ACHTUNG (für die mündliche Prüfung) : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt, begründet und illustriert werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung :

Sei f eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion.

Sei die Funktion Φ gegeben durch : $\quad \Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Dann ist Φ eine Stammfunktion von f auf $[a;b]$, d.h. : $\quad \Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;b]$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c_h)\cdot(x+h-x)}{h} \quad \text{für ein bestimmtes } c_h \text{ zwischen } x \text{ und } x+h \\
&= \lim_{h\to 0} f(c_h) \\
&= f\left(\lim_{h\to 0} c_h\right) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Korollar :

Sei f eine auf dem Intervall $[a;b]$ stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f auf diesem Intervall.

Dann gilt : $\quad \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Beweis :

Φ wie im Hauptsatz und F sind zwei Stammfunktionen von f

$F(x) = \Phi(x) + k$

Für $x = a$: $\quad F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + k = 0 + k$

Für $x = b$: $\quad F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + k = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)$

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$