

Gauss & Hamilton

Nombreux sont les mathématiciens à avoir énoncé le théorème ci-dessous, voire même rédigé une quasi preuve. Mentionnons Girard (1629), Descartes (1637), D'Alembert (1746), Euler (1749) Foncenex (1759), Lagrange (1772), Laplace (1795), parmi les plus grands. Cependant, c'est à Gauss que revient le crédit, non pas d'une, mais de quatre preuves, dont deux parfaitement rigoureuses !

Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss, 1799, 1815, 1816, 1849). Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n > 0$ se factorise entièrement dans $\mathbb{C}[x]$ sous la forme d'un produit de n facteurs du premier degré (à coefficients dans $\mathbb{C}$).

Si la démonstration de ce théorème dépasse le niveau du cours de 4^e niv 2, en revanche utilisons-le pour prouver un corollaire :

Corollaire. Tout polynôme à coefficients réels se factorise entièrement en un produit de polynômes à coefficients réels de degrés 1, voire 2.

Preuve. Ce corollaire repose essentiellement sur le théorème ci-dessus, les propriétés de la conjugaison complexe et la récurrence (complète sur le degré).

Rappel. À tout complexe $z = a + ib$ on associe son *conjugué* $\bar{z} = a - ib$.

Ses deux propriétés essentielles sont d'être compatible avec l'addition et la multiplication :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

La preuve se fait par un calcul direct en partant de $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$. Ceci implique :

Lemme. Si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ et que $P(z) = 0$ où $z \notin \mathbb{R}$ alors $P(\bar{z}) = 0$.

En effet : $0 = \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n} = a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \dots + a_n \bar{z}^n = P(\bar{z})$.

Revenons à la preuve du corollaire. Soit un polynôme de degré $n = 1$ à coefficients réels.

Alors il n'y a rien à prouver. Supposons le théorème vrai pour tout polynôme de degré n , et considérons un polynôme P de degré $n + 1$. Par le théorème fondamental de l'algèbre tout facteur de P est de la forme $(z - (a + ib))$. Si $b = 0$ alors $P(z) = (z - a)Q(z) \in \mathbb{R}[z]$ et l'on applique

l'hypothèse de récurrence sur Q . Sinon, par le lemme si $b \neq 0$ alors P admet aussi le facteur

$(z - (a - ib))$, et le produit de ces deux facteurs n'est autre que $(z^2 - 2az + (a^2 + b^2)) \in \mathbb{R}[z]$. À

nouveau l'on aurait $P(z) = (z^2 - 2az + (a^2 + b^2))\tilde{Q}(z) \in \mathbb{R}[z]$ et l'on applique l'hypothèse de récurrence sur $\tilde{Q}$.

Construction du corps des nombres complexes par Hamilton (1843).

Hamilton considère l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sur lequel il définit deux opérations :

$$+ : ((a; b); (c; d)) \mapsto (a + c; b + d) \quad \text{et} \quad \cdot : ((a; b); (c; d)) \mapsto (ac - bd; ad + bc).$$

Exercice 0. Montrer que $+$ et $\cdot$ font de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un *corps*.

Prouver la commutativité, l'associativité des deux opérations, identifier les éléments neutres, identifier l'opposé et l'inverse (d'un non nul) puis prouver la distributivité de la multiplication sur l'addition. Enfin établir l'*isomorphisme* avec $\mathbb{C} = \{a + ib; a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 1. Factoriser dans $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$ les polynômes ci-dessous.¹

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^4 - 1$ | b) $x^3 - 8$ | c) $x^4 + 4$ |
| d) $x^4 + 1$ | e) $x^6 + 9x^3 + 8$ | f) $x^8 + x^4 - 2$ |
| g) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ | h) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ | i) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ |

Exercice 2. Résoudre les équations ci-dessous dans $\mathbb{C}$ (solutions exactes demandées).

- | | | |
|-------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 + 2ix - 1 = 0$ | b) $-x^2 - 5 = 0$ | c) $x^2 + xi + 12 = 0$ |
| d) $x^4 = 1$ | e) $x^3 = 8$ | f) $x^4 = -4$ |
| g) $x^4 + 4x^2 + 8 = 0$ | h) $x^2 + 9ix = 8$ | i) $x^2 - (7 - 3i)x + 8 - 9i = 0$ |

Rappel. Si $z = a + ib$ alors son conjugué est $\bar{z} = a - ib$

Exercice 3. Montrer que si $z = a + ib$ et $w = c + id$ alors

- $z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$ et que $z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im}(z)$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ et que $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Démontrer que si le produit et la somme de deux complexes sont réels alors ils sont conjugués.

Rappel. Si $z = a + ib$ alors son conjugué est $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Exercice 4. Montrer que si $z = a + ib$ et $w = c + id$ alors

- $|z| |\bar{z}| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ inégalité appelée *triangulaire*.

Déduire de la propriété c) que le produit d'une somme de deux carrés est encore une somme de deux carrés, résultat que l'on attribue à Diophante (250 après J.-C.), Brahmagupta (600), ou à Fibonacci (1220).

Exercice 5⁵. Caractériser dans le plan complexe, l'ensemble des nombres complexes qui satisfont aux équations suivantes

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $ z - 3 - 2i = z - 7 + 2i $ | b) $ (1 - i) \cdot z - 2i = 2$ |
|----------------------------------|---------------------------------|

¹ Utiliser les identités $1 \rightarrow 7$ et la 'complétion du carré'

² $x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 + 2^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2$

³ $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2 - x^2$

⁴ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2 - \frac{5}{4}x^2$

⁵ Extrait des *Equations algébriques et nombres complexes* de M. Cuénod.

Quelques réponses aux exercices.

Ex. 1. Nécessite une utilisation intelligente des identités 1, 2, 3, 4 et de la ‘complétion du carré’.

a) $(x^2)^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

b) $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4) = (x-2)((x+1)^2+3) = (x-2)(x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})$

c) $(x^2)^2 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2+2-2x)(x^2+2+2x) = ((x-1)^2+1)((x+1)^2+1) = (x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$

d) $(x^2)^2 + 1 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x) = \left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right)\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right) = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right)$

e) $x^6+9x^3+8 = (x^3+1)(x^3+8) = (x+1)(x^2-x+1)(x+2)(x^2-2x+4) = (x+1)((x-.5)^2+.75)(x+2)((x-1)^2+3) = \text{etc.}$

f) $x^8+x^4-2 = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+2) = (x-1)(x+1)(x+i)(x-i)(x^2+\sqrt{2}i)(x^2-\sqrt{2}i) = \text{etc}$

g) $x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+\frac{1}{2}x+1)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \text{etc}$

h) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1 = (x^2+x+1)^2 - x^2 = \text{etc}$

i) $x^4+2x^3+4x^2+2x+1 = (x^2+x+1)^2 - (ix)^2 = \text{etc}$