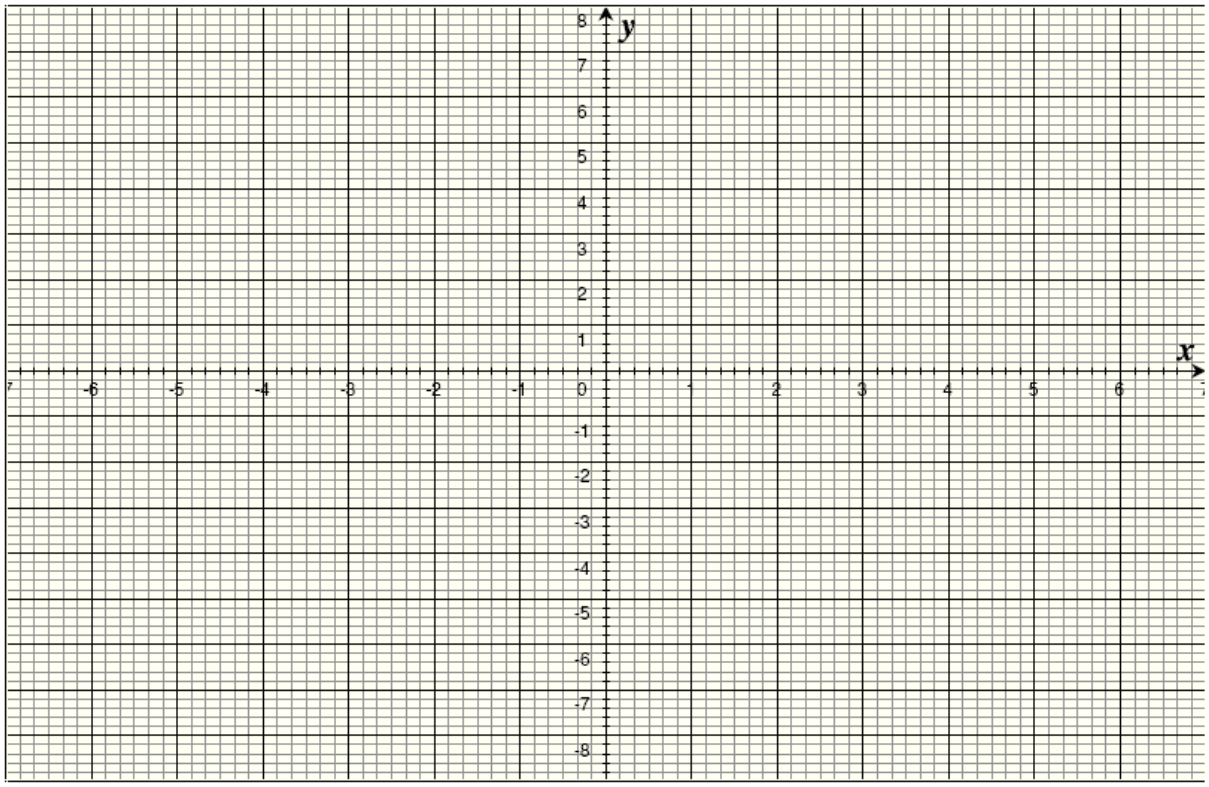
2) Lire sur le tableau et indiquer le résultat en utilisant la notation adéquate :

L'image de 1 :……..

L'image de -3 :…….

La (les) pré-images de -3 :…….

3) Représenter f dans le repère suivant :



4) Entourer l'ordonnée à l'origine et encadrer le ou les zéros sur le graphique même.

5) Noter l'ensemble des zéros :

Exercice 3: On considère la fonction $g(x) = 2x - 3$. Calculer :

1) L'image de 1 :

2) L'ordonnée à l'origine :

3) L'image de - 6 :

4) La ou (les) éventuelle(s) pré-images de 5 :