ACHTUNG (für die mündliche Prüfung) : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt, begründet und illustriert werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Mittelwertsatz der Integralrechnung :

Sei f eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion.

Dann existiert (mindestens ein) $c \in [a;b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$

Oder auch (im Fall $a \neq b$) : $\displaystyle f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Beweis :

- Den Beweis für den Fall $a = b$ erhält man direkt durch einsetzen.
- Sei nun der Fall $a \neq b$ (hier also $a < b$) :

  f besitzt auf dem Intervall $[a;b]$ ein absolutes Minimum m und ein absolutes Maximum M

  $m \leq f(x) \leq M \qquad$ für alle $x \in [a;b]$

  $$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

  $$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\cdot(b-a)$$

  $$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

  Jedes Element des Intervalls $[m;M]$ besitzt mindestens ein Urbild durch f

  Es existiert also (mindestens ein) $c \in [a;b]$ mit $\displaystyle f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

  oder auch : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$