ACHTUNG (für die mündliche Prüfung) : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt, begründet und illustriert werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Definition :

Sei f eine auf einem Intervall $[a;b]$ definierte Funktion.

Sei $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a;b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1};x_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Sei für jedes Teilintervall eine Stelle $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$.

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \Delta x_i$$

für jede mögliche Zerlegung $x_0, \ldots x_n$ und jede mögliche Wahl der ξ_i existiert und dieselbe reelle Zahl ergibt, dann heisst die Funktion f auf $[a;b]$ **integrierbar** und dieser Grenzwert ist das **Integral von** a **bis** b von der Funktion f, geschrieben :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers :

Sei ein Kurvenstück gegeben durch $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$ und f eine auf $[a;b]$ stetige Funktion.

Sei der Rotationskörper erhalten durch Rotation des Schaubildes von f um die x-Achse.

Dann misst folgendes Integral das Volumen dieses Rotationskörpers :

$$V = \pi \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

Herleitung :

Das Intervall $[a;b]$ wird wie in der Definition des Integrals in Teilintervalle zerlegt. Auf einem Teilintervall gilt für das Teilvolumen V_i z.B. folgende Annäherung (Annäherung durch das Volumen eines Zylinders) :

$$V_i \approx \pi \cdot \left(f\left(\xi_i\right)\right)^2 \cdot \Delta x_i$$

für ein bestimmtes $\xi_i \in \,]x_{i-1};x_i[$

Daraus folgt :

$$\sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot \left(f\left(\xi_i\right)\right)^2 \cdot \Delta x_i = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(\xi_i\right)\right)^2 \cdot \Delta x_i$$

Und dann :

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \left(\pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(\xi_i\right)\right)^2 \cdot \Delta x_i\right) = \pi \cdot \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(\xi_i\right)\right)^2 \cdot \Delta x_i = \pi \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x$$