Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik

1.1 Definition, Produktregel

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung muss man oft die Anzahl der möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments berechnen können. Will man z.B. wissen mit welcher Wahrscheinlichkeit man mit der Zahlenfolge „1 2 3 4 5 6" im Lotto gewinnt, so ist es nützlich schon zu wissen wie viele verschiedene Zahlenkombinationen es überhaupt gibt...

Definition :

Mit **Kombinatorik** bezeichnet man die verschiedenen Methoden, mit deren Hilfe die möglichen Ergebnisse eines Experiments berechnet werden können.

Beispiel :

Anna klassifiziert Steinproben nach folgenden Kriterien :

- Farbe : weissgrau, gelblich, rotbraun, schwarz oder sonstige Farbe
- Härte : hart oder weich

Wieviele verschiedene Kategorien von Steinsorten kann Anna mit Hilfe dieser Kriterien bilden ?

Produktregel der Kombinatorik :

Sei E_1 ein Experiment mit n_1 verschiedenen Ergebnismöglichkeiten und E_2 ein von E_1 unabhängiges Experiment mit n_2 verschiedenen Ergebnismöglichkeiten.

Dann gibt es für das zusammengesetze Experiment E_1 gefolgt von E_2

verschiedene mögliche Abläufe.

1.2 n-Fakultät : $n!$

In der Kombinatorik werden wir häufig das Produkt natürlicher Zahlen von 1 bis zu einer gegebenen natürlichen Zahl brauchen (siehe z.B. vorige Aufgabe 3 : $9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1$). Für diese Produkte existiert eine eigene Schreibweise :

Definition :

Sei $n \in \mathbb{N}$. Man definiert $n!$ (sprich : n-Fakultät) wie folgt

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{, für } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{, für } n > 0 \end{cases}$$

Beispiele :

$0! =$ $\quad 1! =$ $\quad 2! =$ $\quad 3! =$ $\quad 4! =$

$5! =$ $\quad 6! =$ $\quad 7! =$ $\quad 8! =$ $\quad 9! =$

Bemerkung :

Eine rekursive Definition für $n!$ ($n \in \mathbb{N}$) ist gegeben durch

$$0! = 1 \qquad \text{für } n > 0 : n! = \qquad \cdot (n-1)!$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L1)

1. Mit und ohne Taschenrechner berechnen.

   (a) $\frac{13!}{11!}$ (b) $\frac{7!}{10!}$ (c) $\frac{100!}{98! \cdot 2!}$

2. Vereinfachen.

   (a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ (b) $\frac{(n+2)!}{n!}$ (c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

1.3 Permutationen, Variationen, Kombinationen

Beispiel :

Vier Personen möchten sich auf eine Bank mit vier Plätzen setzen. Wieviele verschiedene Möglichkeiten haben sie ?

Definition :

Gegeben sind n verschiedene Elemente.

Eine **Permutation (ohne Wiederholung)** der n Elemente ist gegeben durch ein n-Tupel, in dem jedes der n Elemente genau einmal vorkommt.

Die Anzahl der **Permutationen** von n Elementen schreiben wir P_n.

Satz : $P_n =$

Beispiele :

Die Anzahl der Anagramme (ohne Sinn) folgender Wörter berechnen :

- FRAU
- ANNA
- MANN
- SOSSE

Definition :

Gegeben sind n Elemente, von denen n_1 gleich sind (Typ 1), n_2 gleich sind (Typ 2), ... , n_p gleich sind (Typ p). (Also ist $n_1 + \ldots + n_p = n$)

Eine **Permutation mit Wiederholung** ist gegeben durch ein n-Tupel dieser Elemente.

Die Anzahl der **Permutationen mit Wiederholung** von $n_1, \ldots, n_p$ Elementen schreiben wir $\overline{P}(n_1, \ldots, n_p)$.

Satz : $\overline{P}(n_1, \ldots, n_p) =$

Beispiel :

Eine Gruppe von acht Personen möchte einen Präsidenten, einen Sekretär und einen Vermögensverwalter auswählen. Wieviele verschiedene Möglichkeiten haben sie, wenn keine Person zwei Ämter innehaben kann ?

Definition :

Gegeben sind n verschiedene Elemente.

Eine **Variation (ohne Wiederholung) von k der n** Elemente ist gegeben durch eine Auswahl von k der n Elemente, wobei die Reihenfolge wichtig ist und kein Element mehr als einmal vorkommt.

Die Anzahl der **Variationen** von k aus n Elementen schreiben wir A_k^n.

Satz : $A_k^n =$

Beispiel :

Wieviele Wörter (ohne Sinn) mit fünf Buchstaben kann man mit den Buchstaben des Alphabets bilden, wenn jeder Buchstabe mehrmals vorkommen darf ?

Definition :

Gegeben sind n verschiedene Elemente.

Eine **Variation mit Wiederholung von k der n** Elemente ist gegeben durch eine Auswahl von k der n Elemente, wobei die Reihenfolge wichtig ist und jedes Element mehrmals vorkommen kann.

Die Anzahl der **Variationen mit Wiederholung** von k aus n Elementen schreiben wir $\overline{A_k^n}$.

Satz : $\overline{A_k^n} =$

Beispiel :

Aus einer Gruppe von acht Personen soll ein Komitee von drei Personen ausgesucht werden, die sich um die Organisation eines Jassturniers kümmern sollen. Wieviele Möglichkeiten gibt es solch ein Komitee zu bilden ?

Definition :

Gegeben sind n verschiedene Elemente.

Eine **Kombination (ohne Wiederholung) von k der n Elemente** ist gegeben durch eine Auswahl von k der n Elemente, wobei die Reihenfolge unwichtig ist und kein Element mehr als einmal vorkommt.

Die Anzahl der **Kombinationen** von k aus n Elementen schreiben wir C_k^n oder $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Satz : $C_k^n = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} =$

Bemerkung : Die Terme $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ heissen auch **Binomialkoeffizienten**.

Gemischte Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L1)

1. Frieda sitzt im Kasino und hat noch Zeit für höchstens 5 Runden Roulette. Ihr bleibt noch 1SFR. Solange sie kann, setzt Frieda in jeder Runde genau 1 SFR auf eine Farbe. Entweder gewinnt oder verliert sie also in jeder Runde 1SFR. Frieda hört vor der fünften Runde auf zu spielen, falls sie kein Geld mehr besitzt oder falls sie 4SFR besitzt.

   Wieviele verschiedene Wege (!) bis zum Spielende existieren ?

2. In einer Urne befinden sich fünf von „1" bis „5" nummerierte Kugeln. Erna zieht nacheinander drei Kugeln und schreibt jedesmal das Ergebnis auf (z.B. „143" oder „523"). Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen kann Erna auf diese Art erhalten, wenn sie nach jeder Ziehung die gezogene Kugel nicht zurück in die Urne legt ? Und wenn sie sie zurück in die Urne legt ?

3. Martha weiss dass sich der geheime Code von Gertruds Bankkarte aus sechs Ziffern zwischen „0" und „9" zusammensetzt.

   (a) Wieviele Möglichkeiten muss Martha höchstens ausprobieren, um sich mit dem Vermögen von Gertrud zu vergnügen ?

   (b) Und wenn sie weiss, dass die erste Ziffer keine „0" sein darf ?

4. Wieviele verschiedene 9-stellige Zahlen kann man mit den Ziffern „1", „2", ... , „9" bilden, wenn keine Ziffer mehr als einmal verwendet werden darf ?

5. Wieviele verschiedene Möglichkeiten hat Ilse zehn Quader aufzureihen, wenn sieben rot sind, einer gelb ist und zwei grün sind ?

6. (a) Die Anzahl der Anagramme (ohne Sinn) des Wortes „ANANAS" berechnen.

   (b) Wieviele Anagramme gibt es, die mit „A" beginnen und enden ?

   (c) Wieviele Anagramme gibt es, für die die drei „A" nebeneinander stehen ?

   (d) Wieviele Anagramme gibt es, die mit „A" beginnen und mit „S" enden ?

7. Die Anzahl der Möglichkeiten Hildegard, Karl, Ursula, Hermann und Helga auf eine Bank mit fünf Plätzen zu setzen berechnen, wenn Karl und Hermann nebeneinander sitzen möchten.

8. Um dem chronischen Papiermangel der Mathematikklasse entgegenzutreten kauft Ingrid einen Block Papier. Ungewollt kauft sie farbiges Papier. Nachdem sie die nötige Anzahl an Blättern für sich herausgenommen hat sind noch zwölf verschiedenfarbige Blätter übrig. Ingrid beschliesst davon Wilhelm sechs und Walter und Hans je drei zu schenken.

   Wieviele verschiedene Verteilungsmöglichkeiten hat sie ?

9. Wieviele Möglichkeiten gibt es sechs Karten aus einem Spiel mit 36 Karten zu wählen, wenn drei Karten schwarz, drei rot und kein Herz dabei sein soll ?

10. In einer mündlichen Prüfung muss Günter auf acht von insgesamt zehn Fragen antworten.

    (a) Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Wahl der acht Fragen ?

    (b) Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Wahl der acht Fragen, wenn die ersten drei Fragen Pflicht sind ?

    (c) Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Wahl der acht Fragen, wenn er von den ersten fünf Fragen mindestens vier behandeln muss ?

11. In einem Büro arbeiten sieben Frauen und vier Männer.

    (a) Wieviele siebenköpfige Teams mit drei Frauen kann man bilden ?

    (b) Wieviele siebenköpfige Teams mit drei Männern kann man bilden ?

12. Auf wieviele Arten kann Horst fünf verschiedene dicke, vier verschiedene mittlere und drei verschiedene dünne Bücher in ein Regal räumen, wenn die Bücher gleicher Dicke nebeneinander stehen sollen ?

13. Für ein Fleischfondue steht der Fonduetopf auf dem Tisch umringt von fünf verschiedenen Sossen (Cocktail, Curry, Barbecue, Knoblauch, Süsssauer), die man im Kreis um den Fonduetopf drehen kann. Wieviele verschiedene Möglichkeiten diese Sossen um den Fonduetopf anzuordnen existieren ?

14. Kreispermutation : Man möchte n verschiedene Elemente in einen Kreis legen und unterscheidet Situationen die man durch Drehungen nach links oder rechts erhalten kann nicht. Die Formel zur Berechnung der Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten geben.

15. **Binomischer Lehrsatz und Pascalsches Dreieck :**

    Wir kennen schon :

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= a+b\\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

    Das Ziel ist eine allgemeine Formel zu erhalten für : $(a+b)^n = \quad ? \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

    (a) Sei $n = 5$. Wenn man den Ausdruck $(a+b)^5$ vollständig ausmultipliziert erhält man unter anderem Terme vom Typ $a^{???}b^2$. Welche Zahl steht an der Stelle der Fragezeichen ?

(b) Gleiche Frage wie (a) für n allgemein und k eine ganze Zahl zwischen 0 und n : $a^{???}b^k$

(c) Sei $n = 8$. Welcher Faktor multipliziert den Term a^3b^5, wenn man den Ausdruck $(a+b)^8$ vollständig ausmultipliziert ?

(d) Gleiche Frage wie (c) für n allgemein und k eine ganze Zahl zwischen 0 und n : welcher Faktor multipliziert den Term $a^{n-k}b^k$?

(e) Den binomischen Lehrsatz erklären : $\qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

(f) Die Funktionsweise des Pascalschen Dreiecks erklären und die darin gebrauchte Formel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ beweisen (rechnerisch oder kombinatorisch).

16. **Kombinationen mit Wiederholung :**

(a) Für Kombinationen mit Wiederholung (d.h. eine Auswahl von k aus n Elementen, wobei die Reihenfolge unwichtig ist und die Elemente mehrmals vorkommen können) gibt es in der Formelsammlung folgende Formel :

$$\overline{C_k^n} = C_k^{n+k-1}$$

Diese Formel erklären.

(b) Im Eiscafé Gelato gibt es die Eissorten : Schokolade, Erdbeer, Vanille, Pistazie, Mango, Himbeer, Joghurt. Wieviele aus vier Kugeln bestehende verschiedene Eisbecher sind möglich ? (Unter der Annahme, dass die Reihenfolge dieser Kugeln hier keine Rolle spielt und eine Sorte mehrmals gewählt werden kann.)

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung : Definitionen, Laplacewahrscheinlichkeiten

2.1 Ergebnisse und Ereignisse

Definitionen :

Für ein Experiment kann es verschiedene Ausgänge geben. Man spricht allgemein von einem **Zufallsversuch** oder **Zufallsexperiment** wenn der Ausgang nicht mit Sicherheit vorausgesagt werden kann.

Man nennt diese Ausgänge **Ergebnisse**, die Menge der möglichen Ergebnisse heisst **Ergebnismenge** und wird mit U bezeichnet.

Bemerkung :

Wir werden vorerst nur mit Zufallsversuchen arbeiten, die eine endliche Ergebnismenge haben.

Beispiele :

1. Für den Wurf eines „normalen" Würfels ist die Ergebnismenge :

2. Für den zweifachen Wurf einer Münze ist die Ergebnismenge :

Definitionen :

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ergebnismenge U.

Ein **Ereignis** ist eine Untermenge A von U : $A \subseteq U$

Die Menge aller Ereignisse $\{A \mid A \subseteq U\}$ heisst **Ereignisraum**.

Beispiel :

Beim Wurf eines „normalen" Würfels interessiert uns nun ob wir eine gerade oder ungerade Zahl erhalten.

Uns interessieren also die Ereignisse :

Definitionen :

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ergebnismenge U.

U heisst **sicheres Ereignis**.

$\emptyset$ heisst **unmögliches Ereignis**.

Besteht ein Ereignis A aus nur einem Ergebnis : $A = \{u_1\}$, so nennt man A ein **Elementarereignis**.

Beispiel :

Wieviele Elementarereignisse gibt es für den zweifachen Wurf einer Münze ? Welche sind es ?

Definitionen :

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit Ergebnismenge U, sowie zwei Ereignisse $A, B \subseteq U$.

Das Ereignis $\overline{A} = U \setminus A$ heisst **Gegenereignis** zum Ereignis A.

$$\overline{A} =$$

Das Ereignis **„A und B"** ist gegeben durch die Schnittmenge $A \cap B$ der beiden Ereignisse.

$$A \cap B =$$

Das Ereignis **„A oder B"** ist gegeben durch die **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ der beiden Ereignisse.

$$A \cup B =$$

Zwei Ereignisse A und B heissen **unvereinbar**, wenn gilt : $A \cap B = \emptyset$

Beispiel :

Gegeben sind die Ereignisse $A = \{1; 2; 5\}$ und $B = \{1; 3; 4; 6\}$ für den Wurf eines „normalen" Würfels. Dann sind :

$\overline{A} =$ $\qquad$ $\overline{B} =$

$A \cap B =$ $\qquad$ $A \cup B =$

Für jede der Mengen $A, B, \overline{A}, \ldots$ (mindestens) eine mit ihr unvereinbare Menge bestimmen.

Definition :

Die Zahl der Elemente einer (endlichen) Menge A, bezeichnen wir mit $m(A)$.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L2)

1. Gegeben sei eine Ergebnismenge U und $A \subseteq U$. Erklären :
   (a) $A \cup \overline{A} = U$
   (b) A und $\overline{A}$ sind unvereinbar
2. Erklären :
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   (d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. Gegeben sei eine Ergebnismenge U und $A, B, C \subseteq U$. Erklären oder ergänzen :

   (a) $m(A) + m(\overline{A}) = m(U)$

   (b) $0 \leq m(A) \leq m(U)$

   (c) sind A und B unvereinbar, dann gilt $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

   (d) allgemein gilt $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$

   (e) $m(A \cup B \cup C) = \quad ?$

4. Peter hat eine grosse Schachtel Pralinen geschenkt bekommen. Sie enthält 120 Pralinen mit Kaffee, 48 mit Haselnüssen und 68 mit Alkohol. Es enthalten aber 36 der Kaffeepralinen und 30 der Haselnusspralinen ebenfalls Alkohol. Nur 5 Pralinen allerdings enthalten sowohl Kaffee, als auch Haselnüsse und Alkohol. Es gibt keine Pralinen, die nur Kaffee und Haselnüsse enthalten.

   Wieviele Pralinen enthält die Schachtel ?

5. Eine Versicherungsgesellschaft hat wie folgt Rückzahlungen an ihre Kunden erledigt : 171 Zahlungen im Januar, 102 im Februar und 88 im März. Bei einer Kontrolle dieser Zahlungen wird festgestellt, dass der Versicherung folgende Fehler unterlaufen sind : 59 der Zahlungen im Februar und 47 der Zahlungen im März wurden bereits im Januar getätigt. Ausserdem wurden 12 Rückzahlungen dreimal getätigt : in jedem Monat einmal. Es gibt jedoch keine Rückzahlung, die einzig im Februar und im März getätigt wurde.

   Wieviele verschiedene Fälle hat die Versicherung während dieser Monate behandelt ?

6. Für eine Führung des berühmten „Collège de Candolle" trifft eine Gruppe von 73 neugierigen Besuchern ein. Von ihnen sprechen 5 Französisch, Deutsch und Englisch, 12 sprechen mindestens Französisch und Deutsch, 8 mindestens Französisch und Englisch und 13 mindestens Deutsch und Englisch. Ausschliesslich Französisch sprechen nur 16 Personen, während 23 Personen mindestens Englisch sprechen.

   Wieviele Besucher sprechen ausschliesslich Deutsch ?

2.2 Wahrscheinlichkeitsfunktion, Wahrscheinlichkeitsraum

Definition :

Sei U die Ergebnismenge eines Zufallversuchs und $\{A \mid A \subseteq U\}$ der Ereignisraum des Zufallsversuches.

Eine Funktion $P : \{A \mid A \subseteq U\} \to \mathbb{R}$ heisst **Wahrscheinlichkeitsfunktion**, wenn gilt :

1. für alle $A \subseteq U$ ist $P(A) \geq 0$
2. $P(U) = 1$
3. für alle $A, B \subseteq U$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Beispiele :

1. Für den Wurf eines sechseitigen Würfels sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, die jeder Seite die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zuordnet.

   $P(\{3\}) =$ $\qquad\qquad$ $P(\{2;6\}) =$

2. Sei nun für den Wurf eines sechseitigen Würfels eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, die der Seite „3" die Wahrscheinlichkeit 1 zuordnet und allen anderen Seiten die Wahrscheinlichkeit 0.

   $P(\{1;5\}) =$ $\qquad\qquad$ $P(\{2;3\}) =$

3. Könnte P in den folgenden Beispielen eine Wahrscheinlichkeitsfunktion für den Wurf eines sechseitigen Würfels sein ?

   (a) $P(\{2\}) = 0.2$, $P(\{3\}) = 0$, $P(\{5\}) = 0.1$, $P(\{2;5\}) = 0.4$

   (a) $P(\{1;3;5\}) = 0.8$, $P(\{1;2;4;6\}) = 0.1$

Mit Hilfe der Axiome 1. - 3. der Definition einer Wahrscheinlichkeitsfunktion lassen sich die im folgenden Satz aufgeführten Eigenschaften beweisen.

Satz :

Sei U eine Ergebnismenge und $P : \{ A \mid A \subseteq U\}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Für alle $A, B \subseteq U$ gilt :

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. ist $A \subseteq B$, dann gilt $P(A) \leq P(B)$
6. $0 \leq P(A) \leq 1$

Beweis :

2.3 Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Definition :

Ein Zufallsversuch ist ein **Laplace-Experiment**, wenn alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Beispiele :

1. Zwei Zufallsexperimente geben, die man mit Münzen machen kann, von denen eins ein Laplace-Experiment ist und das andere nicht.

2. Der Wurf eines „normalen” Würfels ist ein Laplace-Experiment. Die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse bestimmen und die Vorgehensweise erklären.

   (a) A : „eine 3 erhalten”

   (b) B : „eine gerade Zahl erhalten”

   (c) C : „eine 1, 2 oder 4 erhalten”

Satz :

Gegeben sei ein Laplace-Experiment mit Ergebnismenge U. Dann gilt für jedes Ereignis $E \subseteq U$:

$$P(E) =$$

Beweis :

Beispiele :

1. Eine Urne enthält 50 von 1 bis 50 nummerierte Kugeln. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nummer auf der Kugel durch 6 oder 9 teilbar ist, wenn man zufällig eine Kugel aus der Urne nimmt ?

2. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, beim Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel mit 52 Karten,

   (a) ein Karo zu erhalten,

   (b) ein As zu erhalten,

   (c) das Pik-As zu erhalten.

2.4 Gemischte Aufgaben

(Lösungen : Anhang II, Seite L2)

1. Was ist die Wahrscheinlichkeit beim Wurf von zwei „normalen" Würfeln eine Punktesumme
   (a) von 3 zu erhalten,
   (b) von 7 zu erhalten,
   (c) von 2 zu erhalten,
   (d) von 16 zu erhalten ?

2. Die Wahrscheinlichkeit berechnen beim gleichzeitigen Wurf von zwei Münzen
   (a) genau einmal Kopf zu erhalten,
   (b) mindestens einmal Kopf zu erhalten,
   (c) kein Kopf zu erhalten.

3. Die Wahrscheinlichkeit berechnen bei dem Wurf eines „normalen" Würfels
   (a) eine gerade Zahl zu erhalten,
   (b) ein Vielfaches von 3 zu erhalten,
   (c) eine gerade Zahl oder ein Vielfaches von 3 zu erhalten.

4. (a) Die Wahrscheinlichkeit berechnen einen König oder eine Dame aus einem Kartenspiel mit 52 Karten zu ziehen.
   (b) Die Wahrscheinlichkeit berechnen entweder ein As oder ein Pik aus einem Kartenspiel mit 52 Karten zu ziehen.

5. In einer Urne befinden sich 6 rote Kugeln, 4 weisse Kugeln und 5 blaue Kugeln.
   (a) Die Wahrscheinlichkeit berehnen eine Kugel zu ziehen, die
      i. rot ist,
      ii. weiss ist,
      iii. blau ist,
      iv. nicht rot ist,
      v. rot oder blau ist.
   (b) Die Wahrscheinlichkeit berechnen nacheinander eine rote, eine weisse und eine blaue Kugel zu ziehen, wenn die Kugeln jedesmal zurück in die Urne gelegt werden.
   (c) Gleiche Frage wie (b), wenn die Kugeln nicht zurückgelegt werden.
   (d) Die Wahrscheinlichkeit berechnen eine rote, eine weisse und eine blaue Kugel zu ziehen, wenn die Kugeln jedesmal zurück in die Urne gelegt werden.
   (e) Gleiche Frage wie (d), wenn die Kugeln nicht zurückgelegt werden.

6. Für die schriftlichen Prüfungen einer zwanzigköpfigen Klasse, müssen zwei Schüler bestimmt werden, die jeden Tag die Duden, Lexika oder Formelsammlungen aus der Bibliothek holen. Da es keine Freiwilligen gibt, werden die zwei Schüler zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass Karin und Renate diese Aufgabe zufällt.

7. Monika und Klaus verschicken Einladungen zu einer Feier. Monika schreibt die Namen auf die Briefe und Klaus beschriftet die Briefumschläge. Zusammen stecken sie danach die Briefe in ihre Umschläge und schicken sie ab. Bei den letzten drei Briefen und Umschlägen ist es schon spät, sie passen nicht mehr richtig auf und stecken die Briefe per Zufallsverfahren in die letzten Briefumschläge. Die Wahrscheilichkeit berechnen, dass von den drei Briefen

   (a) kein Brief an die richtige Adresse geht,

   (b) alle Briefe an die richtige Adresse gehen,

   (c) mindestens ein Brief an die falsche Adresse geht,

   (d) mindestens ein Brief an die richtige Adresse geht,

   (e) genau ein Brief an die falsche Adresse geht.

8. Drei Mädchen und drei Jungen setzen sich in einer zufällig bestimmten Reihenfolge auf eine Bank. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass

   (a) die drei Mädchen auf der Bank nebeneinander sitzen,

   (b) dass Mädchen und Jungen abwechselnd auf der Bank sitzen.

9. Brigitte wirft einen roten und einen weissen Würfel (beide sind „normale" Würfel). Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl der Punkte auf dem weissen Würfel grösser ist als auf dem roten Würfel ?

10. Von 15 Glühbirnen sind 5 defekt. Wolfgang wählt zufällig 3 Glühbirnen aus. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass von seinen drei Glühbirnen

    (a) keine defekt ist,

    (b) genau eine defekt ist,

    (c) mindestens eine defekt ist.

11. Sechs verheiratete Paare (Frau-Mann) befinden sich in einem Raum.

    (a) Es werden zufällig zwei Personen ausgesucht. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass

        i. sie miteinander verheiratet sind,

        ii. es ein Mann und eine Frau sind.

(b) Es werden zufällig vier Personen ausgesucht. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass

i. es zwei Ehepaare sind,

ii. es kein Ehepaar unter den vier Personen gibt,

iii. es genau ein Ehepaar unter den vier Personen gibt.

12. Man hat für einen gefälschten sechsseitigen Würfel die folgenden Wahrscheinlichkeiten festgestellt : „1" mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, „2" mit $\frac{1}{12}$, „3" mit $\frac{1}{12}$, „4" mit $\frac{1}{6}$, „5" mit $\frac{1}{6}$ und „6" mit $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeiten berechnen mit diesem Würfel

    (a) eine ungerade Zahl zu erhalten,

    (b) eine gerade Zahl zu erhalten,

    (c) ein Vielfaches von 3 zu erhalten.

13. In einer Klasse befinden sich 10 Jungen, von denen die Hälfte blaue Augen hat, und 20 Mädchen, von denen ebenfalls die Hälfte blaue Augen hat.

    (a) Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Junge ist oder blaue Augen hat.

    (b) Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignises berechnen. Wie kann man dieses Gegenereignis mit Worten formulieren ?

14. Zur Vorbereitung der Escaladefeier kommen 5 Schüler der Gruppe 401, 4 Schüler der Gruppe 402, 8 Schüler der Gruppe 403 und 3 Schüler der Gruppe 406. Ein Schüler wird zufällig ausgesucht, um Protokoll zu führen. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass es

    (a) ein Schüler der Gruppe 403 ist,

    (b) kein Schüler der Gruppe 403 ist,

    (c) ein Schüler der Gruppe 401 oder 403 ist.

15. Von 120 Schülern lernen 60 mindestens Deutsch, 50 mindestens Spanisch und 20 genau beide Sprachen. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein zufällig ausgewählter Schüler

    (a) entweder Deutsch oder Spanisch lernt,

    (b) mindestens eine der zwei Sprachen lernt,

    (c) weder Deutsch noch Spanisch lernt.

16. In einer Schachtel liegen drei Schrauben und drei Muttern. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, beim zufälligen Herausnehmen von zwei Objekten, eine Schraube und eine Mutter zu erhalten.

17. Ein Holzwürfel mit 4 cm langen Kanten wird auf allen Seiten rot angemalt. Danach zerschneidet man ihn in Würfel mit 1 cm Kantenlänge. Es werden zufällig vier dieser kleinen Würfel gewählt. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass
   (a) jeder der vier Würfel genau drei rote Seiten hat,
   (b) jeder der vier Würfel genau zwei rote Seiten hat.
18. Ein sechsseitiger Würfel ist so gefälscht, dass die Wahrscheinlichkeit jeder Seite proportional zu ihrer Punktezahl ist. Die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Würfelseiten berechnen.
19. Angelika hat Hunger und will sich einen Schokoladenriegel kaufen, der 70 Rappen kostet. Sie weiss, dass sie in ihrer Hosentasche ein 1-Frankenstück, zwei 50-Rappenstücke und vier 20-Rappenstücke hat. Sie nimmt per Zufallsverfahren zwei Münzen aus ihrer Tasche. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass sie mit den zwei Münzen
   (a) die genaue Summe für den Schokoriegel zahlen kann,
   (b) für den Schokoriegel zahlen kann.
20. Sabine spielt folgendes Spiel : sie wirft zwei „normale” Würfel. Ist die Summe der Punkte kleiner oder gleich 7, dann verliert sie, sonst gewinnt sie.
   (a) Ist dieses Spiel gerecht ?
   (b) Auf die Frage von Galilei (1640) antworten : „Warum gewinnt man mit der Summe 11 öfter als mit 12 ?”
   (c) Die Wahrscheinlichkeit berechnen, eine Summe zu erhalten, die grösser oder gleich 11 ist.
21. Drei Paar Schuhe werden durcheinander in eine Kiste geworfen. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, ein zusammengehörendes Paar Schuhe zu erhalten, wenn man zufällig zwei Schuhe aus der Kiste nimmt.
22. In einer Urne befinden sich fünf 500-Frankenscheine, drei 100-Frankenscheine und zwei 50-Frankenscheine. Es werden gleichzeitig und zufällig 4 Scheine gezogen. Die Wahrscheinlichkeit berechnen,
   (a) eine Summe von genau 2000 SFR zu erhalten,
   (b) keinen 500-Frankenschein zu erhalten,
   (c) mindestens einen 500-Frankenschein zu erhalten,

(d) einen 500-Frankenschein, einen 100-Frankenschein und zwei 50-Frankenscheine zu erhalten,

(e) mindestens zwei 100-Frankenscheine zu erhalten,

(f) eine Summe von genau 300 SFR zu erhalten.

23. Es werden 7 Blätter Papier von „1" bis „7" durchnummeriert, gemischt und dann eins nach dem anderen gezogen. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass gerade und ungerade Zahlen abwechselnd gezogen werden.

24. In einer Schublade liegen 4 schwarze Socken, 6 rote Socken und 2 weisse Socken, die im Dunklen nicht voneinander zu unterscheiden sind. Während eines Stromausfalls nimmt Steve zufällig zwei Socken aus der Schublade. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er verschiedenfarbige Socken an ?

25. Thomas kauft ein Kartenspiel mit 36 Karten für 2,60 SFR. Michael zieht zwei Karten. Die Wahrscheinlichkeit berechnen,

    (a) einen Buben und eine Dame zu erhalten,

    (b) mindestens einen Buben zu erhalten,

    (c) das Pik-As und den Kreuz-König zu erhalten.

26. Susanne bekommt 9 Karten aus einem Spiel mit 36 Karten zufällig zugeteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie vier Buben ?

27. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man bei einem Spiel der „Euromillion"

    (a) den Höchstgewinn ?

    (b) den zweithöchsten Gewinn ?

    (c) irgendeinen Gewinn ?

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

3.1 Definition und Satz von Bayes

Beispiele :

1. In einer Klasse gibt es vier Mädchen und sechs Jungen. Von den Mädchen haben drei dunkle Haare und eins helle Haare. Von den Jungen haben vier dunkle Haare und zwei helle Haare. Es wird zufällig eine Person ausgewählt.

   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person ein Mädchen ?

   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person ein dunkelhaariges Mädchen ?

   - Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person dunkelhaarig ist, wenn man weiss dass sie ein Mädchen ist ?

2. Drei Maschinen ; I, II und III einer Marmeladenglasdeckelfabrik stellen jeweils 50%, 30% und 20% der Gesamtmenge von Deckeln her. Von den Deckeln der Maschine I sind 3% defekt, bei der Maschine II sind es 4% und bei III sind es 5%.

   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig aus der Gesamtproduktion ausgewählter Deckel defekt ?

   - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein Deckel von dem man weiss, dass er defekt ist, von der Maschine I hergestellt ?

Definition :

Gegeben sind A und B zwei Ereignisse eines Zufallsexperiments mit Wahrscheinlichkeitsfunktion P.

Wenn $P(A) \neq 0$ ist, definiert man die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Vorraussetzung, dass A eingetreten ist (kurz : **Wahrscheinlichkeit von** B **unter** A)

$$P(B|A) =$$

Illustrationen :

Bemerkung :

Die Formel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ kann verallgemeinert werden :

$P(A \cap B \cap C) =$

$P(A \cap B \cap C \cap D) =$

Definition :

Die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilden eine **Zerlegung** oder **Partition** des Ergebnisraums U, wenn gilt

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n =$$

$$B_i \cap B_j = \qquad \text{für jedes } i \neq j$$

Beispiel :

Für das Beispiel der Marmeladendeckelfabrik konnte der Ergebnisraum der produzierten Marmeladendeckel zerlegt werden in :

Satz : (Satz der totalen Wahrscheinlichkeit)

Sei $B_1, \ldots, B_n$ eine Partition des Ergebnisraums U und sei $A \subseteq U$. Dann gilt

$$P(A) =$$

Beweis :

Beispiel :

Für das Beispiel der Marmeladendeckelfabrik :

- Das Ereignis D : „defekt sein” konnte zerlegt werden in :

- und seine Wahrscheinlichkeit $P(D)$ berechnet werden :

Satz : (Satz von Bayes)

Sei $B_1, \ldots, B_n$ eine Partition des Ergebnisraums U und sei $A \subseteq U$. Dann gilt

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

Beweis :

Beispiel :

Für das Beispiel der Marmeladendeckelfabrik konnte die bedingte Wahrscheinlichkeit von dem Ereignis A : „hergestellt von der Maschine A" unter der Vorraussetzung D („defekt") berechnet werden :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L5)

1. Es wird zufällig eine Familie mit zwei Kindern (keine Zwillinge) ausgewählt. Wir nehmen an, dass die Geburtenrate von Mädchen und Jungen je 50% beträgt.
   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in der Familie zwei Töchter ?
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in der Familie zwei Töchter, wenn das ältere Kind ein Mädchen ist ?
   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in der Familie zwei Töchter, wenn es mindestens eine Tochter gibt ?
2. Die Wahrscheinlichkeit berechnen bei einem Wurf von zwei „normalen" Würfeln eine Punktsumme von mindestens 10 zu erhalten, wenn
   (a) der erste Würfel auf „5" gefallen ist,
   (b) mindestens ein Würfel auf „5" gefallen ist.
3. Die Wahrscheinlichkeit berechnen bei dem dreifachen Wurf einer Münze dreimal „Kopf" zu erhalten, unter der Voraussetzung dass
   (a) der erste Wurf „Kopf" ergibt,
   (b) mindestens ein Wurf „Kopf" ergibt,
   (c) der erste Wurf nicht „Kopf" ergibt.
4. Es werden zwei „normale" Würfel geworfen. Folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen, unter der Voraussetzung dass die beiden Würfel verschiedene Punktzahlen anzeigen.
   (a) Die Punktsumme ist 6.
   (b) „1" kommt mindestens einmal vor.
   (c) Die Punktsumme ist höchstens 4.
5. Es werden zufällig zwei verschiedene Zahlen zwischen 1 und 9 ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass sie ungerade sind, unter der Vorraussetzung dass ihre Summe gerade ist.
6. Gegeben sind zwei Ereignisse A und B mit $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen : $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A}|\overline{B})$ und $P(\overline{B}|\overline{A})$
7. Gegeben sind zwei Ereignisse A und B mit $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ und $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen : $P(A|B)$ und $P(B|A)$
8. $P(B|A)$ für den Fall $A \subseteq B$ berechnen.

9. $P(A|B)$ für den Fall $A \cap B = \emptyset$ berechnen.

10. In einer Schule die zu 60% von Mädchen besucht wird, sind 4% der Jungen und 1% der Mädchen grösser als 1.60m. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Schüler ein Mädchen, wenn man feststellen konnte, dass dieser Schüler grösser als 1.60m ist?

11. Eine Krankheit betrifft 5% der Bevölkerung. Um eine Person auf diese Krankheit zu untersuchen wird ein einfacher Bluttest durchgeführt. Das Ergebnis ist jedoch nicht 100% sicher : für eine kranke Person ist das Ergebnis in 8 von 10 Fällen positiv und für eine gesunde Person ist das Ergebnis trotzdem in einem Fall von 10 positiv. („Krank" und „gesund" betreffen hier nur diese Krankheit.) Die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass eine zufällig getestete Person, deren Testergebnis positiv ist, auch wirklich krank ist.

12. Wir nehmen an, dass 5% der Männer und 0.25% der Frauen farbenblind sind. Eine zufällig ausgewählte Person ist farbenblind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es ein Mann, wenn

    (a) die Weltbevölkerung zu gleichen Teilen aus Männern und Frauen besteht ?

    (b) es doppelt so viele Männer wie Frauen gibt?

13. In einer Fernsehgewinnshow stellt der Moderator hinter eins der drei Tore A, B oder C ein Auto. Ein Spieler darf ein Tor aussuchen, dieses wird aber nicht geöffnet. Statt dessen öffnet der Moderator von den zwei anderen Toren eins hinter dem kein Auto steht. Danach bietet er dem Spieler an seine Wahl durch das andere geschlossene Tor zu ersetzen. Was soll der Spieler tun ?

3.2 Unabhängigkeit

Intuitiv : bei unabhängigen Ereignissen A und B ist die Wahrscheinlichkeit von dem Eintreffen des Ereignisses A unabhängig davon ob B eingetreten ist oder nicht (und umgekehrt).

Beispiele :

1. Zweifacher Wurf einer Münze : Sind die Ereignisse A : „beim ersten Wurf erhält man Zahl" und B : „beim zweiten Wurf erhält man Kopf" nach dieser intuitiven Definition unabhängig ?

2. In einem Saal befinden sich 10 Männer und 13 Frauen. Von den Männern tragen 7 einen Schnurrbart. Es wird zufällig eine Person ausgewählt. Sind die Ereignisse A : „die gewählte Person ist ein Mann" und „die gewählte Person trägt einen Schnurrbart" nach dieser intuitiven Definition unabhängig ?

Definition :

Zwei Ereignisse A und B heissen **unabhängig**, wenn gilt :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Andernfalls heissen A und B **abhängig**.

Allgemein : Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heissen unabhängig, wenn für jede Auswahl $\{i_1; \ldots; i_k\} \subseteq \{1; \ldots; n\}$ gilt :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L6)

1. Für unabhängige Ereignisse A und B mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$ gilt :

   $P(A|B) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(B|A) =$

2. Für den zweifachen Wurf einer Münze sind folgende Ereignisse gegeben :

   A : „man erhält zweimal dasselbe Ergebnis"

   B : „die Anzahl der Köpfe ist < 2"

   Sind diese beiden Ereignisse unabhängig ?

3. Welche Bedingungen müssen zwei unvereinbare Ereignisse A und B erfüllen, damit sie unabhängig sind ?

4. Für den Wurf von zwei normalen Würfeln sind folgende Ereignisse gegeben :

   A : „die Summe der erhaltenen Punkte ist ≥ 9"

   B : „die Summe der erhaltenen Punkte ist 8, 10 oder 12"

   Sind diese beiden Ereignisse unabhängig ?

5. In dieser Aufgabe wird angenommen, dass die Geburtenrate von Mädchen und Jungen gleich ist und alle Geburten voneinander unabhängige Ereignisse sind.

   Gegeben sind die Ereignisse

   A : „in der Familie gibt es sowohl Töchter als auch Söhne"

   B : „in der Familie gibt es höchstens einen Sohn"

   (a) Die beiden Ereignisse auf Abhängigkeit untersuchen, wenn es in der Familie drei Kinder gibt.

   (b) Die beiden Ereignisse auf Abhängigkeit untersuchen, wenn es in der Familie zwei Kinder gibt.

6. Für den dreifachen Wurf einer Münze sind folgende Ereignisse gegeben :

   A : „beim ersten Wurf erhält man Kopf"

   B : „beim zweiten Wurf erhält man Kopf"

   C : „bei genau zwei aufeinander folgenden Würfen erhält man Kopf"

   Welche Ereignisse sind unabhängig ?

7. Die Wahrscheinlichkeit, dass Stefan beim Dartspiel die Zielscheibe trifft beträgt $\frac{1}{4}$. Bei Claudia beträgt diese Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es mindestens einen Treffer wenn beide einmal spielen ?

8. Gegeben sind zwei unabhängige Ereignisse A und B. Zeigen, dass

   (a) $\overline{A}$ und $\overline{B}$ unabhängig sind

   (b) $\overline{A}$ und B unabhängig sind

   (c) A und $\overline{B}$ unabhängig sind

9. Beim Wurf von zwei normalen Würfeln wird die Punktsumme berechnet. Folgende „Punktsummenereignisse" auf Abhängigkeit untersuchen :

   (a) $A = \{9; 10; 11\}$ und $B = \{4; 7; 10\}$

   (b) $A = \{9; 11\}$ und $B = \{7; 10; 11\}$

   (c) $A = \{2; 3; 4\}$ und $B = \{2; 10; 11\}$

   (d) $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ und $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Quellen

- *Formulaires et tables, Mathématiques, Physique, Chimie*

  Comission Romande des Mathématique, Editions du Tricorne, Genève, 2000

- *Probabilités et Statistique*

  Freddy Taillard, Comission Romande des Mathématique, Editions du Tricorne, Genève, 2002

- Cours de D. Bopp

- *Duden Abiturhilfen, Stochastik, Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie*

  Dudenverlag, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim 2003

Lösungen

1.2 n-Fakultät : $n!$, Seite 2

1. (a) $\frac{13!}{11!} = 13 \cdot 12 = 156$ (mit Taschenrechner : glücklicherweise dasselbe Ergebnis)

   (b) $\frac{7!}{10!} = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{720}$
   (mit Taschenrechner : 0.001388889 angezeigt für eigentlich $0.0013\overline{8}$, Umwandeln in Bruchform ergibt ebenfalls $\frac{1}{720}$)

   (c) $\frac{100!}{98! \cdot 2!} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$ (mit Taschenrechner so direkt nicht möglich)

2. (a) $\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1)$

   (b) $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+2) \cdot (n+1)$

   (c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1) \cdot n$

1.3 Permutationen, Variationen, Kombinationen, Seite 6

1. 11 verschiedene Wege (Methode : Wege abzählen)

2. ohne Zurücklegen : $A_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mögliche Ausgänge
   mit Zurücklegen : $\overline{A_3^5} = 5^3 = 125$ mögliche Ausgänge

3. {}

   (a) sie muss höchstens $\overline{A_6^{10}} = 10^6 = 1'000'000$ Möglichkeiten ausprobieren

   (b) sie muss höchstens $9 \cdot \overline{A_5^{10}} = 9 \cdot 10^5 = 900'000$ Möglichkeiten ausprobieren

4. $P_9 = 9! = 362'880$ Zahlen

5. $\overline{P}(7,1,2) = \frac{10!}{7! \cdot 1! \cdot 2!} = 360$ Möglichkeiten

6. (a) $\overline{P}(3,2,1) = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$

   (b) $\overline{P}(2,1,1) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$

   (c) $\overline{P}(2,1,1) = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$

   (d) $\overline{P}(2,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

7. $4! \cdot 2! = 48$

8. $\frac{12!}{6! \cdot 3! \cdot 3!} = 18'480$ verschiedene Verteilungsmöglichkeiten

9. $C_3^{18} \cdot C_3^9 = 68'544$ Möglichkeiten

10. (a) $C_8^{10} = 45$ Möglichkeiten

    (b) $C_5^7 = 21$ Möglichkeiten

    (c) $C_4^5 \cdot C_4^5 + C_5^5 \cdot C_3^5 = 35$ Möglichkeiten

11. (a) $C_3^7 \cdot C_4^4 = 35$ Teams

    (b) $C_4^7 \cdot C_3^4 = 140$ Teams

12. $3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103'680$ Arten

13. $4! = 24$ Anordnungsmöglichkeiten

14. $(n-1)!$

15. (a) 3

(b) $n-k$

(c) C_5^8 oder C_3^8 (gleiches Ergebnis)

(d) C_k^n oder C_{n-k}^8 (gleiches Ergebnis)

(e) ...

(f) ...

16. (a) ...

(b) $\overline{C_4^7} = C_4^{7+4-1} = C_4^{10} = 210$ verschiedene Eisbecher

2.1 Ergebnisse und Ereignisse, Seite 11

1. ...

2. ...

3. (a) - (d) ...

(e) $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$

4. 170

5. 255

6. 27

2.4 Gemischte Aufgaben, Seite 17

1. (a) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 5.56\%$

(b) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16.67\%$

(c) $\frac{1}{36} \approx 2.78\%$

(d) $\frac{0}{36} = 0\%$

2. (a) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$

(b) $\frac{3}{4} = 75\%$

(c) $\frac{1}{4} = 25\%$

3. (a) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

(b) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$

(c) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 66.67\%$

4. (a) $\frac{8}{52} = \frac{2}{13} \approx 15.38\%$

(b) $\frac{15}{52} \approx 28.85\%$

5. (a) i. $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 40\%$

ii. $\frac{4}{15} \approx 26.67\%$

iii. $\frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$

iv. $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=60\%$

v. $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}\approx 73.33\%$

(b) $\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{8}{225}\approx 3.56\%$

(c) $\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{4}{91}\approx 4.40\%$

(d) $3!\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{16}{75}\approx 21.33\%$

(e) $3!\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{5}{13}=\frac{24}{91}\approx 26.37\%$

6. $\frac{C_2^2}{C_2^{20}}=\frac{1}{190}\approx 0.53\%$

7. (a) $\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}\approx 33.33\%$

(b) $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}\approx 16.67\%$

(c) $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\approx 83.33\%$

(d) $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\approx 66.67\%$

(e) $0=0\%$

8. (a) $\frac{4!\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{5}=20\%$

(b) $\frac{3!\cdot 3!\cdot 2!}{6!}=\frac{1}{10}=10\%$

9. $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}\approx 41.67\%$

10. (a) $\frac{C_3^{10}}{C_3^{15}}=\frac{24}{91}\approx 26.37\%$

(b) $\frac{C_1^5\cdot C_2^{10}}{C_3^{15}}=\frac{45}{91}\approx 49.45\%$

(c) $1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}\approx 73.63\%$

11. (a) i. $\frac{C_1^6}{C_2^{12}}=\frac{1}{11}\approx 9.09\%$

ii. $\frac{C_1^6\cdot C_1^6}{C_2^{12}}=\frac{6}{11}\approx 54.55\%$

(b) i. $\frac{C_2^6}{C_4^{12}}=\frac{1}{33}\approx 3.03\%$

ii. $\frac{C_4^6\cdot\left(C_1^2\right)^4}{C_4^{12}}=\frac{16}{33}\approx 48.48\%$

iii. $1-\frac{1}{33}-\frac{16}{33}=\frac{16}{33}\approx 48.48\%$

12. (a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}\approx 58.33\%$

(b) $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}\approx 41.67\%$

(c) $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}=25\%$

13. (a) $\frac{10+10}{30}=\frac{2}{3}\approx 66.67\%$

(b) $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\approx 33.33\%$ (Das Gegenereignis ist : ein Mädchen ohne blaue Augen.)

14. (a) $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 40\%$
    (b) $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%$
    (c) $\frac{5+8}{20} = \frac{13}{20} = 65\%$

15. (a) $\frac{(60-20)+(50-20)}{120} = \frac{7}{12} \approx 58.33\%$
    (b) $\frac{60+50-20}{120} = \frac{3}{4} = 75\%$
    (c) $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$

16. $\frac{C_1^3 \cdot C_1^3}{C_2^6} = \frac{3}{5} = 60\%$

17. (a) $\frac{C_4^8}{C_4^{64}} = \frac{5}{45384} \approx 0.01\%$
    (b) $\frac{C_4^{24}}{C_4^{64}} = \frac{253}{15128} \approx 1.67\%$

18. $P(\text{"}i\text{Punkte"}) = \frac{i}{21}\ (i = 1, \ldots, 6)$

19. (a) $\frac{C_1^2 \cdot C_1^4}{C_2^7} = \frac{8}{21} \approx 38.10\%$
    (b) $1 - \frac{C_2^4}{C_2^7} = \frac{5}{7} \approx 71.43\%$

20. (a) Nein.
    (b) ...
    (c) $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 8.33\%$

21. $\frac{C_1^3}{C_2^6} = \frac{1}{5} = 20\%$

22. (a) $\frac{C_4^5}{C_4^{10}} = \frac{1}{42} \approx 2.38\%$
    (b) $\frac{C_4^5}{C_4^{10}} = \frac{1}{42} \approx 2.38\%$
    (c) $1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42} \approx 97.62\%$
    (d) $\frac{C_1^5 \cdot C_1^3 \cdot C_2^2}{C_4^{10}} = \frac{1}{14} \approx 7.14\%$
    (e) $\frac{C_2^3 \cdot C_2^7 + C_3^3 \cdot C_1^7}{C_4^{10}} = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$
    (f) $\frac{C_2^3 \cdot C_2^2}{C_4^{10}} = \frac{1}{70} \approx 1.43\%$

23. $\frac{3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{35} \approx 2.86\%$

24. $\frac{C_1^4 \cdot C_1^6 + C_1^4 \cdot C_1^2 + C_1^6 \cdot C_1^2}{C_2^{12}} = \frac{2}{3} \approx 66.67\%$

25. (a) $\frac{C_1^4 \cdot C_1^4}{C_2^{36}} = \frac{8}{315} \approx 2.54\%$
    (b) $1 - \frac{C_2^{32}}{C_2^{36}} = \frac{67}{315} \approx 21.27\%$

(c) $\dfrac{C_1^1 \cdot C_1^1}{C_2^{36}} = \dfrac{1}{630} \approx 0.16\%$

26. $\dfrac{C_4^4 \cdot C_5^{32}}{C_9^{36}} = .. \approx 0.21\%$

27. (a) $\left(\dfrac{C_5^5 \cdot C_2^2}{C_5^{50} \cdot C_2^9} =\right) \dfrac{1}{C_5^{50} \cdot C_2^9} = \dfrac{1}{76'275'360} \approx 0.0000013\%$

(b) $\dfrac{C_5^5 \cdot C_1^2 \cdot C_1^7}{C_5^{50} \cdot C_2^9} = \dfrac{14}{76'275'360} = \dfrac{1}{5'448'240} \approx 0.000018\%$

(c) $1 - \dfrac{C_5^{45} \cdot C_2^9 + C_1^5 \cdot C_4^{45} \cdot \left(C_2^7 + C_1^2 \cdot C_1^7\right) + C_2^5 \cdot C_3^{45} \cdot C_2^7}{C_5^{50} \cdot C_2^9} = 1 - \dfrac{43'983'324 + 26'074'125 + 2'979'900}{76'275'360}$

$= 1 - \dfrac{73'037'349}{76'275'360} = \dfrac{3'238'011}{76'275'360} \approx 4.25\%$

3.1 Definition und Satz von Bayes, Seite 27

1. (a) $\dfrac{1}{4} = 25\%$

(b) $\dfrac{1}{2} = 50\%$

(c) $\dfrac{1}{3} \approx 33.33\%$

2. (a) $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \approx 33.33\%$

(b) $\dfrac{3}{11} \approx 27.27\%$

3. (a) $\dfrac{1}{4} = 25\%$

(b) $\dfrac{1}{7} \approx 14.29\%$

(c) $\dfrac{0}{4} = 0\%$

4. (a) $\dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15} \approx 13.33\%$

(b) $\dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3} \approx 33.33\%$

(c) $\dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15} \approx 13.33\%$

5. $\dfrac{C_2^5}{C_2^5 + C_2^4} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8} = 62.5\%$

6. $P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4} = 75\%$

$P(B|A) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

$P(A \cup B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$

$P(\overline{A}|\overline{B}) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{A \cup B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{1 - \frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{5}{8} = 62.5\%$

$P(\overline{B}|\overline{A}) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{P\left(\overline{A \cup B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{1 - \frac{7}{12}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{5}{6} \approx 83.33\%$

7. $P(A|B) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{\frac{5}{8}} = \dfrac{\frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{2}{5} = 40\%$

$P(B|A) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{\frac{3}{8}} = \dfrac{\frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3} \approx 66.67\%$

8. $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1 = 100\%$

9. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0 = 0\%$

10. $\dfrac{60\% \cdot 1\%}{60\% \cdot 1\% + 40\% \cdot 4\%} = \dfrac{6}{22} = \dfrac{3}{11} \approx 27.27\%$

11. $\dfrac{5\% \cdot \frac{8}{10}}{5\% \cdot \frac{8}{10} + 95\% \cdot \frac{1}{10}} = \dfrac{8}{27} \approx 29.63\%$

12. (a) $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot 5\%}{\frac{1}{2} \cdot 5\% + \frac{1}{2} \cdot 0.25\%} = \dfrac{20}{21} \approx 95.24\%$

    (b) $\dfrac{\frac{2}{3} \cdot 5\%}{\frac{2}{3} \cdot 5\% + \frac{1}{3} \cdot 0.25\%} = \dfrac{40}{41} \approx 97.56\%$

13. ...

3.2 Unabhängigkeit, Seite 30

1. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

   $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$

2. $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ $\quad \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4}$ also sind die Ereignisse abhängig

3. unvereinbar : $A \cap B = \emptyset$, unabhängig : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

   unvereinbar und unabhängig : $P(\emptyset) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow 0 = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A) = 0$ <u>oder</u> $P(B) = 0$

4. $P(A) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$, $P(B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$ $\quad \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{1}{4}$ also sind die Ereignisse abhängig

5. (a) $P(A) = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$, $P(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \dfrac{3}{8}$ $\quad \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2}$ also sind die Ereignisse unabhängig

   (b) $P(A) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4}$ also sind die Ereignisse abhängig

6. $P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $P(C) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \dfrac{1}{8}$, $P(B \cap C) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{8}$

   $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$ also sind A und B unabhängig

   $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4}$ also sind A und C unabhängig

   $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4}$ also sind B und C abhängig

   Die drei Ereignisse A, B, C zusammen sind abhängig, da B und C abhängig sind.

7. Die Treffsicherheiten von Claudia und Stefan sind unabhängig.

   $P(\text{"mind. 1 Treffer"}) = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{5} = 1 - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{11}{20} = 55\%$

8. (a) $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$

   $P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$

   $\Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{B}\right)$

   (b) $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = P\left(\overline{A}\right) \cdot P(B)$

   (c) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P\left(\overline{B}\right)$

9. (a) $P(A) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ $\quad \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3}$ also sind die Ereignisse unabhängig

(b) $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{11}{36}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ $\quad \frac{1}{18}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{36}$ also sind die Ereignisse abhängig

(c) $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$ $\quad \frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ also sind die Ereignisse unabhängig

(d) $P(A\cap B)=P(A)=P(B)\in\,]0;1[\;\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ also sind die Ereignisse abhängig