

Introduction au corps des complexes ($\mathbb{C}; +; \cdot$)

Rappel. Admettons l'existence d'un *nombre imaginaire* (dans le sens *non réel*), i tel que $i^2 = -1$.

Définissons alors par $\mathbb{C} = \{ \text{des combinaisons linéaires } a + i \cdot b \text{ où } a \text{ et } b \text{ parcourent } \mathbb{R} \}$.

Si $z := a + ib \in \mathbb{C}$ on appellera alors $a :=$ la *partie réelle* de z , notée $\text{Re}(z)$ et $b :=$ la *partie imaginaire* de z , notée $\text{Im}(z)$. Pour $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ posons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, prolongeons les opérations sur cet ensemble en imposant les règles habituelles (commutativité, associativité, distributivité).

La *somme* et la *différence* s'obtiennent par : $z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.

L'élément *neutre additif* ne peut être que : $0 + i \cdot 0 = 0$.

Le *produit* de z_1 par z_2 est $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

L'élément *neutre multiplicatif* est 1, car $1 \cdot (a + ib) = 1a + 1ib = a + ib$

Enfin, l'élément *inverse* de $z = a + ib$ s'obtient en amplifiant par son *conjugué* $\bar{z} = a - ib$:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{1 \cdot (a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2} := e + if \in \mathbb{C} \quad \text{à condition que } z \cdot \bar{z} \neq 0.$$

On appelle le *module* de z , noté $|z|$, le nombre $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 0. Par ces définitions montrer que $(\mathbb{C}; +; \cdot)$ forme un *corps**.

Exercice 1. a) Montrer que la *conjugaison* est compatible avec l'addition et la multiplication, c.-à-d. :

pour tous z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$ on a $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ et donc $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

b) Dédurre que le *produit d'une somme de deux carrés est encore une somme de deux carrés*. Plus précisément : $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2$.

Théorème. Pour tout $c = a + ib \in \mathbb{C}$ il existe $z = x + iy$ tel que $z^2 = c = (-z)^2$.

Preuve. En effet, $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$. D'où le système d'équations :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Or, $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |c|$ d'où par addition : $2x^2 = |c| + a$, et par soustraction : $2y^2 = |c| - a$, où $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ainsi, en tenant compte de $2xy = b$, l'on déduit la solution :

$$x + iy = \sqrt{\frac{1}{2}(|c| + a)} + \text{sign}(b) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(|c| - a)}$$

En prenant le carré de ce dernier (ou de son opposé) on vérifie aisément qu'on obtient bien $a + ib$.

Exercice 2. Résoudre **a)** $z^2 = i$, **b)** $i \cdot z^2 = z \cdot (1 + i)$, **c)** $z^2 = 3 - 4i$ et **d)** $z^2 - 2iz + 2 = 0$

* Commutativité et associativité de $+$ et $\cdot$, existence des opposé et inverse, distributivité de $\cdot$ sur $+$.

Rappel. Déterminer deux nombres x_1 et x_2 connaissant leur produit c et leur somme b revient à résoudre l'équation $0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - bx + c$ qui admet comme solution :

$$x_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Résolution d'une équation du 3^e degré. Pour résoudre l'équation[†] $x^3 = px + q$ (où p et q sont des constantes), posons $x = u + v$. D'où $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = \underbrace{u^3 + v^3}_q + \underbrace{3uv}_p x = q + px$.

On cherche donc deux nombres u^3 et v^3 tels que $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ u^3 v^3 = (p/3)^3 \end{cases}$ qui nous amène à résoudre

l'équation du 2^e degré $0 = y^2 - qy + (p/3)^3$ qui admet comme solutions :

$$y_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \text{ Et donc : } x = u + v = \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Exercice. Montrer que si $27q^2 \geq 4p^3$ alors la formule donne bien une solution réelle.

Théorème. Formule de Cardano-Tartaglia. Si $27q^2 \geq 4p^3$ alors l'équation $x^3 = px + q$ admet une

solution réelle de la forme $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Exercices.

1) Résoudre à l'aide la formule de Cardano-Tartaglia **a)** $x^3 = 8$ **b)** $x^3 = 3x + 2$ **c)** $x^3 + 6x = 20$.

2) Cependant, avec $x^3 = -3x + 4$, qui admet comme solution $x = 1$, l'on obtient avec la formule, $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$. Montrer, en étudiant la croissance de la fonction réelle $f(x) = x^3 + 3x - 4$, que cette solution réelle est unique et donc que $1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

3) Résoudre « l'équation de Bombelli » $x^3 = 15x + 4$ en appliquant la formule de Tartaglia-Cardano. puis déterminer un nombre complexe $z = a + ib$ tel que $z^3 = 2 + 11i$ afin de conclure.

4) (Cardano ~1550) Soit un rectangle (x, y) d'aire 40 et de périmètre 20. Déterminer $x^4 + y^4$.

5) Résoudre 'normalement' $(x^2 - 9)(x - 6) = 0$, puis en appliquant la formule de Tartaglia-Cardano.

6) (Viète ~1600) Ecrire $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$, puis résoudre $\cos(\pi/7) = 4x^3 - 3x$.

[†] Toute équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se ramène à la forme précédente en posant $x = y - a/3$.