Übungsblatt 3 : Integral : Eigenschaften & Berechnung

1. Mit Hilfe der Definition des Riemann-Integrals (CRM S.80) oder basierend auf der graphischen Interpretation des Integrals („Fläche") folgende Eigenschaften (CRM S.81) illustrieren/erklären. (Es wird hier nicht verlangt diese Eigenschaften formell zu beweisen, sondern „sich von ihrer Richtigkeit zu überzeugen".)

   Seien f und g zwei auf den jeweils gegebenen Intervallen integrierbare Funktionen.

   Dann gilt :

   (a) Wenn $f(x) \leq 0$ ist für alle $x \in [a;b]$, dann gilt : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq 0$

   (b) $\displaystyle\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x$

   (d) Wenn $f(x) \leq g(x)$ ist für alle $x \in [a;b]$, dann gilt : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

2. (a) Die Eigenschaften des Integrals benutzen um folgende Fragen zu beantworten :

      i. Wenn $\displaystyle\int_{-1}^7 f(x)\ \mathrm{d}x = -3$ ist und $\displaystyle\int_7^2 3f(x)\ \mathrm{d}x = -1$ ist

         und $\displaystyle\int_{-1}^2 (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = 1$ ist, welchen Wert hat dann : $\displaystyle\int_{-1}^2 g(x)\ \mathrm{d}x$?

      ii. Wenn $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x > 0$ ist und $\displaystyle\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x < \int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$ ist

         welches Vorzeichen hat dann $\displaystyle\int_b^a (g(x) - f(x))\ \mathrm{d}x$?

   (b) Für die beiden vorherigen Situationen i. und ii. mögliche graphische Darstellungen von **stetigen** Funktionen f und g geben.

3. Folgende Integrale mit Hilfe des Korollars des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung berechnen :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(-\frac{x^3}{4} + 3\right) \mathrm{d}x$ $\frac{33}{16}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)^4\ \mathrm{d}x$ $\frac{1}{5}$

(c) $\displaystyle\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$ 6

(d) $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ $\frac{7}{12}$

(e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\frac{1}{2}$

(f) $\displaystyle\int_1^4 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x + 2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{r}}\,\mathrm{d}r + \int_4^9 1\,\mathrm{d}s$ 8

(g) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3x \sin\left(2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x$ 0

(h) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^2+3}{7} - \frac{4}{x}\right) \mathrm{d}x$ $\frac{16}{21} + 4\ln(2)$

(i) $\displaystyle\int_1^1 \frac{2}{\sqrt[7]{x^5}}\,\mathrm{d}x$ 0