

Algèbre (calcul littéral et équations du second degré)
Classeur BS : 1- Arithmétique – Algèbre
CORRECTION

Exercice 1 : Réduire si possible les expressions littérales suivantes.

1) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x$

2) $a + a + a + b + b = 3a + 2b$

3) $4a + 2b + 3b - a = 3a + 5b$

4) $2a + 3b + 4c = 2a + 3b + 4c$

5) $10xy + 5x^2y - 3xy = 7xy + 5x^2y$

6) $x - \frac{2}{5}x = \frac{3}{5}x$

7) $a + a + a^2 + a^2 + a^2 = 2a + 3a^2$

8) $2a + 3a^2 + 4a + 5a^2 = 6a + 8a^2$

9) $a + 2a^2 + 3a^3 = a + 2a^2 + 3a^3$

10) $8z^3 - z^3 = 7z^3$

Exercice 2 : Réduire si possible les expressions littérales suivantes.

1) $a \cdot a = a^2$

2) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 2x = 2x^5$

3) $a^3 \cdot a^3 = a^6$

4) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^9$

5) $2 \cdot 3x = 6x$

6) $a \cdot a \cdot a = a^3$

7) $x^2 \cdot x^4 = x^6$

8) $z \cdot z^4 = z^5$

9) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} b = \frac{3}{20} b$

10) $4 \cdot 7y = 28y$

Exercice 3 : Réduire si possible les expressions littérales suivantes.

1) $4a \cdot 5a = 20a^2$

2) $5x \cdot 7y = 35xy$

3) $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6}$

4) $3a \cdot (-5a) = -15a^2$

5) $10x \cdot 3x = 30x^2$

6) $\frac{x}{10} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x^2}{50}$

7) $(-6y) \cdot (-2y) = 12y^2$

8) $\frac{2}{3x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$

9) $a \cdot \frac{1}{4a} = \frac{1}{4}$

10) $\frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{4}x^3$

Exercice 4 : Réduire si possible les expressions littérales suivantes.

$$1) \quad \frac{x \cdot x^3 \cdot x^7}{x^8 \cdot x^{-2}} = \frac{x^{11}}{x^6} = x^5$$

$$2) \quad \frac{x^3 \cdot x^4}{x^5} = \frac{x^7}{x^5} = x^2$$

$$3) \quad \frac{-15xy}{-50xz^2} = \frac{3y}{10z^2}$$

$$4) \quad \frac{a^5 \cdot a^2}{(a^5)^2} = \frac{a^7}{a^{10}} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$5) \quad \frac{30xz^3}{49y^3} = \frac{30xz^3}{49y^3}$$

$$6) \quad \frac{a + a + a}{a^3} = \frac{3a}{a^3} = \frac{3}{a^2}$$

$$7) \quad \frac{-81a^6b^7}{18ab^4} = -\frac{9a^5b^3}{2}$$

$$8) \quad \frac{-8t^2u}{-28u^3} = \frac{2t^2}{7u^2}$$

Exercice 5: Réduire les expressions littérales suivantes.

$$7t \cdot (2t - 5) - (5t)^2 + \sqrt{64t^2} =$$

1) $14t^2 - 35t - 25t^2 + 8t =$
 $-27t - 11t^2$

$$2y \cdot (-3y + 4x^2y) - (2x^2 - 3) \cdot y^2 =$$

2) $-6y^2 + 8x^2y^2 - 2x^2y^2 + 3y^2 =$
 $-3y^2 + 6x^2y^2$

Exercice 6 : *Elaborer une expression littérale.*

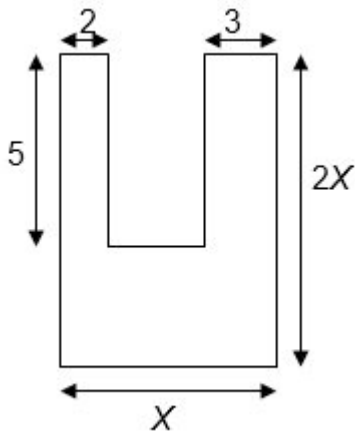
Dans une soute à bagage, il y a 32 valises, parmi lesquelles certaines pèsent 7 kilos, d'autres 10 kilos et les restantes 15 kilos.

Il y a deux fois plus de valises de 7 kilos que de 10 kilos.

En notant x le nombre de valises de 10 kilos, écrire par une **formule réduite** :

- a) Le nombre de valises de 7 kilos : $2x$
- b) Le nombre de valises de 15 kilos : $32 - x - 2x = 32 - 3x$
- c) Le poids des valises de 10 kilos : $10x$
- d) Le poids des valises de 7 kilos : $7 \cdot 2x = 14x$
- e) Le poids des valises de 15 kilos : $(32 - 3x) \cdot 15 = 480 - 45x$
- f) Le poids total des valises : $10x + 14x + 480 - 45x = 480 - 21x$

Exercice 7 : *Elaborer une expression littérale.*



- 1) Exprimer le périmètre de la figure par une formule réduite.

$$2x + 2 + 5 + (x - 5) + 5 + 3 + 2x + x = 6x + 10$$

- 2) Exprimer l'aire de la figure par une formule réduite.

$$(x \cdot 2x) - 5(x - 5) = 2x^2 - 5x + 25$$

- 3) Calculer l'aire de la figure si x vaut 9 cm.

$$2 \cdot 9^2 - 5 \cdot 9 + 25 = 2 \cdot 81 - 45 + 25 = 142 \text{ cm}^2$$

Exercice 8 : Développer et réduire les expressions littérales suivantes.

1) $3(x+2) = 3x+6$

2) $(2x^2+x) \cdot 6 = 12x^2+6x$

3) $\frac{1}{2}(6-18a) = 3-9a$

4) $2x(x-9) = 2x^2-18x$

5) $3b^2(b-1) = 3b^3-3b^2$

6) $7ab^2(2a-5ab) = 14a^2b^2-35a^2b^3$

7) $x^2(1-x) = x^2-x^3$

8) $3z(13z^3-2z^2+x) = 39z^4-6z^3+3xz$

Exercice 9 : Développer et réduire les expressions littérales suivantes.

1) $(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$

2) $(a-5)(b+7) = ab + 7a - 5b - 35$

3) $(2x^2 + 6)(y - 8) = 2x^2y - 16x^2 + 6y - 48$

4) $(x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$

5) $(x^2 + x + 1)(x+1) = x^3 + x^2 + x + x^2 + x + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

6) $(10a - 0,1ab)(100b - 10a) = 1000ab - 100a^2 - 10ab^2 + a^2b$

Exercice 10 : *Factoriser à l'aide de la mise en évidence.*

1) $3x + 15 = 3(x + 5)$

2) $8a + 12b - 24c = 4(2a + 3b - 6c)$

3) $100x + 40y = 20(5x + 2y)$

4) $2a + 2b + 2c = 2(a + b + c)$

5) $15x - 20y + 25z^2 = 5(3x - 4y + 5z^2)$

6) $42x^2 - 70 = 14(3x^2 - 5)$

Exercice 11 : Factoriser à l'aide de la mise en évidence.

1) $a^2 + 2a = a(a + 2)$

2) $6x + 9y = 3(2x + 3y)$

3) $80x^4 - 60x^3 + 40x^2 = 20x^2(4x^2 - 3x + 2)$

4) $12u^6 + 21u^4 = 3u^4(4u^2 + 7)$

5) $48x^{11} - 72x^7 = 24x^7(2x^4 - 3)$

6) $5x^2y^3 - 10x^4y + 15x^3y^2 = 5x^2y(y^2 - 2x^2 + 3xy)$

Exercice 12 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$$1) (x+6)^2 = (x+6)(x+6) = x^2 + 6x + 6x + 36 = x^2 + 12x + 36$$

$$2) (2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$3) (x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$4) (5x+y)^2 = (5x+y)(5x+y) = 25x^2 + 5xy + 5xy + y^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$$

Exercice 13 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$$1) (x-7)^2 = (x-7)(x-7) = x^2 - 7x - 7x + 49 = x^2 - 14x + 49$$

$$2) (3x-5)^2 = (3x-5)(3x-5) = 9x^2 - 15x - 15x + 25 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$3) (x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$4) (8x-2y)^2 = (8x-2y)(8x-2y) = 64x^2 - 16xy - 16xy + 4y^2 = 64x^2 - 32xy + 4y^2$$

Exercice 14 : Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $(x+6)(x-6) = x^2 - 6x + 6x - 36 = x^2 - 36$

2) $(4x-9)(4x+9) = 16x^2 - 36x + 36x - 81 = 16x^2 - 81$

3) $(5x-2y)(5x+2y) = 25x^2 - 10xy + 10xy - 4y^2 = 25x^2 - 4y^2$

4) $(x-y)(x+y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$

1. Identités remarquables

1^{ère} identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2^{ème} identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3^{ème} identité remarquable : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exercice 15 : Développer en utilisation les identités remarquables.

1) $(2c + b)^2 = 4c^2 + 4bc + b^2$

2) $(3a + 5y)^2 = 9a^2 + 30ay + 25y^2$

3) $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

4) $\left(10 - \frac{a}{10}\right)^2 = 100 - 2a + \frac{a^2}{100}$

5) $(4c - x)(4c + x) = 16c^2 - x^2$

6) $\left(6a + \frac{2}{3}\right)^2 = 36a^2 + 8a + \frac{4}{9}$

7) $\left(\frac{3}{7}a^2 - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{7}a^2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{49}a^4 - \frac{25}{4}$

Exercice 16 : Compléter.

1) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

2) $\left(\frac{1}{4}x+2\right)^2 = \frac{1}{16}x^2 + x + 4$

3) $(3-2a)^2 = 9 - 12a + 4a^2$

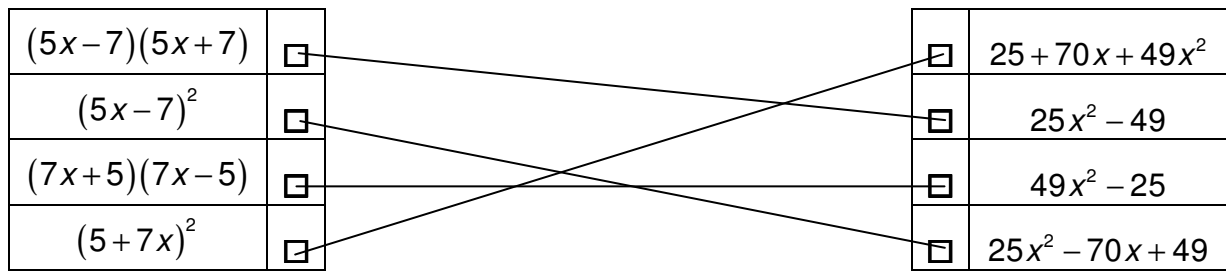
4) $(2a+4)^2 = 4a^2 + 16a + 16$

5) $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$

6) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = x^2 - 5$

Exercice 17: Associer les expressions factorisées et développées équivalentes.

$(5x - 7)(5x + 7)$	☐	☐	$25 + 70x + 49x^2$
$(5x - 7)^2$	☐	☐	$25x^2 - 49$
$(7x + 5)(7x - 5)$	☐	☐	$49x^2 - 25$
$(5 + 7x)^2$	☐	☐	$25x^2 - 70x + 49$



Exercice 18 : Factoriser les expressions suivantes.

1) $9x^2 + 42xy + 49y^2 = (3x + 7y)^2$

2) $64b^2 - 121 = (8b - 11)(8b + 11)$

3) $-4xy + 4y^2 + x^2 = (x - 2y)^2$

4) $25a^2b - 50ab^2 + 30a^2b^2 = 5ab(5a - 10b + 6ab)$

5) $4x^8 - 20x^4y + 25y^2 = (2x^4 - 5y)^2$

6) $16a^4 - 1 = (4a^2 - 1)(4a^2 + 1) = (2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$

7) $16x^8 + 81y^4 - 72x^4y^2 = (4x^4 - 9y^2)^2 = [(2x^2 - 3y)(2x^2 + 3y)]^2$

Exercice 19 : Réduire les expressions suivantes.

$$1) \left(-\frac{2}{5}x\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}x^4\right) = +\frac{1}{15}x^5$$

$$2) (-500x^2)^3 = -125'000'000x^6$$

$$3) \left(+\frac{5}{8}x^2\right) \left(-\frac{4}{15}x^3\right) = -\frac{1}{6}x^5$$

$$4) x - \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{12}x$$

$$5) -\frac{3a^2bx^6}{6a^3b^3x^3} = -\frac{x^3}{2ab^2}$$

Exercice 20 : Factoriser à l'aide de la mise en évidence.

1) $4a^3 - 7a^2 + 3a = a(4a^2 - 7a + 3)$

2) $15a^4 - 5a = 5a(3a^3 - 1)$

3) $12a^4 - 24a^4b = 12a^4(1 - 2b)$

4) $7a^2b - 14ab^2 + 21a^3b^3 = 7ab(a - 2b + 3a^2b^2)$

5) $0,4y^4 - 0,2y^3 + 0,6xy^5 = 0,2y^3(2y - 1 + 3xy^2)$

2. Formule de Viète

La formule de Viète permet de factoriser les expressions du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ et ainsi de résoudre les équations du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

On calcule le discriminant de l'équation $\Delta = b^2 - 4ac$

Trois cas de figure possibles :

Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

La forme factorisée est alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution : $x_1 = \frac{-b}{2a}$

La forme factorisée est alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$;

Exemple : Résoudre l'équation $2x^2 - x - 3 = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$

$\Delta > 0$, il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 5}{4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 5}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 - x - 3 = 2\left(x + 1\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 3 = 0$ sont $S = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$

Exercice 21 : Résoudre les équations du second degré suivante.

a) $4x^2 + 16x + 16 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16 = 256 - 256 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = -\frac{16}{8} = -2$$

$$S = \{-2\}$$

b) $-2x^2 - 4x - 7 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 16 - 56 = -40 < 0$$

$$S = \emptyset$$

c) $-4 + 6x - 3x^2 = 0$

$$-3x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3) = 36 - 48 = -12 < 0$$

$$S = \emptyset$$

d) $3x^2 + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 0 - 12 < 0$$

$$S = \emptyset$$

e) $-x^2 - 8x - 15 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-15) = 64 - 60 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{8 - 2}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{8 + 2}{-2} = -5$$

$$S = \{-5; -3\}$$

$$f) 3x^2 - 6x + 3 =$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$$

$$S = \{1\}$$

Exercice 22 : Développer en utilisation les identités remarquables.

1) $(x + 8)^2 = x^2 + 16x + 64$

2) $(x - 11)^2 = x^2 - 22x + 121$

3) $(x - 9)(x + 9) = x^2 - 91$

4) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

5) $(y^2 - 2y) \cdot (y^2 + 2y) = y^4 - 4y^2$

6) $(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

7) $(x^4 - xy)^2 = x^8 - 2x^5y + x^2y^2$