

Equations rationnelles

Classeur BS : 1- Arithmétique - Algèbre

1. Equation (BS 9.1 p.36 ; 9.2 p.37 ; 9,3 p.38-40)

Une **équation** est l'égalité de deux expressions littérales appelées les **membres** de l'équation. Les variables qui représentent des nombres indéterminés sont appelées les **inconnues** de l'équation. Le **degré d'une équation** est égal au plus haut degré des deux polynômes qui la constituent.

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie.

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Résoudre une équation consiste à trouver toutes ses solutions. Pour résoudre une équation, on la transforme en équations équivalentes plus simples jusqu'à l'obtention de la solution.

Pour obtenir des équations équivalentes, on applique des **règles d'équivalences** :

- On peut développer ou réduire chaque membre de l'équation.
- On peut additionner ou soustraire un nombre ou une expression algébrique à chacun des deux membres de l'équation.
- On peut multiplier ou diviser chacun des deux membres d'une équation par un même nombre non nul ou une même expression différente de 0.

Une équation peut admettre : aucune solution ($S = \emptyset$), une solution ($S = \{x_1\}$), plusieurs solutions ($S = \{x_1; x_2; \dots\}$), une infinité de solution ($S = \mathbb{R}$).

Exemples : $6x = 12$ et $4x + 6 = 12 + x$ sont deux équations équivalentes. Leur ensemble de solutions est l'ensemble constitué du nombre 2 ($S = \{2\}$).

$(x+5)(x-3) = 0$ et $x^2 + 2x = 15$ sont deux équations équivalentes. Leur ensemble de solutions est l'ensemble constitué des nombres -5 et 3 ($S = \{-5; 3\}$).

$8x = 32$ et $x^2 - 16 = 0$ ne sont pas deux équations équivalentes. L'ensemble de solutions de l'équation $8x = 32$ est $S = \{4\}$ alors que l'ensemble de solutions de l'équation $x^2 - 16 = 0$ est $S = \{-4; 4\}$

Exemples : $\frac{x}{2} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} + 1$ $S = \emptyset$

$\frac{2x}{3} - 5 = \frac{x}{3} + 1$ $S = \{18\}$

$\frac{x(x-2)(2x+3)}{2} = 0$ $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0; 2\right\}$

$\frac{x}{2} = \frac{x^2 + x}{2x+2}$ $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice 1 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation.

1) Le nombre 3 est-il une solution de l'équation $5x - 2 = 4x + 1$? Justifier.

2) Le nombre -2 est-il une solution de l'équation $x(3x + 4) = (2x + 5)(x - 2)$? Justifier.

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes.

1) $5(x + 3) = 3 - 4(2x - 6)$

3) $4x - 2 + (5x - 1) = -3(7 - x)$

2) $-2(2x - 4) = 6x - (-3 + x)$

4) $\frac{x+5}{2} - \frac{2x-7}{5} = 2 + \frac{3x}{10}$

Exercice 3 : Trouver une équation équivalente.

Trouver une équation équivalente à : $3(x+2) - 5x + 4 = (3x-7) - (5x+2)$

Exercice 4 : Entourer l'équation qui n'est pas équivalente aux autres.

1) $2x = 10$
 $4x + 5 = 25$
 $4x^2 = 20x$
 $3x = x + 10$

2) $2x - 3 = 4$
 $2x - 1 = 2$
 $x - 3 = 4 - x$
 $2x = 7$

Exercice 5 : Entourer l'équation équivalente à $x^2 - 25 = 0$

$(x+5)(x-5) = 0$
 $4x = -20$
 $3x = 15$
 $(x-5)(x-5) = 0$

2. Produit

Pour résoudre une équation de degré supérieur à 1, on utilise une série de transformation pour obtenir un **produit nul**.

Pour déterminer les solutions d'un produit nul, on utilise la propriété suivante :

- Si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul.

Exemple : Résoudre l'équation $2x(2x+3) = 0$

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs au moins est nul. On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} 2x = 0 & & 2x + 3 = 0 \\ x = 0 & \text{ou} & x = -\frac{3}{2} \end{array}$$

Les solutions de l'équation $2x(2x+3) = 0$ sont $S = \left\{ 0; -\frac{3}{2} \right\}$

Exercice 6 : Résoudre les équations suivantes.

1) $2x(x-5) = 0$

4) $(3x+1)(x-5) = 0$

2) $(x+2)(2x-1) = 0$

5) $(3x+7)(4x-8) = 0$

3) $\frac{2}{3}x(2x-3)\left(x-\frac{1}{4}\right) = 0$

6) $5(9x-3)(-5x-13) = 0$

Exercice 7 : Déterminer une équation dont l'ensemble de solutions est le suivant.

1) $S = \{-2\}$ Equation :

2) $S = \{-2; 2\}$ Equation :

3) $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{4}\right\}$ Equation :

4) $S = \emptyset$ Equation :

5) $S = \left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right\}$ Equation :

6) $S = i$ Equation :

3. Equation du degré supérieur à 1

Pour transformer une équation de degré supérieur à 1 en un produit nul, on modifie l'équation pour qu'un membre de l'équation soit égale à 0 et on factorise l'autre membre.

Pour factoriser une expression littérale, on peut utiliser :

- La mise en évidence
- Les identités remarquables
- la formule de Viète

Exemple : Résoudre l'équation $4x^2 = -6x$

$$4x^2 = -6x$$

$$4x^2 + 6x = 0$$

$$2x(2x + 3) = 0$$

$$S = \left\{ 0; -\frac{3}{2} \right\}$$

Exemple : Résoudre l'équation $25x^2 + 20x + 4 = 0$

$$25x^2 + 20x + 4 = 0$$

$$(5x + 2)^2 = 0$$

$$(5x + 2)(5x + 2) = 0$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{5} \right\}$$

Exemple : Résoudre l'équation $2x^2 + 8x - 5 = 0$

$$2x^2 + 8x - 5 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 64 + 40 = 104 > 0$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{104}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-8 - \sqrt{104}}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{-8 - \sqrt{104}}{4}; \frac{-8 + \sqrt{104}}{4} \right\}$$

Exercice 8 : Factoriser et résoudre les équations.

1) $4x^2 - 12x = 0$

5) $-x^2 + 6x - 9 = 0$

2) $4x^2 + 16 = -16x$

6) $2x^2 + x = 4$

3) $8x^2 = 4x$

7) $5x^2 + 4x + 8 = 0$

4) $x^2 - 10x + 16 = 0$

8) $x^2 - 8x + 7 = (2x - 1)^2$

Exercice 9 : Vrai ou faux ? Justifier.

1) L'équation $x^2 = (x + 1)^2$ n'a pas de solution.

2) L'équation $(x + 1)(-3 - 3x)^2 = 0$ admet une seule solution.

3) L'équation $(x + 1)(-3 - 3x) = 0$ est équivalente à l'équation $3x + 1 = x$

Exercice 10 : Vérifier si un nombre est une solution d'une équation.

1) Le nombre $\frac{3}{2}$ est-il une solution de l'équation $x^2 - \frac{3}{2}x + 4 = 2x^2 - 2x - 1$? Justifier.

2) Le nombre $-\frac{1}{2}$ est-il une solution de l'équation $x^3 + \frac{5}{2}x^2 = \frac{1}{2} + 2x - x^2$? Justifier.

Exercice 11 : Factoriser par la mise en évidence.

1) $(4x - 5)(2x - 3) + 4(-2x - 2)(4x - 5) =$

2) $4x(2 + x) + 3(2 + x)(-2x - 3) =$

3) $(4x + 3)(x + 1) - (4x + 3)(3x + 2) =$

4) $(1 + 2x)(2x - 3) - 2(1 + 2x)(3x - 4) =$

Exercice 12 : Résoudre les équations suivantes.

1) $(7x-2)(2-3x) + (4x+3)(7x-2) = 0$ 2) $(9x-4)(-2+5x) - (9x-4)(3x-5) = 0$

Exercice 13 : Résoudre les équations suivantes.

1) $(4x-5)(2x-3) + 4(-2x-2)(4x-5) = 0$

2) $4x(2+x) + 3(2+x)(-2x-3) = 0$

4. Equation rationnelle

Une fraction comportant au moins une variable, que ce soit au numérateur ou au dénominateur, est appelée **expression rationnelle**. Une **équation rationnelle** est une équation qui comporte au moins une expression rationnelle.

Les équations rationnelles se résolvent de la même manière que toute autre équation, en réalisant des opérations sur les deux côtés du signe égal jusqu'à isoler une variable sur un côté du signe égal. Cependant, il existe deux techniques en particulier, pour résoudre les équations rationnelles : la multiplication croisée et la recherche d'un dénominateur commun.

Exemple :
$$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2 + 5x + 6}$$

5. Déterminer le domaine de définition de l'équation

Dans les équations rationnelles, certaines valeurs de l'inconnue posent problème, celles qui conduisent à obtenir une division par zéro qui n'est pas définie dans $\mathbb{R}$. Il convient d'identifier ces valeurs de l'inconnue et de les exclure de l'ensemble des nombres pouvant être des solutions de l'équation. Cette étape consiste à déterminer le **domaine de définition D**.

Exemple :
$$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2 + 5x + 6}$$

Dans l'expression $\frac{4}{x+2}$, le dénominateur doit être différent de 0 :

$$x+2 \neq 0$$

$$x \neq -2$$

La valeur -2 est à exclure du domaine de définition.

Dans l'expression $\frac{7}{x+3}$, le dénominateur doit être différent de 0 :

$$x+3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

La valeur -3 est à exclure du domaine de définition.

Dans l'expression $\frac{37}{x^2 + 5x + 6}$, le dénominateur doit être différent de 0 :

$$x^2 + 5x + 6 \neq 0$$

$$(x+2)(x+3) \neq 0$$

$$x+2 \neq 0 \text{ et } x+3 \neq 0$$

$$x \neq -2 \text{ et } x \neq -3$$

Les valeurs -2 et -3 sont à exclure du domaine de définition.

Le domaine de définition D est donc $\mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$

Exercice 14 : Déterminer le domaine de définition des équations suivantes.

1) $\frac{1}{x} = 5$ $D = \dots\dots\dots$

2) $\frac{4}{x} = x$ $D = \dots\dots\dots$

3) $x - \frac{1}{x} = 0$ $D = \dots\dots\dots$

4) $x - 1 = \frac{4}{x-1}$ $D = \dots\dots\dots$

5) $x - \frac{1-2x}{x-2} = 0$ $D = \dots\dots\dots$

6) $1 - \frac{2}{x+5} = \frac{x+3}{x-1}$ $D = \dots\dots\dots$

6. La multiplication croisée ou produit en croix

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$) alors $a \cdot d = b \cdot c$

Cette propriété nous permet de passer d'une égalité de rapport à une égalité de produit.

Exemple : $\frac{4}{x+2} = \frac{7}{x+3}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$$

$$\frac{4}{x+2} = \frac{7}{x+3} \text{ peut s'écrire } 4(x+3) = 7(x+2)$$

On peut ensuite résoudre cette équation du premier degré :

$$4(x+3) = 7(x+2)$$

$$4x + 12 = 7x + 14$$

$$-2 = 3x$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Exercice 15 : Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{1}{x} = \frac{4}{3}$

5) $x - 1 = \frac{4}{x-1}$

2) $\frac{1}{x+3} = \frac{4}{2-x}$

6) $\frac{1-2x}{x-2} = 5$

3) $\frac{x}{x+8} = \frac{3}{4}$

7) $\frac{2}{5} = \frac{x+3}{x-1}$

4) $\frac{2}{x+5} = \frac{x+3}{x-1}$

8) $\frac{5}{x-3} = \frac{x-10}{x(x-3)}$

7. La recherche d'un dénominateur commun

L'équation rationnelle ne se présente pas toujours comme une égalité de rapport. Il faut alors procéder différemment, notamment par la **recherche d'un dénominateur commun** entre les deux membres de l'équation.

Exemple : $\frac{4}{x+2} = \frac{7}{x+3}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$$

Le dénominateur commun est $(x+2)(x+3)$

$$\frac{4}{x+2} = \frac{7}{x+3} \text{ devient } \frac{4(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{7(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$

On multiplie les deux membres par le dénominateur commun :

$$\frac{4(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{7(x+2)}{(x+3)(x+2)} \text{ devient } 4(x+3) = 7(x+2)$$

On peut alors résoudre l'équation :

$$4(x+3) = 7(x+2)$$

$$4x + 12 = 7x + 14$$

$$-2 = 3x$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Exercice 16 : Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{1}{x+3} + 2 = \frac{4}{2-x}$

2) $1 - \frac{2}{x+5} = \frac{x+3}{x-1}$

Exercice 17 : Déterminer le domaine de définition des équations suivantes.

1) $\frac{1}{x} + \frac{5}{x-3} = \frac{x-10}{x(x-3)}$ $D = \dots\dots\dots$

2) $\frac{x}{x+8} = \frac{3}{4}$ $D = \dots\dots\dots$

3) $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{5x}{x^2-1}$ $D = \dots\dots\dots$

4) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+1} = \frac{3x}{x^2-x-1}$ $D = \dots\dots\dots$

5) $\frac{1}{x^2+1} = 1$ $D = \dots\dots\dots$

6) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+1} = \frac{3x}{(x-2)(x+1)}$ $D = \dots\dots\dots$

Exercice 18 : Résoudre le problème suivant.

Un avion se déplace cinq fois plus vite qu'un train de passagers. Pour parcourir 400 km, il faut au train quatre heures de plus qu'à l'avion. Trouve la vitesse du train et de l'avion.

Exercice 19 : Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x^2-4}$

2) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{1-x} = \frac{1}{2}$

Exercice 20 : Résoudre le problème suivant.

Un avion volant à sa vitesse de croisière met le même temps pour parcourir 500 km avec vent arrière et 400 km avec vent contraire. Si la vitesse constante du vent est de 20 km/h, quelle est la vitesse de croisière de l'avion ?

Exercice 21 : Simplifier les expressions littérales suivantes.

1) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} =$

2) $\frac{4}{x+1} - \frac{1}{x-2} =$

3) $\frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+3)} =$

4) $\frac{x-3}{x^2+2x-15} + \frac{x-1}{x+5} =$

5) $\frac{x-6}{(x-2)(x+1)} + \frac{2}{(x-2)(x+4)} =$

6) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} =$

Exercice 22 : Résoudre le problème suivant.

Jean et Julien ont tous deux une tondeuse à gazon de même taille. S'il faut à Jean deux heures de plus qu'à Julien pour tondre une certaine pelouse et à Julien, trois heures pour faire le même travail, combien leur faudra-t-il de temps s'ils conjuguent leurs efforts ?

Exercice 23 : Résoudre le problème suivant.

Deux nombres ont une différence de 20. Si le plus grand est divisé par le plus petit, le quotient est 2 et le reste est 5. Trouve les deux nombres.

Exercice 24 : Simplifier les expressions littérales suivantes.

1) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} =$

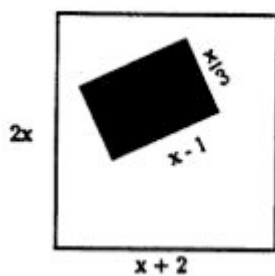
2) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} =$

3) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} =$

4) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} =$

Exercice 25 : Résoudre le problème suivant.

Trouver le rapport existant entre l'aire du secteur ombré et l'aire total.



Exercice 26 : Résoudre les équations suivantes.

1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

4) $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x^2-4}$

2) $\frac{x}{x-6} = 3$

5) $\frac{7x}{x-1} = 5 + \frac{7}{x-1}$

3) $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{7}$

6) $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}$

Exercice 27 : Déterminer le domaine de définition des équations suivantes.

1) $\frac{a^2+3a-28}{a^2-16}$ $D = \dots\dots\dots$

2) $\frac{4x^4-6x^3+2x^2-10x}{2x}$ $D = \dots\dots\dots$

3) $\frac{x^2-1}{1-x}$ $D = \dots\dots\dots$

4) $\frac{2x^2+x-15}{3x+9}$ $D = \dots\dots\dots$

5) $\frac{3x^2+3x-9}{2x^3-7x^2+9x}$ $D = \dots\dots\dots$

Exercice 28 : Résoudre le problème suivant.

Soit un prisme droit dont les dimensions sont $2x$; $4x$; $6x$.

Trouve le rapport existant entre l'aire totale et le volume.

Quel serait ce rapport si tu doublais les dimensions ?

Exercice 29 : Résoudre les équations suivantes.

$$1) \frac{1}{x} + \frac{5}{x-3} = \frac{x-10}{x(x-3)}$$

$$3) \frac{x}{x+8} = \frac{3}{4}$$

$$2) \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{5x}{x^2-1}$$

$$4) \frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{x+1} = \frac{3x}{x^2-x-2}$$

Exercice 30 : Résoudre le problème suivant.

Les plans initiaux de l'école prévoient un espace de x mètres sur x mètres pour les laboratoires de mathématiques et d'informatiques. A la demande du professeur de mathématiques, l'architecte accepte d'accroître la longueur du laboratoire de mathématiques d'un mètre et la largeur du laboratoire d'informatique de 2 mètres. Trouve une expression montrant le rapport entre la superficie du nouveau laboratoire de mathématiques et celle du nouveau laboratoire d'informatique.

Evalue le rapport quand x vaut 8 mètres. Explique ta réponse.