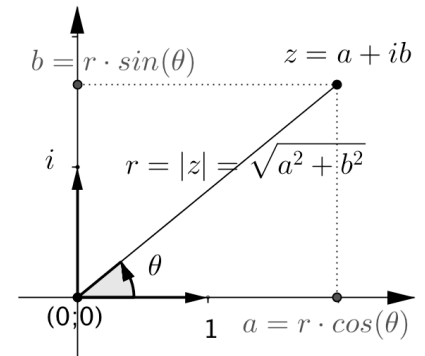


Formule de De Moivre

A tout nombre complexe non nul $z = a + ib$, écrit sous forme cartésienne algébrique l'on peut associer un couple (r, θ) , où $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé le *module* (en quelque sorte la *norme* du vecteur z) et θ correspond à l'angle orienté entre $1 + i0$ et $a + ib$, mesuré généralement en *radians*. On appelle *argument principal* de z l'angle qui vérifie $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

Ainsi : $z = a + ib = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Cette écriture s'appelle *polaire trigonométrique* (ou *cis(z)*).



Exercice 1. Convertir l'écriture cartésienne en polaire trigonométrique et vice versa :

a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $z_2 = -1 - i$

c) $z_3 = 3 + 4i$

d) $z_4 = i^{14}$

e) $\theta_5 = \pi/6$ et $r_5 = 20$

f) $\theta_6 = -3\pi/4$ et $r_6 = \sqrt{8}$

g) $\theta_7 = 10\pi/12$ et $r_7 = 42$

Théorème de Moivre (1730)

a) Si $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$ alors $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

b) Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $z^n = r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.

Ainsi, le produit de deux nombres complexes admet comme module le produit des modules des deux facteurs et comme argument, la somme des arguments des deux facteurs.

Preuve. a) Par les formules d'addition de

trigonométrie $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) =$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))] = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

b) Ainsi si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ alors par a) appliqué n fois $z^n = r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ où plus rigoureusement en effectuant une *récurrence* sur n : pour $n = 1$ l'affirmation est vraie.

Supposons qu'elle soit vraie pour $n = k$ (c.-à-d. $z^k = r^k (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$) hypothèse de récurrence Prouvons qu'elle entraîne que l'affirmation soit vraie pour $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z \cdot z^k \stackrel{hyp}{=} r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) r^k (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) \\ &= r^{k+1} (\cos(\theta)\cos(k\theta) - \sin(\theta)\sin(k\theta) + i(\cos(\theta)\sin(k\theta) + \sin(\theta)\cos(k\theta))) \\ &= r^{k+1} (\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)) \quad \text{par les formules d'addition trigo.} \end{aligned}$$

Corollaire. Toute équation $z^n = a + ib$ (avec a et b fixés et $n \in \mathbb{N}$) admet exactement n solutions.

Exercice 2. a) Si $z = 1 + i$ déterminer alors en coordonnées cartésiennes z^{14} .

b) Résoudre l'équation $z^5 = 1$ à l'aide des coordonnées polaires trigonométriques.

c) Résoudre $z^8 = 1 + i$.

Construction du pentagone régulier.

Les solutions de $z^5 = 1$ sont les sommets d'un *pentagone régulier* (inscrit dans le cercle trigonométrique). Or $z = 1$ est solution. D'où, $0 = z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

Pour trouver les zéros du 2^e facteur, multiplions par $1/z^2$, puis effectuons l'*astuce* de changement de variable $w = z + 1/z$ (d'où $w^2 - 2 = z^2 + 1/z^2$). On aura :

$$\frac{1}{z^2}(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = w^2 - 2 + w + 1 = w^2 + w - 1 = 0$$

Un w qui vérifie cette dernière équation (du 2^e degré) peut aisément être *construit avec règle et compas*. Puis le(s) z associé(s) à w par $w = z + 1/z$ (de nouveau équation du 2^e degré en z) peut lui aussi être construit à la règle et au compas.

Un résultat classique sur les *nombre constructibles à la règle et au compas* est :

Théorème (Descartes). Tout nombre admettant une écriture ne contenant que des fractions et des $+$; $-$; $\cdot$; $\div$ et des $\sqrt{\quad}$ (en nombre fini) est constructible avec règle et compas.

Exercice 3. Montrer que si l'on applique l'*astuce* ci-dessus pour résoudre $z^7 = 1$ (dans le but de construire un heptagone régulier) on obtient alors une équation irréductible de degré 3.

Pour un complément d'informations :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Gauss-Wantzel

« En géométrie, le théorème de Gauss-Wantzel énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone régulier soit constructible à la règle et au compas.

Théorème de Gauss-Wantzel — Un polygone à n côtés est constructible si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

Un nombre premier est dit *de Fermat* s'il est de la forme $2^{2^k} + 1$ pour un certain entier k .

Gauss avait pressenti cette condition nécessaire et suffisante mais n'avait démontré en 1796 (à l'âge de 19 ans) qu'une implication : *Si un polygone régulier possède n côtés et si n est une puissance de 2 ou est le produit d'une puissance de 2 et de k nombres de Fermat premiers différents alors ce polygone est constructible.* »

Réponses aux exercices.

Ex. 1. a) $z_1 = 1 \cdot (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$ **b)** $z_2 = \sqrt{2} \cdot (\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4))$

c) $z_3 = 5 \cdot (\cos(0,927295...) + i \sin(0,927295...))$ **d)** $z_4 = 1 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$

e) $z_5 = 10 + 10\sqrt{3} \cdot i$ **f)** $z_6 = -2 + i \cdot (-2)$ **g)** $z_7 = (-21)\sqrt{3} + i \cdot 21$

Ex. 2. a) $z^{14} = (1+i)^{14} = \left(\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))\right)^{14} = 128(\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)) = -128i.$

b) Par de Moivre on a $z^5 = r^5 \cdot (\cos(5\theta) + i \sin(5\theta)) = 1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0)).$

D'où $r = 1$ et $5\theta = 0 + 2k\pi$ et donc $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

c) Même méthode : $z^8 = r^8(\cos(8\theta) + i \sin(8\theta)) = 1 + i = 2^{1/2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) \dots$

D'où $r = 2^{1/16}$ et $8\theta = \pi/4 + 2k\pi$. Donc $\theta_k = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$ avec $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 6, 7$.

Ex. 3. Après calcul on obtient $w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0$ qui ne s'annule pas pour $w = \pm 1$.