Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren

1.1 Pfeile

Die Vektoren, mit denen wir dieses Jahr arbeiten, werden durch Pfeile im zwei- oder dreidimensionalen Raum veranschaulicht.

Ein **Vektor** ist festgelegt durch :

Für jeden Vektor gibt es unendlich viele **Repräsentanten**.

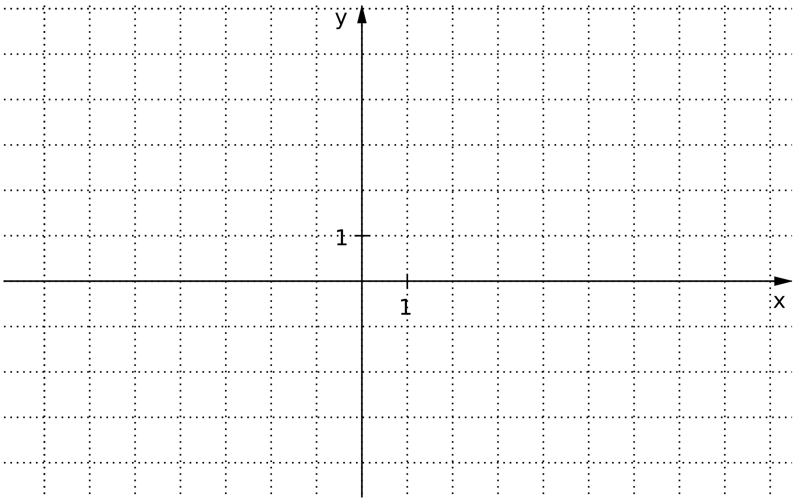
Diese sind gleichgerichtete, gleich lange Pfeile mit verschiedenen **Fuss-** und **Endpunkten**.

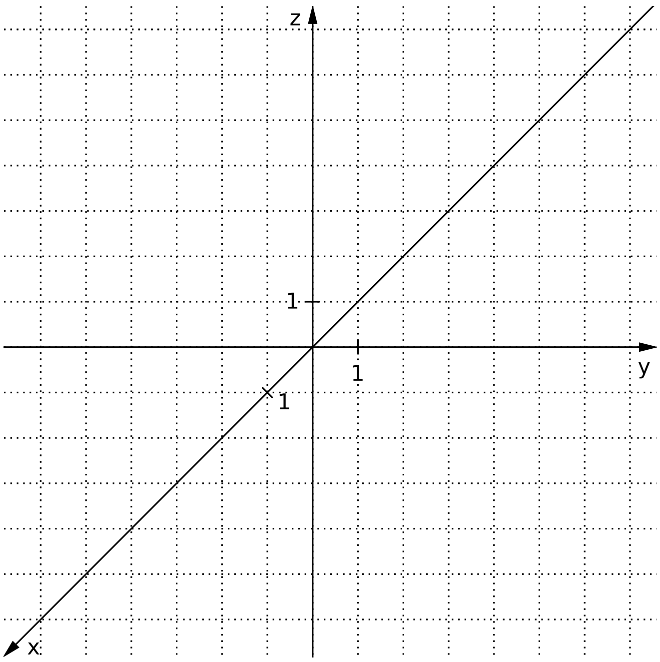
1.2 Affiner Punktraum

Im zwei- und dreidimensionalen Raum kann jedem Punktepaar P und Q ein **Verbindungsvektor** $\overrightarrow{PQ}$ zugeordnet werden.

Zu jedem Vektor $\overrightarrow{a}$ und jedem Fusspunkt P gibt es genau einen Endpunkt Q mit der Eigenschaft $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{a}$.

Im kartesischen Koordinatensystem des zwei- oder dreidimensionalen Raums ($\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) ist es möglich einen Vektor $\overrightarrow{a}$ mit Hilfe von Koordinaten darzustellen.





Diese Darstellung ist der **Koordinatenvektor** von $\overrightarrow{a}$ im kartesichen Koordinatensystem.

Um Punkte und Vektoren zu unterscheiden schreiben wir die Koordinaten von Punkten horizontal und die Koordinaten von Punkten vertikal.

Für Punkte A und B gilt :

Sei O der Ursprung des Koordinatensystems. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{OP}$ wird **Ortsvektor** von P genannt. Es gilt :

Bemerkung : Auch wenn man Lust hat sich „$\overrightarrow{AB} = B - A$" zu merken, ist diese Schreibweise nicht korrekt : Punkte können wir nicht subtrahieren. Die korrekte Schreibweise ist (wie wir noch sehen werden) :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L1)

1. Folgende Vektoren darstellen als
   (a) Ortsvektoren,
   (b) Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$, mit dem Fusspunkt $P(2;1)$ beziehungsweise (bzw.) $P(3;4;1)$. Die Koordinaten des Endpunktes Q berechnen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sind

$$A(5;0),\ B(-2;3),\ C(6;-7),\ D(2;2;-1)$$

$$E(-3;2;5),\ F(4;-1;1),\ G(0;0;9),\ H(-1;-2;-3)$$

   Die Koordinaten folgender Vektoren berechnen.

(a) $\overrightarrow{OA}$	(c) $\overrightarrow{BA}$	(e) $\overrightarrow{AE}$	(g) $\overrightarrow{GE}$
(b) $\overrightarrow{DO}$	(d) $\overrightarrow{CD}$	(f) $\overrightarrow{FH}$	(h) $\overrightarrow{FG}$

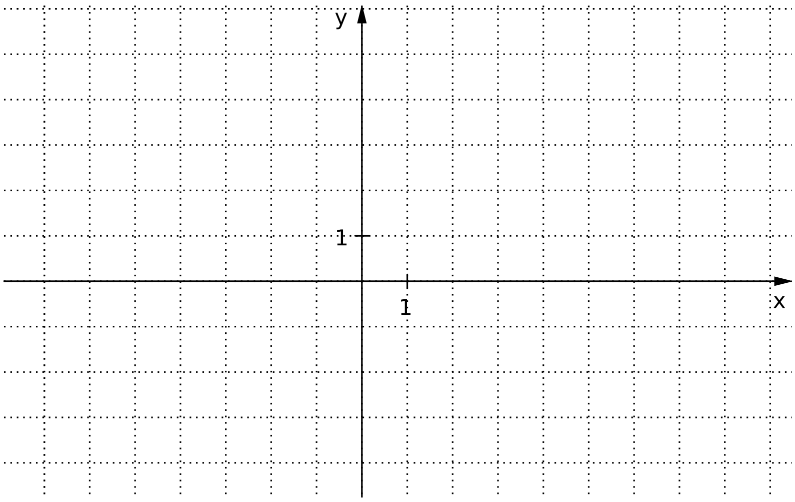
1.3 Vektoraddition

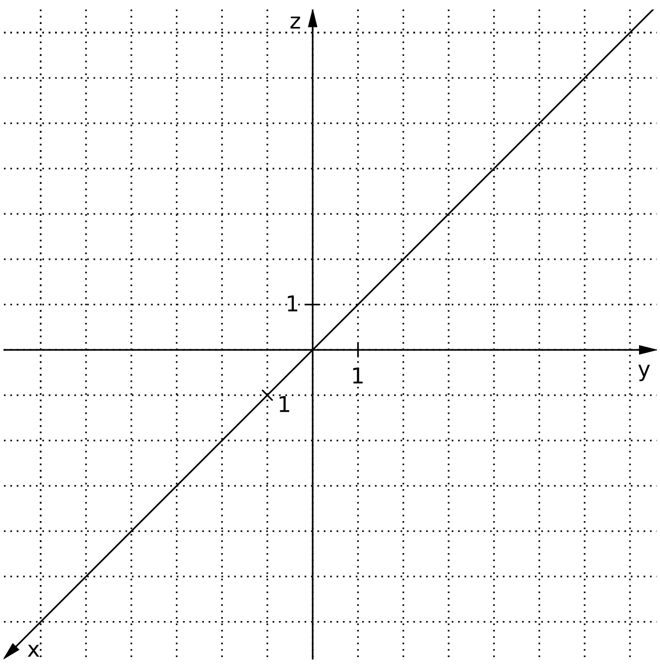
Für die Addition von zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ gibt es zwei geometrische Ansätze :

1.

2.

Für die Koordinatenschreibweise bedeutet dies :





Der Vektor $\overrightarrow{0}$ heisst **Nullvektor**. Es gilt : $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$

Sein Koordinatenvektor ist :

Für jeden Vektor $\overrightarrow{a}$ gibt es einen **Gegenvektor** $-\overrightarrow{a}$. Es gilt : $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$

Die Koordinaten des Gegenvektors sind :

Bemerkung : Wie beim Rechnen mit Zahlen schreibt man auch für Vektoren statt $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$ abgekürzt $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L1)

1. Zeigen, dass die Addition von Vektoren
   (a) assoziativ ist : $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
   (b) kommutativ ist : $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$

2. Gegeben sind

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

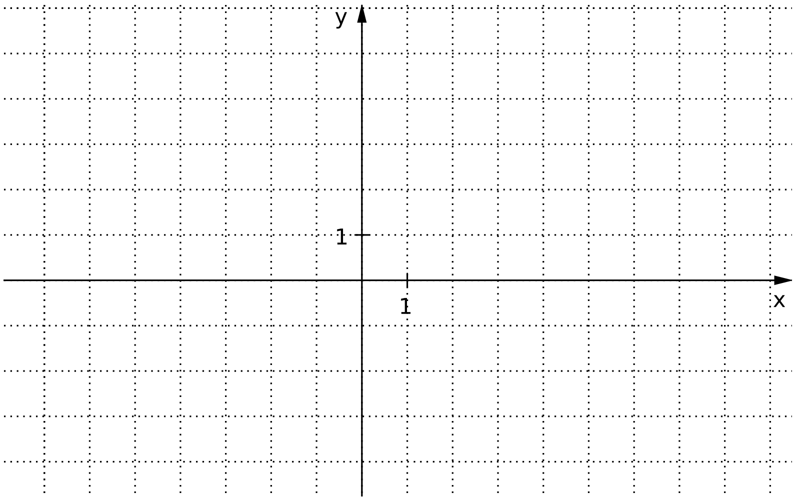
   Berechnen :
   (a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$
   (b) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{e}$
   (c) $-\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$
   (d) $\overrightarrow{e} + (-\overrightarrow{f}) + (-\overrightarrow{e}) + (-\overrightarrow{g})$

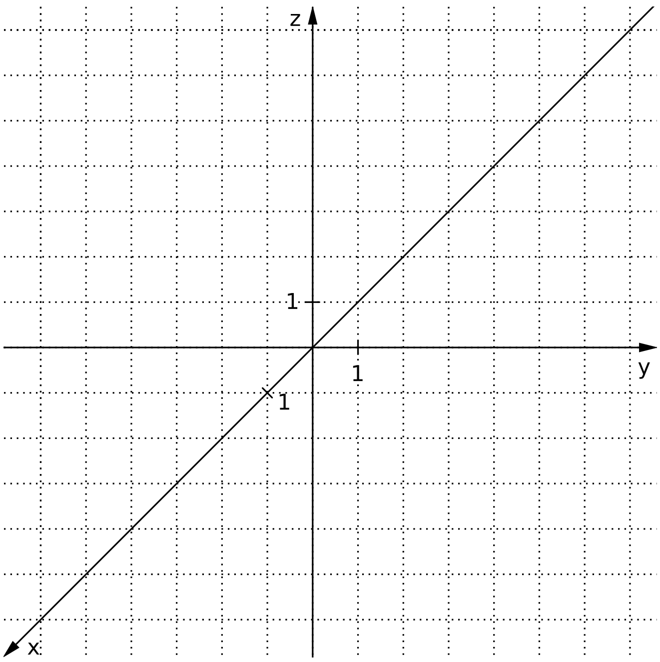
3. Geometrisch zeigen warum folgende Aussage wahr ist :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

1.4 S-Multiplikation

Die Multiplikation von einer reellen Zahl λ und einem Vektor $\overrightarrow{a}$ kann geometrisch wie folgt dargestellt werden :





Die reellen Zahlen nennt man auch **Skalare**, daher der Name S-Multiplikation.

In der Koordinatenschreibweise der Vektoren rechnet man also wie folgt :

Bemerkungen : Man benutzt der Einfachheit halber die gleichen Rechenzeichen „+" und „·" wie beim Rechnen mit Zahlen. Man sollte dennoch im Kopf behalten, dass die Objekte mit denen man rechnet Vektoren sind und keine Zahlen.

Ebenfalls wie beim Rechnen mit Zahlen, kann man den Punkt der Multiplikation weglassen und schreibt oft „$\lambda \overrightarrow{a}$" statt „$\lambda \cdot \overrightarrow{a}$".

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L2)

1. Zeigen, dass die Addition und S-Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) folgende Gesetze erfüllen : Für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\in \mathbb{R}^3$) und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt :

   (a) $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{a}$

   (b) $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a}$

   (c) $\lambda \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b}$

   (d) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

2. Gegeben sind

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Berechnen :

   (a) $3\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b}$

   (b) $0\overrightarrow{f}$

   (c) $-5\overrightarrow{e} + 3\overrightarrow{f} - 6\overrightarrow{g}$

   (d) $2\overrightarrow{e} + 7\overrightarrow{f} - 6\overrightarrow{e} + 13\overrightarrow{g} - 6\overrightarrow{f}$

1.5 Linearkombination

Eine **Linearkombination** der Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ erhält man, wenn man Addition und S-Multiplikation kombiniert :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L3)

1. Mit Hilfe der bereits eingezeichneten Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ folgende Vektoren (ohne Berechnung von Koordinaten) hinzufügen :

   (a) $\overrightarrow{v_1} = -\overrightarrow{a}$

   (b) $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{c}$

   (c) $\overrightarrow{v_3} = 2\overrightarrow{a}$

   (d) $\overrightarrow{v_4} = 1.5 \cdot \overrightarrow{b}$

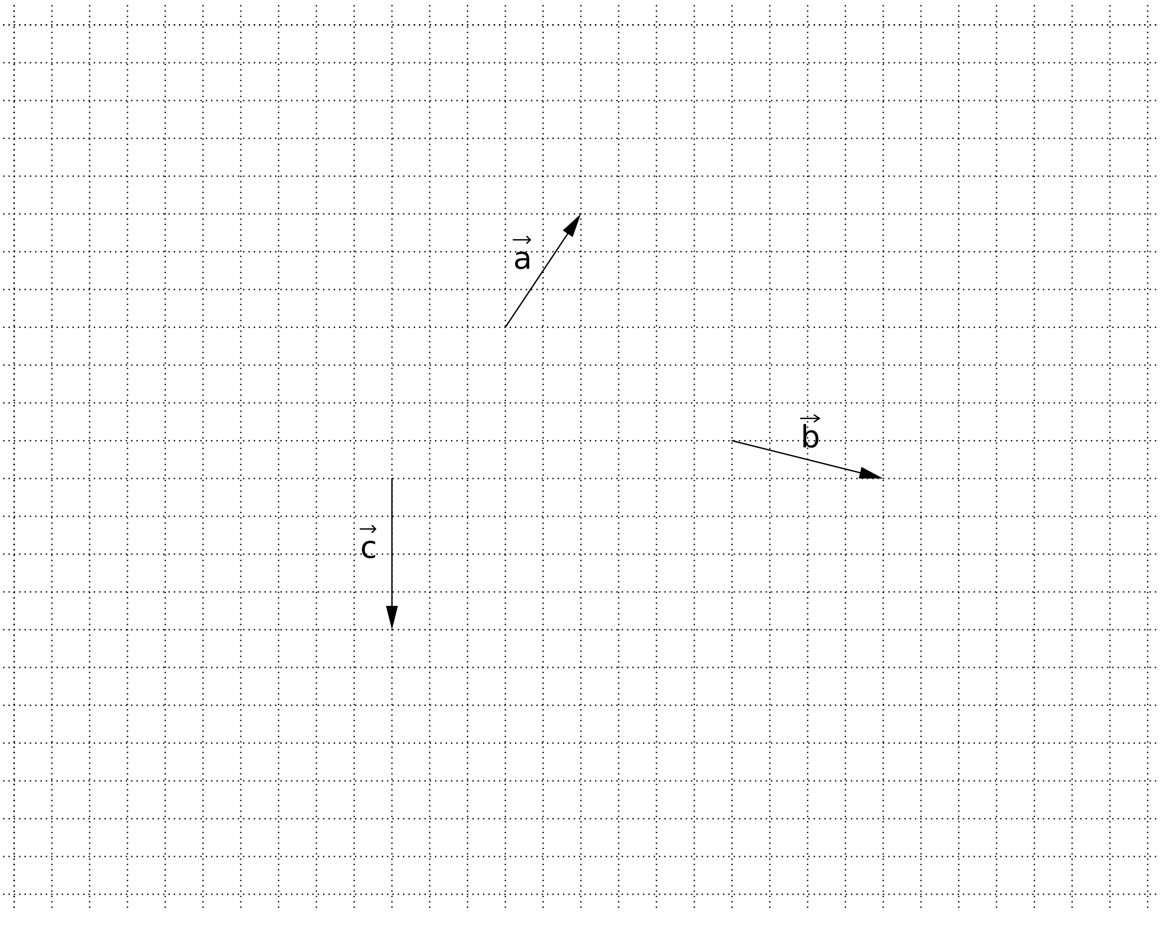
   (e) $\overrightarrow{v_5} = -0.5 \cdot \overrightarrow{b}$

   (f) $\overrightarrow{v_6} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

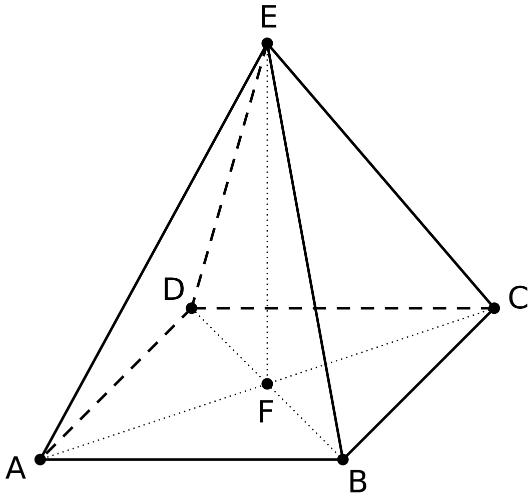
   (g) $\overrightarrow{v_7} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

   (h) $\overrightarrow{v_8} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$

   (i) $\overrightarrow{v_9} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$



2. Sei folgende gerade Pyramide $ABCDE$ mit quadratischer Basis $ABCD$:



Sei $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AE}$.

Folgende Vektoren als Linearkombinationen von $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ und $\overrightarrow{w}$ schreiben :

(a) $\overrightarrow{AC}$

(b) $\overrightarrow{BD}$

(c) $\overrightarrow{BE}$

(d) $\overrightarrow{CE}$

(e) $\overrightarrow{BC}$

(f) $\overrightarrow{EF}$

(g) $\overrightarrow{DE}$

1.6 Vektorraum

Definition : Eine Menge V von Objekten heisst **Vektorraum** über $\mathbb{R}$, wenn es eine innere Verknüpfung, die Vektoraddition, und eine äussere Verknüpfung, die S-Multiplikation, gibt, die folgende Gesetze erfüllen.

Die **Vektoraddition** ordnet je zwei Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ ihre Summe $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in V$ zu.

Die Vektoraddition ist assoziativ.

Es gibt ein neutrales Element, den Vektor $\overrightarrow{n}$: $\forall \overrightarrow{a} \in V \ \ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Zu jedem Vektor $\overrightarrow{a} \in V$ gibt es einen inversen Vektor $\overrightarrow{a}'$: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a}' = \overrightarrow{a}' + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{n}$

Die Vektoraddition ist kommutativ.

Die **S-Multiplikation** ordnet jeder Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedem Vektor $\overrightarrow{a} \in V$ den Vektor $\lambda \cdot \overrightarrow{a} \in V$ zu.

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ gilt :

$$
\begin{aligned}
&\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{a}) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{a} \\
&(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a} \\
&\lambda \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} \\
&1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}
\end{aligned}
$$

Bemerkung : Wir arbeiten seit einigen Seiten schon mit zwei Vektorräumen : $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit den weiter oben definierten Additionen und S-Multiplikationen.

Es gibt noch andere, weniger intuitive und geometrisch anschauliche Beispiele : Familien von reellen Funktionen, Polynome, usw.

2 Längen und Winkel

2.1 Betrag

Definition : Der **Betrag** $\|\overrightarrow{a}\|$ (oder auch die euklidische **Norm**) entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{a}$ des zwei- oder dreidimensionalen Raums.

Für die Koordinatenschreibweise bedeutet dies :

Aufgabe : (Lösungen : Anhang II, Seite L3)

1. Den Betrag der folgenden Vektoren berechnen :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Zeigen, dass für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\in \mathbb{R}^3$) und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt :

   (a) $\|\overrightarrow{a}\| \geq 0$

   (b) $\|\overrightarrow{a}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

   (c) $\|\lambda\overrightarrow{a}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{a}\|$

   (d) $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| \leq \|\overrightarrow{a}\| + \left\|\overrightarrow{b}\right\|$ (Dreiecksungleichung) (graphisch erklären)

2.2 Skalarprodukt

Nach der S-Multiplikation wird jetzt ein weiteres Produkt eingeführt : das Skalarprodukt. Wozu es gebraucht wird sehen wir im Laufe dieses und des folgenden Abschnitts.

Definition : Das **Skalarprodukt** ist eine Abbildung die zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ eine reelle Zahl zuordnet. Für die Koordinatenschreibweise in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist das Skalarprodukt gegeben durch :

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \qquad \text{für } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \qquad \text{für } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Vorsicht : S-Multiplikation und Skalarprodukt haben zwar ähnliche Namen, sollten aber nicht verwechselt werden ! Die Argumente der S-Multiplikation sind eine reelle Zahl und ein Vektor, das Ergebnis ist ein Vektor. Die Argumente des Skalarproduktes sind zwei Vektoren, das Ergebnis ist eine reelle Zahl.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L4)

1. Alle möglichen Skalarprodukte von zwei (gleichen oder verschiedenen) der folgenden Vektoren berechnen.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sind $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\in \mathbb{R}^3$) und $\lambda \in \mathbb{R}$. Vervollständigen und beweisen :

   (a) $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a}$

   (b) $(\lambda \overrightarrow{a}) \bullet \overrightarrow{b} = \lambda \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right)$

   (c) $\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c}$

   (d) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}\right) = \ldots ? \ \ldots$

   (e) $\|\overrightarrow{a}\|^2 = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a}$

   (f) $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \lambda \|\overrightarrow{a}\|^2$

Definition : Zwei Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ sind **orthogonal**, man schreibt auch $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, wenn ihre Repräsentanten im rechten Winkel zueinander stehen, falls sie sich berühren.

Satz : Gegeben sind zwei Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$.

Es gilt :

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 0$$

Beweis :

Bemerkung : Es wird definiert, dass der Nullvektor zu allen Vektoren orthogonal ist. Somit gilt der vorherige Satz allgemein.

2.3 Winkel

Satz : Gegeben sind zwei Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Stellt man sie mit demselben Fusspunkt dar, dann erfüllt der Winkel φ den sie bilden :

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|}$$

Bemerkung : Für den Winkel φ' gilt genau dieselbe Aussage :

Es reicht also sich um Winkel zwischen 0° und 180° zu kümmern.

Beweis :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L4)

1. Den (kleineren) Winkel zwischen folgenden Vektoren berechnen. (Nur die Winkel, in °, auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

   (a) $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ (b) $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit $A(1;4)$, $B(3;2)$ und $C(5;3)$. Alle Winkel des Dreiecks berechnen.(Nur die Winkel, in °, auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

2.4 Gemischte Aufgaben

(Lösungen : Anhang II, Seite L5)

Die Abkürzung „ $(\ldots)^t$ ” bedeutet hier : „als vertikalen Vektor schreiben”, z.B. : $(1;2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Gegeben sind $A(-1;-1)$, $B(3;2)$ und $C(5;8)$. Die Koordinaten des Punktes D so berechnen, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Die Situation graphisch darstellen.

   (b) Gegeben sind $A(1;4)$, $\overrightarrow{u} = (1;-5)^t$ und $\overrightarrow{v} = (3;7)^t$. Die Koordinaten der Punkte B, C und D so berechnen, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$ und das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Die Situation graphisch darstellen.

2. (a) Gegeben sind $A(2;3;-3)$, $B(4;4;7)$ und $C(1;3;-1)$. Die Koordinaten des Punktes D so berechnen, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Die Situation graphisch darstellen.

   (b) Gegeben sind $A(1;2;-1)$, $\overrightarrow{u} = (0;1;3)^t$ und $\overrightarrow{v} = (2;-1;1)^t$. Die Koordinaten der Punkte B, C und D so berechnen, dass $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$ und das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Die Situation graphisch darstellen.

3. Gegeben sind $A(1;2)$, $B(3;5)$ und $C(5;2)$. Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig ?

4. Gegeben sind $A(1;2)$ und $B(3;4)$. Die Koordinaten des Punktes C so bestimmen, dass ΔABC ein in C gleichschenkliges Dreieck ist. Graphisch darstellen.

5. Gegeben sind $A(3;4;9)$, $B(2;7;2)$, $C(-2;1;0)$ und $D(-1;-2;7)$. Ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ? Ein Rechteck ? Ein Quadrat ?

6. Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit $A(0;3;5)$, $B(4;6;2)$ und $C(1;3;7)$. Alle Winkel des Dreiecks berechnen. (Nur die Winkel, in °, auf eine Stelle nach dem Komma runden.)

7. Gegeben sind $A(2;3)$ und $B(4;1)$. Die Koordinaten des Punktes C so berechnen, dass der Winkel in A : $\widehat{BAC} = 90°$ ist und der Winkel in B : $\widehat{ABC} = 60°$ ist.

8. Gegeben sind $A(x_A;y_A)$ und $B(x_B;y_B)$. Die Koordinaten des Mittelpunktes M_{AB} der Strecke $[AB]$ angeben. Und in $\mathbb{R}^3$?

9. Beweisen, dass die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks $ABCD$ in $\mathbb{R}^2$ immer ein Parallelogramm $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ bilden. Und in $\mathbb{R}^3$?

3 Vektorprodukt und Anwendungen

Sei in $\mathbb{R}^2$ der Vektor $\overrightarrow{u} = (u_1; u_2)^t \neq \overrightarrow{0}$.

Wie wählt man die Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{v} = (?; ?)^t$, damit $\overrightarrow{v}$ zu $\overrightarrow{u}$ orthogonal ist ?

Etwas schwieriger : sei in $\mathbb{R}^3$ der Vektor $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)^t \neq \overrightarrow{0}$.

Wie wählt man die Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{c} = (?; ?; ?)^t$, damit $\overrightarrow{c}$ zu $\overrightarrow{a}$ orthogonal ist ?

Definition : Gegeben sind zwei Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$.

Das **Vektorprodukt** (oder **Kreuzprodukt**) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ist gegeben durch :

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel : $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften : (Alle folgenden Vektoren sind Elemente von $\mathbb{R}^3$.)

$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a}$ und $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$

Das Vektorprodukt ist **nicht kommutativ**, aber es gilt :

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}\right) = \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c}\right) \cdot \left(\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{d}\right) - \left(\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{d}\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\| = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \sin(\varphi)$$

(φ bezeichnet wie bei der Winkelberechnung den kleineren Winkel zwischen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$)

Bemerkung : Das Vektorprodukt ist so definiert, dass das System $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ein Rechtssystem ist :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L7)

1. Berechnen :

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Für Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$ folgende Eigenschaften ergänzen und beweisen.
   (a) Ist $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ oder $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ (oder beide), dann gilt : $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \quad ?$
   (b) $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right)$
   (c) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = ?$
   (d) Wenn $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ die gleiche Richtung besitzen $\left(\overrightarrow{b} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} \right)$, dann gilt : $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \quad ?$
   (e) $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \right) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
   (f) Das Vektorprodukt ist **nicht assoziativ**.
   (g) $\left\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right\|$ gibt die Fläche des durch $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ bestimmten Parallelogramms (dessen Ränder durch $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ gegeben sind)

3. Gegeben sind $A\,(-1; 2; 7)$, $B\,(3; 3; 0)$ und $C\,(4; -1; 2)$.

   Die Fläche des Dreiecks ABC berechnen.

4 Geraden

4.1 Parameterdarstellung und Koordinatengleichung(en)

Eine Gerade d kann festgelegt werden durch :

Für die Punkte auf der Geraden gilt :

Definition : Sei d eine Gerade, A und B zwei Punkte auf d und $\overrightarrow{u}$ ein **Richtungsvektor** von d.

Jeder Punkt P auf der Geraden erfüllt :

Diese Formen heissen **Parameterdarstellung** der Geraden d.

Die **Koordinatengleichung(en)** einer Gerade enthält (enthalten) nur die Koordinaten des allgemeinen Punktes P : x, y (und z).

Von der Parameterdarstellung zu der (den) Koordinatengleichung(en) :

in $\mathbb{R}^2$:

in $\mathbb{R}^3$:

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L8)

1. Die Parameterdarstellung und die Koordinatengleichung(en) folgender Geraden geben :

   (a) d_1 durch $A(4;3)$ und $B(1;7)$

   (b) d_2 durch $A(1;5;0)$ und $B(3;0;1)$

   (c) d_3 durch $A(5;-3)$, mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u} = (0;-3)^t$

2. Sei die Gerade d gegeben durch :

$$d \;:\; -3x + 4y = 5$$

   Eine Parameterdarstellung dieser Geraden geben.

3. Sei d_1 eine Gerade durch die Punkte $A\,(-2;3;-1)$ und $B\,(0;4;4)$.

   Die Koordinatengleichungen einer Geraden d_2 bestimmen, die parallel zu d_1 liegt und durch den Punkt $C\,(-3;2;5)$ geht.

4.2 Normalengleichung und Koordinatengleichung in $\mathbb{R}^2$

Sei d eine Gerade, A ein Punkt auf dieser Geraden und $\overrightarrow{n}$ ein Vektor dessen Richtung orthogonal zu der Richtung der Geraden ist ($\overrightarrow{n}$ nennt sich **Normalenvektor**).

Was wissen wir ?

Definition : Sei d eine Gerade, A ein Punkt auf d und $\overrightarrow{n}$ ein Normalenvektor von d. Nur für Punkte P auf d gilt die **Normalengleichung** :

Die Koordinatengleichung erhält man durch einsetzen der Koordinaten.

Von der Normalengleichung zu der Koordinatengleichung :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L9)

1. Die Normalen- und die Koordinatengleichung folgender Geraden geben :

   (a) d_1 durch $A(4;3)$ und mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (-1;7)^t$

   (b) d_2 durch $A(1;2)$ und rechtwinklig zu der Geraden durch $B(3;1)$ und $C(-2;4)$

2. Für jede der folgenden Geraden, gegeben durch ihre Koordinatengleichung, einen Normalenvektor bestimmen :

   (a) $d_1 : \; -5x + 3y = 0$

   (b) $d_2 : \; -5x + 3y = 7$

   (c) $d_3 : \; ax + by + c = 0$ (Welche Bedingungen müssen a, b und c erfüllen ?)

3. Warum arbeiten wir nicht auf die gleiche Art mit Geraden in $\mathbb{R}^3$?

4.3 Graphische Darstellung im dreidimensionalen Raum

Wie man eine Gerade im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ darstellt wissen wir schon seit einigen Jahren.

Auch für eine Gerade d durch zwei Punkte A und B in $\mathbb{R}^3$ kann man diese Punkte zeichnen und sie durch einen Strich verbinden den man nach beiden Seiten hin verlängert.

Leider ist aber die graphische Darstellung einer dreidimensionalen Situation nicht immer leicht zu interpretieren. Um die Darstellung leserlicher zu machen, werden wir nur den „sichtbaren Teil" graphisch darstellen. Wenn eine Gerade, eine Ebene oder ein anderes Objekt über diesen Teil hinaus reicht, kann man dies mit gestrichelten Linien andeuten.

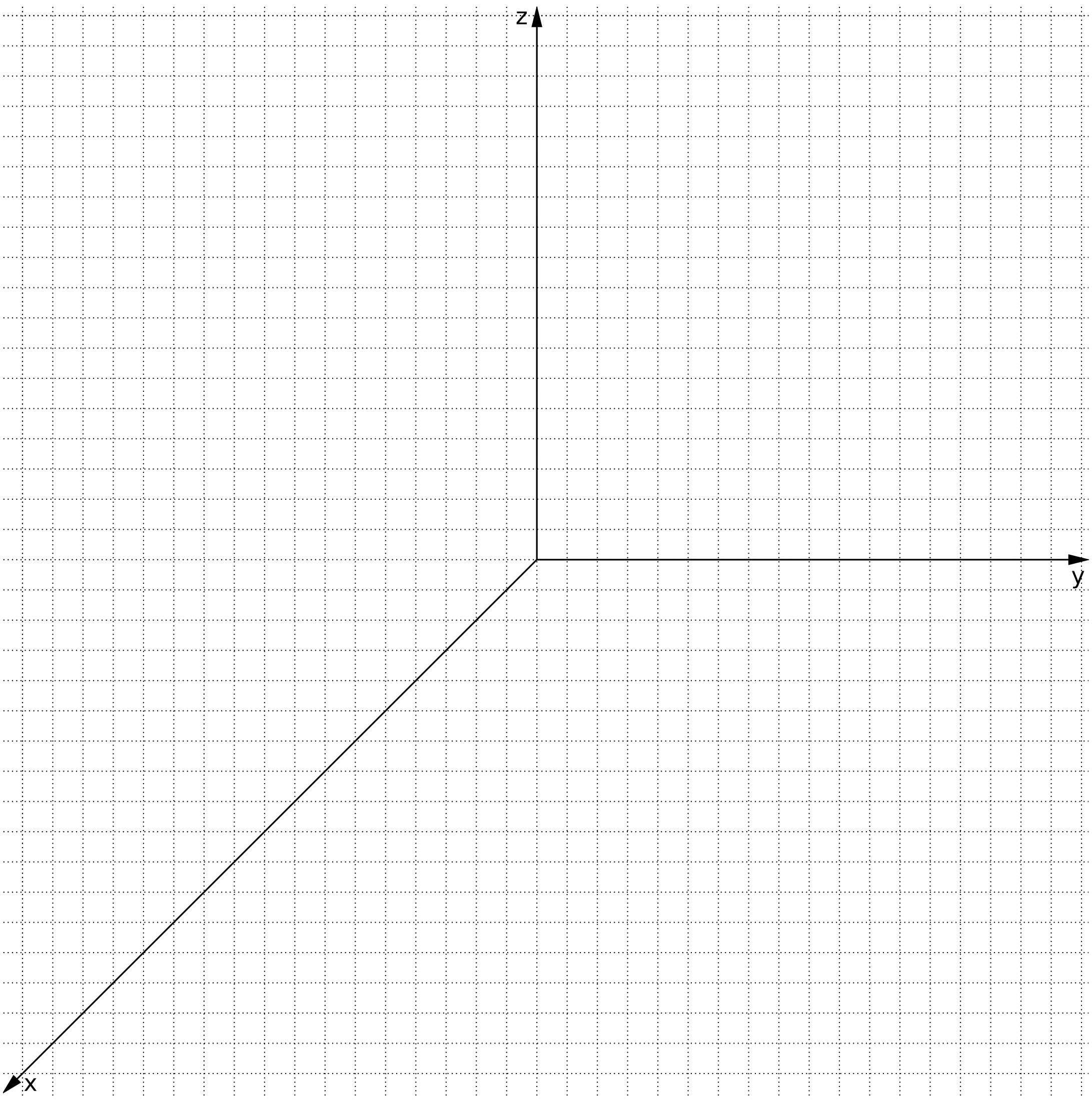
Der **„sichtbare Teil"** von $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch :

Beispiele :

1. Liegen die folgenden Punkte im sichtbaren Teil von $\mathbb{R}^3$?

$$A(7;0;-1) \quad B(9;5;1) \quad C(0;0;0) \quad D(0;-1;3)$$

2. Sei d die Gerade durch $A(1;\frac{8}{3};\frac{8}{3})$ und $B(2;\frac{4}{3};\frac{7}{3})$.
   Wie stellt man den sichtbaren Teil von d dar ?


z
y
x

Grapische Darstellung einer Geraden : Um den sichtbaren Teil einer Geraden darzustellen, berechnet man die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen $0xy$, $0xz$ und $0yz$. Man zeichnet den sichtbaren Teil der Geraden, die diese Schnittpunkte verbindet.

Bei zwei fehlenden Schnittpunkten zieht man, je nach Situation, Parallelen zu der x-, $y-$ oder $z-$Achse.

Um die Lage der Gerade besser „lesen" zu können, zeichnet man ebenfalls den „Schatten" der Geraden ein, d.h. die Projektion der Geraden auf die $0xy$-Ebene (den „Boden").

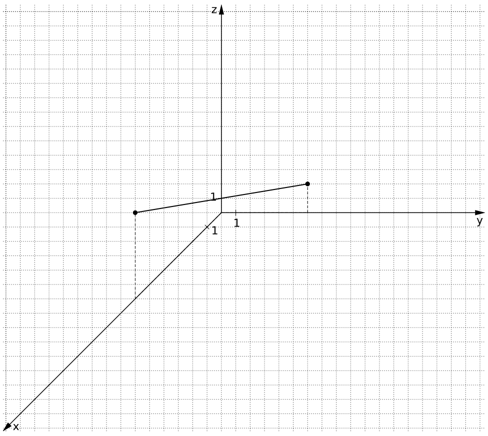
Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L9)

Den sichtbaren Teil der folgenden Geraden graphisch darstellen.

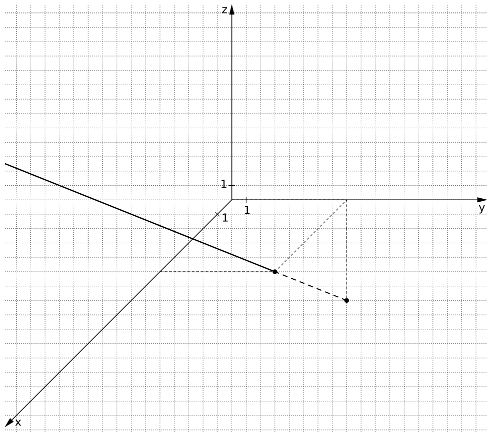
1. d durch die Punkte $A(2;1;3)$ und $B(3;2;0)$
2. $d : \begin{cases} 5x - y = 10 \\ 4x - z = 4 \end{cases}$
3. d durch den Punkt $A(2;5;9)$ mit Richtungsvektor $\overrightarrow{u} = (0;5;3)^t$
4. $d : \begin{cases} y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$
5. d durch die Punkte $A(-5;6;-2)$ und $B(-10;6;-1)$
6. $d : \begin{cases} y = 2x + 6 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$
7. d durch die Punkte $A(4;7;1)$ und $B(4;-3;1)$
8. $d : \begin{cases} 2x + y = 12 \\ 5y + 4z = 60 \end{cases}$
9. d durch die Punkte $A(1;-4;4)$ und $B(3;-8;6)$
10. $d : \begin{cases} x + z = -1 \\ y - z = -4 \end{cases}$

In den folgenden Darstellungen ist der sichtbare Teil von Geraden gegeben und Schnittpunkte mit bestimmten Koordinatenebenen. Die Koordinaten der Schnittpunkte mit den fehlenden Koordinatenebenen ablesen.

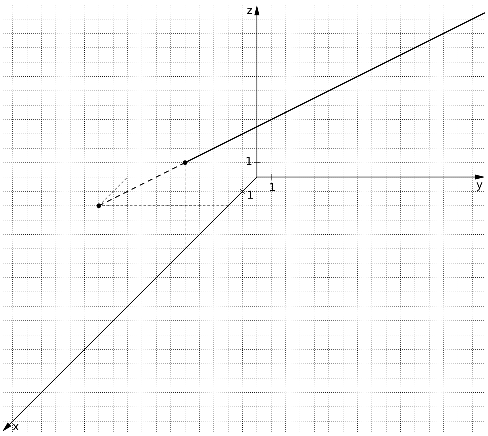
11.



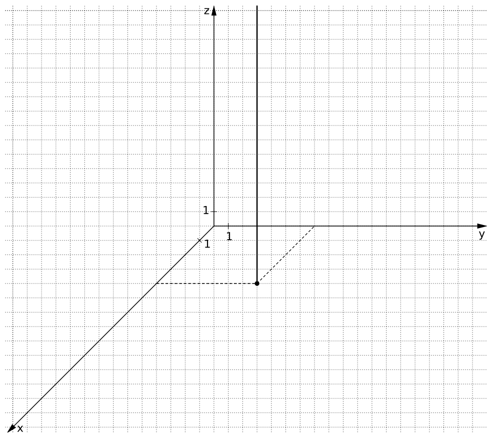
13.



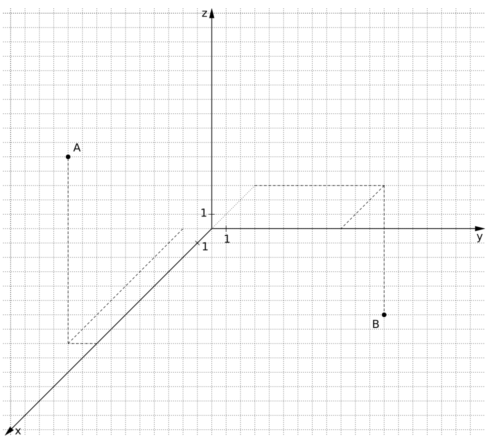
12.



14.



15. In der folgenden Darstellung sind zwei Punkte A und B gegeben. Den sichtbaren Teil der Geraden durch diese zwei Punkte graphisch konstruieren und die Schnittpunkte mit den Koordinatenebenen ablesen.



4.4 Relative Lage von Geraden

Will man die relative Lage von zwei Geraden d_1 und d_2 untersuchen bedeutet dies, das man wissen möchte ob :

- die Geraden identisch sind

  oder ob :

  - die Geraden einen einzigen Schnittpunkt besitzen

    wenn ja, möchte man den Winkel den die Geraden bilden berechnen können

    wenn nein, bedeutet dies :

    in $\mathbb{R}^2$: dass die Geraden parallel sind

    in $\mathbb{R}^3$: dass die Geraden **entweder** parallel sind

    oder dass die Geraden windschief sind

Beispiele :

Die relative Lage der folgenden Geraden bestimmen (einen Schnittpunkt oder identisch oder parallel oder, im Fall $\mathbb{R}^3$, windschief). Den Winkel, den die Geraden bilden, berechnen, falls sie einen Schnittpunkt besitzen.

1. $d_1: \ y = 2x + 7$ und $d_2: \ x - y = 3$

2. d_1 durch die Punkte $A\,(-1;4)$ und $B\,(11;2)$ und $d_2: \ x + 6y = 25$

3. d_1 durch die Punkte $A\,(-1;4)$ und $B\,(11;2)$ und d_2 durch die Punkte $C\,(-13;6)$ und $D\,(5;3)$

4. $d_1 : \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$ und $d_2 : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$

5. d_1 durch $A\,(-1; 2; 2)$ und $B\,(17; 11; -7)$ und $d_2 : \begin{cases} x - 2y = -5 \\ y + z = 4 \end{cases}$

6. d_1 durch $A\,(1;3;1)$ und $B\,(-1;4;2)$ und d_2 durch $C\,(-5;2;4)$ und $D\,(-1;0;2)$

7. $d_1 : \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=4 \end{cases}$ und $d_2 : \begin{cases} x-2y=-5 \\ y+z=4 \end{cases}$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L11)

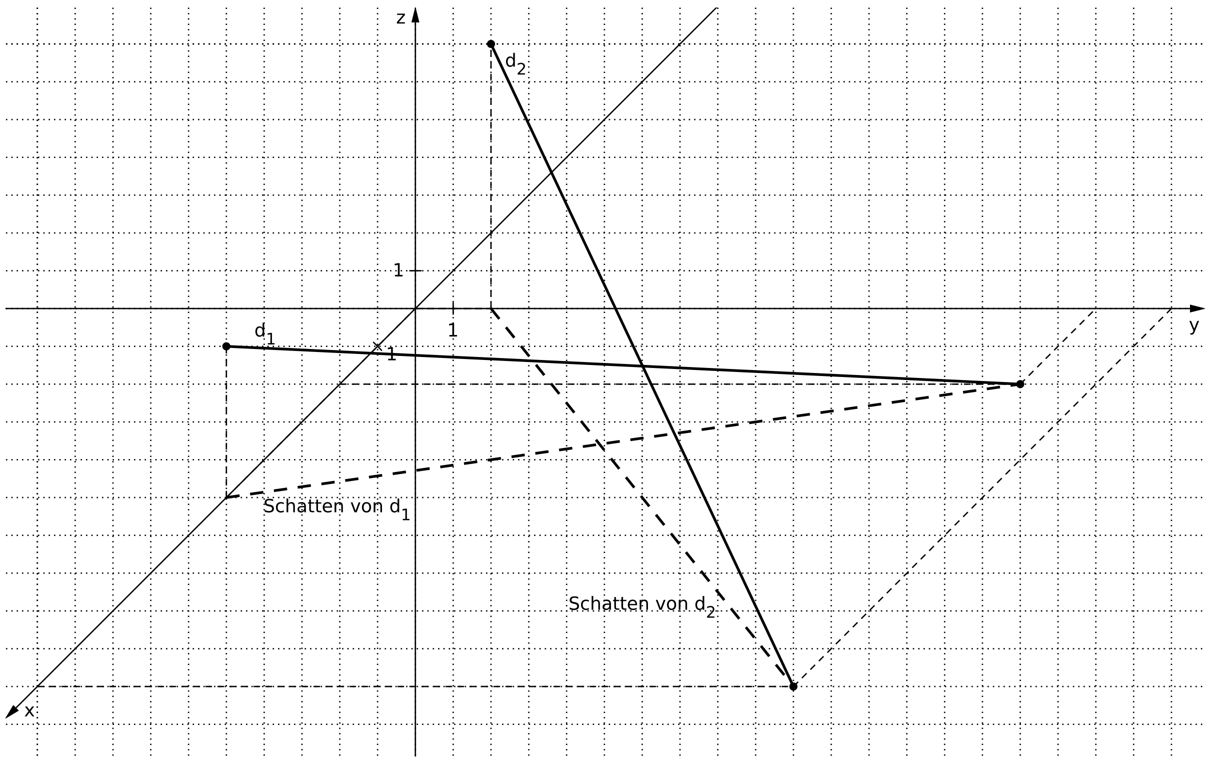
1. Die relative Lage der folgenden Geraden bestimmen (einen Schnittpunkt oder identisch oder parallel oder windschief). Den Winkel, den die Geraden bilden, berechnen, falls sie einen Schnittpunkt besitzen.

   (a) d_1 durch $A\,(1;5;1)$ und $B\,(5;5;-1)$ und d_2 durch $C\,(0;4;4)$ und $D\,(-2;6;0)$

   (b) $d_1 : \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+z=4 \end{cases}$ und $d_2 : \begin{cases} y=3-x \\ 2y-z=2 \end{cases}$

   (c) d_1 durch $A\,(3;3;-1)$ und $B\,(-1;3;1)$ und $d_2 : \begin{cases} z-x=3 \\ y-z=1 \end{cases}$

2. Auf der folgenden graphischen Darstellung ist der jeweils sichtbare Teil von zwei Geraden und ihrem jeweiligen Schatten dargestellt. Graphisch bestimmen, ob die Geraden sich schneiden. Wenn ja, die Koordinaten des Schnittpunkts angeben.



5 Ebenen

5.1 Parameterdarstellung und Koordinatengleichung

Eine Ebene Π kann festgelegt werden durch :

Für die Punkte auf der Ebene gilt :

Definition : Sei Π eine Ebene, A, B und C drei Punkte auf Π, die nicht auf einer Geraden liegen , und $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ zwei **Richtungsvektoren** von Π.

Jeder Punkt P auf der Ebene erfüllt :

Diese Formen heissen **Parameterdarstellung** der Ebene Π.

Die **Koordinatengleichung** enthält nur die Koordinaten des allgemeinen Punktes P : x, y und z.

Von der Parameterdarstellung zu der Koordinatengleichung :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L12)

1. Die Parameterdarstellung und die Koordinatengleichung folgender Ebenen geben.

   (a) Π_1 durch $A(5;-3;1)$, $B(-1;7;2)$ und $C(1;-1;1)$

   (b) Π_2 durch $A(4;3;-2)$, $B(-1;3;2)$ und $C(5;3;3)$

   (c) Π_3 durch $A(2;5;4)$, mit Richtungsvektoren $\overrightarrow{u}=(1;-5;3)^t$ und $\overrightarrow{v}=(0;2;7)^t$

2. Sei die Ebene Π gegeben durch :

$$\Pi \ : \ -3x+4y-5z=6$$

   Eine Parameterdarstellung dieser Ebene geben.

5.2 Normalengleichung und Koordinatengleichung

Definition : Sei Π eine Ebene, A ein Punkt auf dieser Ebene und $\overrightarrow{n}$ ein Vektor der orthogonal zu allen Richtungsvektoren der Ebene ist ($\overrightarrow{n}$ nennt sich **Normalenvektor**). Nur für Punkte P auf Π gilt die **Normalengleichung** :

Die Koordinatengleichung erhält man durch einsetzen der Koordinaten.

Von der Normalengleichung zu der Koordinatengleichung :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L13)

1. Eine Normalen- und eine Koordinatengleichung folgender Ebenen geben.
   (a) Π_1 durch $A(7;3;4)$ und mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (-1;7;3)^t$
   (b) Π_2 durch $A(1;2;-1)$ und rechtwinklig zu der Geraden durch $B(3;1;0)$ und $C(-2;1;4)$
2. Für jede der folgenden Ebenen, gegeben durch eine Koordinatengleichung, einen Normalenvektor bestimmen.
   (a) $\Pi_1 : \ -5x + 3y + 7z = 0$
   (b) $\Pi_2 : \ -5x + 3y + 7z = 21$
   (c) $\Pi_3 : \ -3x + z = 7$
   (d) $\Pi_4 : \ ax + by + cz + d = 0$ (Welche Bedingungen müssen a, b, c und d erfüllen ?)
3. Meistens wird die Methode : Normalengleichung zu Koordinatengleichung als leichter empfunden als der Weg über die Parameterdarstellung. Wie kann man, in dem Fall wo drei Punkte gegeben sind, die Parameterdarstellung umgehen (ausser natürlich sie wird ausdrücklich verlangt) und mit der Normalengleichung arbeiten um die Koordinatengleichung zu bestimmen ? An folgendem Beispiel illustrieren :

   Π durch $A(5;-3;1)$, $B(-1;7;2)$ und $C(1;-1;1)$

5.3 Graphische Darstellung

Für die graphische Darstellung des sichtbaren Teils einer Ebene geht man ähnlich vor wie für eine Gerade, d.h. man sucht die „Orte” wo die Ebene die Koordinatenebenen schneidet. Es sind in diesem Fall aber keine Punkte sondern Geraden : die Schnittgeraden. Es ist für die graphische Darstellung am einfachsten zwei Punkte auf diesen Schnittgeraden zu finden (am einfachsten : die Schnittpunkte mit den drei Achsen) und diese zu verbinden.

Beispiele : Für alle Darstellungen : 1 Kästchendiagonale = 1 Einheit für x, 1 Kästchenbreite = 1 Einheit für y, 1 Kästchenhöhe = 1 Einheit für z.

In allen Darstellungen muss der sichtbare Teil der Ebene schraffiert werden !

1. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $2x + 3y + 4z = 12$

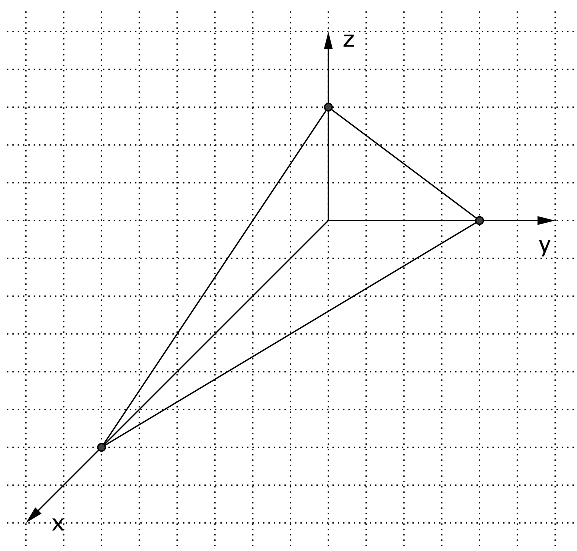
   Π schneidet die x-Achse, wenn $y = 0$ und $z = 0$ sind : $2x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = 6$

   also ist : $\Pi \cap 0x = \{(6; 0; 0)\}$

   analog findet man : $\Pi \cap 0y = \{(0; 4; 0)\}$ und $\Pi \cap 0z = \{(0; 0; 3)\}$

   Verbindet man dann zum Beispiel den Schnittpunkt mit der x-Achse $(6; 0; 0)$ und den mit der y-Achse $(0; 4; 0)$, dann erhält man die Gerade wo die Ebene den „Boden” (die xy-Ebene schneidet). Der sichtbare Teil dieser Geraden ist genau der Teil zwischen den beiden Punkten, weil diese beide sichtbar sind. (Analog erhält man die anderen Schnittgeraden.)

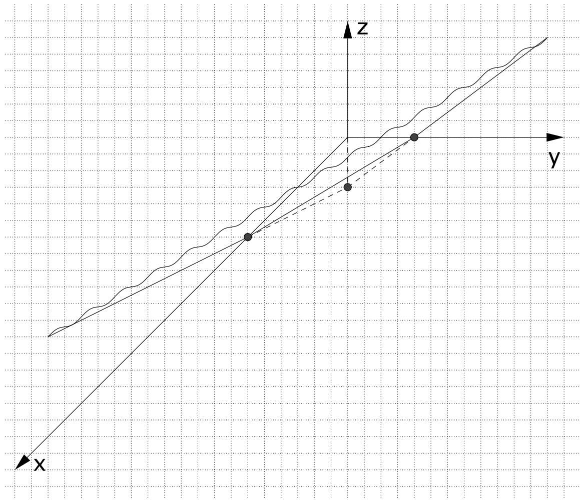
   Der sichtbare Teil der Ebene (zu schraffieren !) ist genau der Teil, der zwischen den sichtbaren Teilen der Schnittgeraden liegt.



2. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $2x + 3y - 4z = 12$

   In diesem Fall findet man wie vorher : $\Pi \cap 0x = \{(6; 0; 0)\}$ und $\Pi \cap 0y = \{(0; 4; 0)\}$, aber diesmal : $\Pi \cap 0z = \{(0; 0; -3)\}$

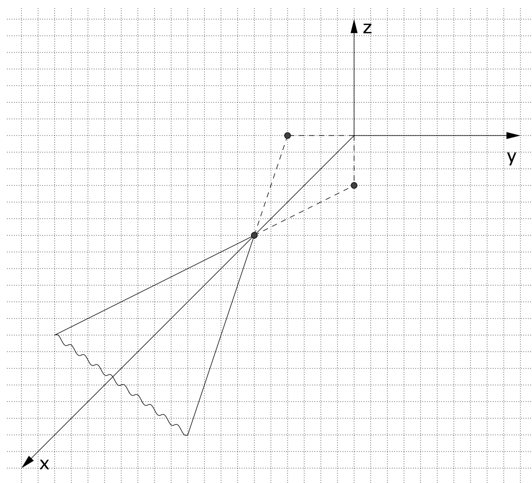
   Der dritte Schnittpunkt mit den Achsen ist in diesem Fall nicht sichtbar. Beim Verbinden der Punkte muss man also darauf achten ab wo die Geraden jeweils sichtbar sind.



   Der sichtbare Teil der Ebene (zu schraffieren) ist in diesem Beispiel eigentlich unendlich. Da man dies aber nicht zeichnen kann „reisst" man ihn irgendwann ab : die wellige Linie soll zeigen, dass die Ebene hier nicht aufhört.

3. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $2x - 3y - 4z = 12$

   In diesem Fall findet man : $\Pi \cap 0x = \{(6; 0; 0)\}$, $\Pi \cap 0y = \{(0; -4; 0)\}$, $\Pi \cap 0z = \{(0; 0; -3)\}$



   In diesem Fall ist die Schnittgerade mit der yz-Ebene vollkommen unsichtbar.

4. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $2x + 3y + 4z = -12$

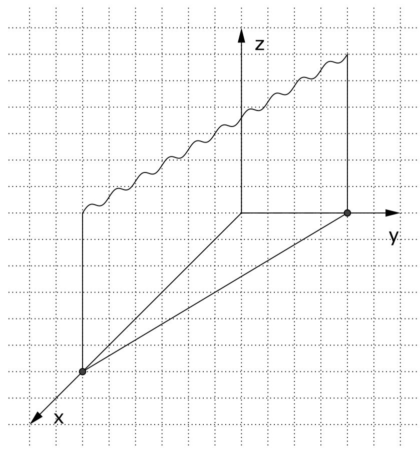
   In diesem Fall findet man : $\Pi \cap 0x = \{(-6; 0; 0)\}$, $\Pi \cap 0y = \{(0; -4; 0)\}$, $\Pi \cap 0z = \{(0; 0; -3)\}$

   Diese Ebene liegt nie im sichtbaren Teil.

5. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $2x + 3y = 12$

   In diesem Fall findet man : $\Pi \cap 0x = \{(6; 0; 0)\}$, $\Pi \cap 0y = \{(0; 4; 0)\}$ und $\Pi \cap 0z = \emptyset$ (es ist unmöglich, dass x und y Null sind, weil $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 12$ unmöglich ist)

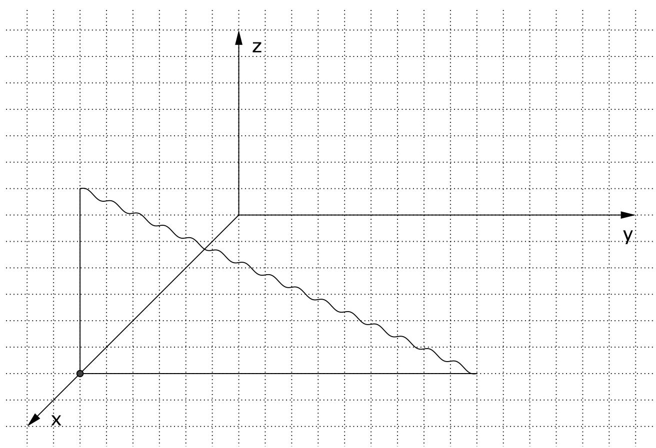
   Die Ebene Π schneidet die z-Achse nicht, also dürfen auch die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen diese nicht schneiden, d.h. in diesem Fall müssen die Schnittgeraden mit der xz-Ebene und der yz-Ebene parallel zu der z-Achse verlaufen.



6. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $x = 6$

   In diesem Fall findet man : $\Pi \cap 0x = \{(6; 0; 0)\}$, $\Pi \cap 0y = \emptyset$, $\Pi \cap 0z = \emptyset$

   Die Ebene Π schneidet weder die y-Achse noch die z-Achse. Es gibt also keine Schnittgerade mit der yz-Ebene und es müssen noch mehr Parallelen benutzt werden.



7. Sei Π die Ebene mit der Koordinatengleichung : $x - y - z = 0$

   In diesem Fall findet man : $\Pi \cap 0x = \Pi \cap 0y = \Pi \cap 0z = \{(0;0;0)\}$

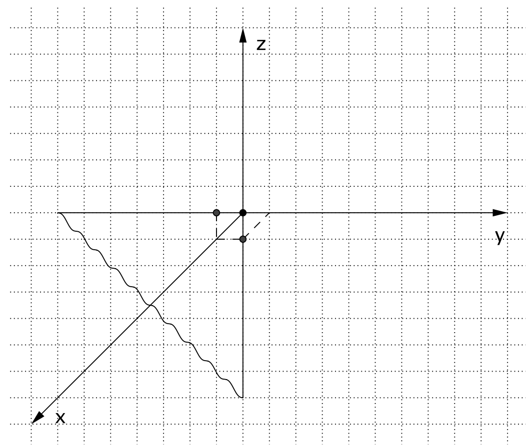
   Die Ebene Π schneidet also alle drei Achsen im selben Punkt.

   Um die Schnittgeraden mit den verschiedenen Ebenen zu bestimmen muss man also weitere Punkte berechnen.

   Punkt auf der Schnittgeraden mit der xy-Ebene : in diesem Fall muss $z = 0$ sein, daraus folgt $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Z.B. liegt der Punkt $(1;1;0)$ also auf dieser Schnittgeraden. Analog erhält man :

   für die xz-Ebene : $x - z = 0 \Leftrightarrow x = z$, also z.B. $(1;0;1)$

   für die yz-Ebene : $-y - z = 0 \Leftrightarrow z = -y$, also z.B. $(0;1;-1)$ (aber diese Punkte sind immer unsichtbar, weil entweder y oder z negativ ist)



Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L13)

Den sichtbaren Teil der folgenden Ebenen darstellen.

1. $\Pi : 2x + 3y + 5z = 15$
2. $\Pi : -2x + 3y + 5z = 15$
3. $\Pi : -2x + 3y - 5z = 15$
4. $\Pi : 2x + 3y + 5z + 15 = 0$
5. $\Pi : 3y + 5z = 15$
6. $\Pi : z = 3$
7. $\Pi : 2x + 3y - 5z = 0$
8. Π durch $A(2;1;3)$ mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (1;5;3)^t$
9. Π durch $A(-1;3;2)$, $B(-5;-1;2)$ und $C(2;2;2)$
10. Π durch $A(6;-1;2)$ mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (-1;0;2)^t$
11. Π durch $A(-1;1;2)$, $B(1;2;1)$ und $C(1;-1;-2)$

5.4 Relative Lage von Geraden und Ebenen, bzw. Ebenen und Ebenen

Relative Lage von einer Geraden und einer Ebene :

Relative Lage von zwei Ebenen :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L15)

1. In allen Aufgaben die relative Lage der zwei Objekte (Gerade/Ebene oder Ebene/Ebene) untersuchen, gegebenenfalls den Winkel berechnen (Antwort in °, wenn nötig gerundet auf eine Stelle nach dem Komma). Den sichtbaren Teil der Situation graphisch darstellen, dabei auch klar kennzeichnen wenn ein Objekt ein anderes verdeckt (bei Geraden z.B. durch verschieden dicke Striche, bei Ebenen durch verschiedenfarbige Schraffierungen)

   (a) $\Pi\ :\ 5x+2y+3z=30$ und $d\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (b) $\Pi_1\ :\ 2x-4y+3z=12$ und
   Π_2 durch die Punkte $A\,(1;-1;6)$, $B\,(-1;1;10)$ und $C\,(3;0;6)$

   (c) $\Pi\ :\ 4x-y-8z=8$ und $d\ :\ \begin{cases} x-3z=3 \\ 4z-y=4 \end{cases}$

   (d) Π_1 durch $A\,(5;7;2)$ mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und
   $\Pi_2\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

   (e) $\Pi\ :\ 3x+2y-z=12$ und $d\ :\ \begin{cases} x+z=5 \\ 4z-y=8 \end{cases}$

   (f) $\Pi_1\ :\ 2x+y+2z=10$ und
   $\Pi_2\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (g) Π_1 durch $A(1;4;1)$, $B(-2;-8;3)$, $C(-5;-11;5)$ und
   Π_2 durch $Q(3;5;-1)$, $R(3;-11;-1)$, $S(0;-3;1)$

   (h) $\Pi_1\ :\ 3x-2y+5z-4=0$ und $\Pi_2\ :\ 3x+2y+5z-4=0$

(i) $\Pi \ : \ 2x + y - z = 0$ und $d \ : \ \begin{cases} x = -y + 8 \\ z = -y + 8 \end{cases}$

(j) $\Pi \ : \ 4x + y - 11z = 0$ und $d \ : \ \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = -z + 4 \end{cases}$

(k) $\Pi_1 \ : \ 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ und $\Pi_2 \ : \ 6x - 4y + 10z - 7 = 0$

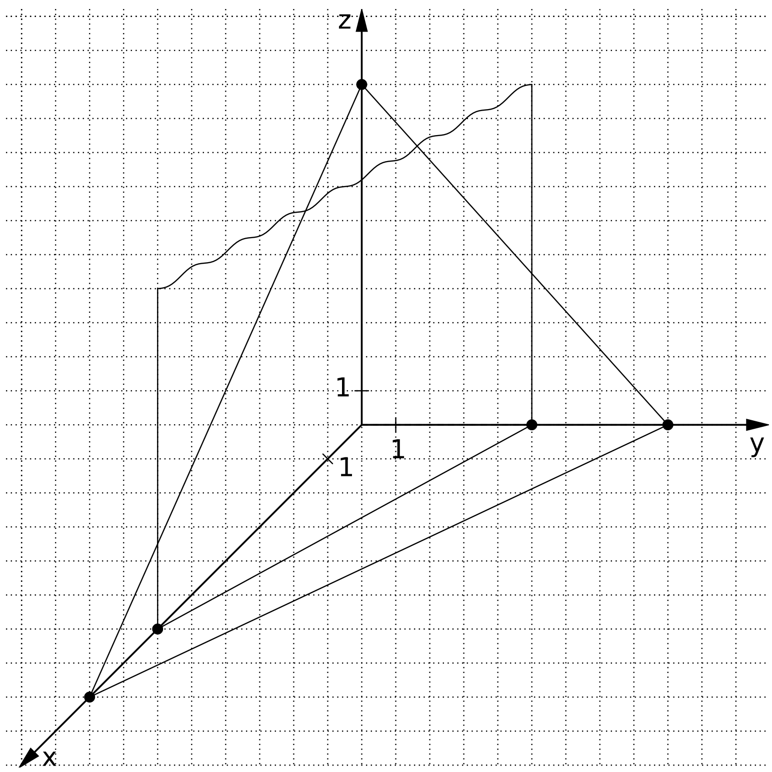
(l) $\Pi \ : \ 3x + 4z = 2y$ und $d \ : \ \begin{cases} x + z = 4 + 2y \\ x + 3y = 2z \end{cases}$

(m) $\Pi_1 \ : \ 3x - 2y + 5z - 4 = 0$ und $\Pi_2 \ : \ -15x + 10y - 25z + 20 = 0$

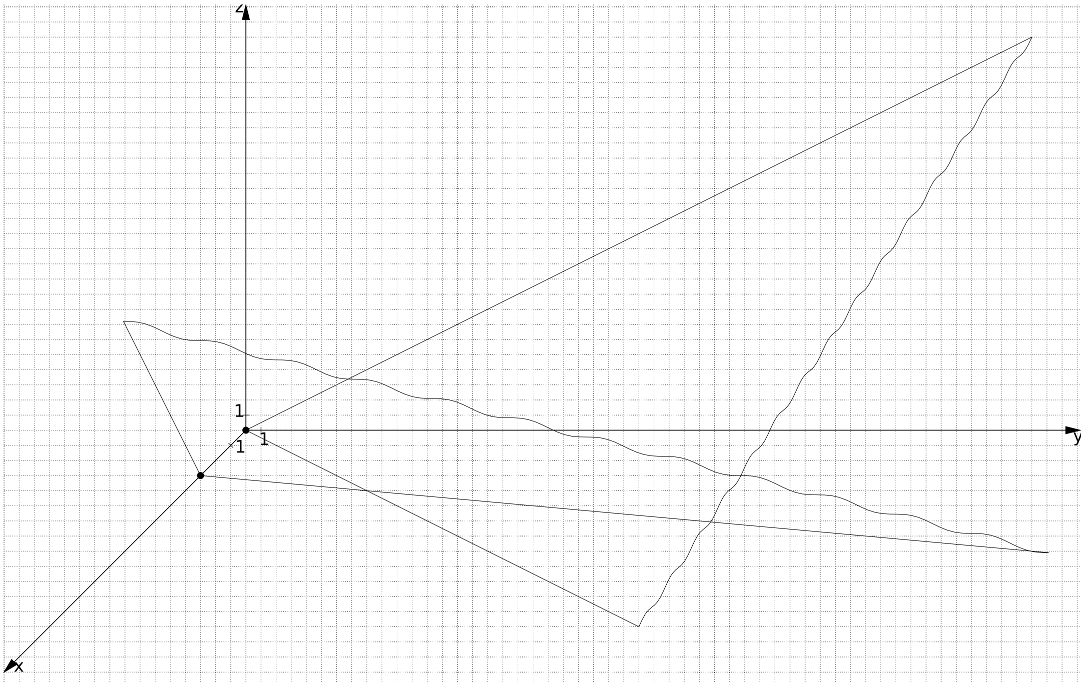
(n) $\Pi \ : \ 2x + y + z = 25$ und $d \ : \ \begin{cases} x + y = 3z \\ x - y = z + 1 \end{cases}$

2. Auf den folgenden graphischen Darstellungen ist der jeweils sichtbare Teil von zwei Ebenen oder einer Gerade und einer Ebene dargestellt. Den sichtbaren Teil der gemeinsamen Situation in verschiedenen Farben kennzeichnen. (D.h. die eventuelle Schnittgerade oder den eventuellen Schnittpunkt konstruieren und klar kennzeichnen welche Objekte von anderen verdeckt werden oder nicht.)

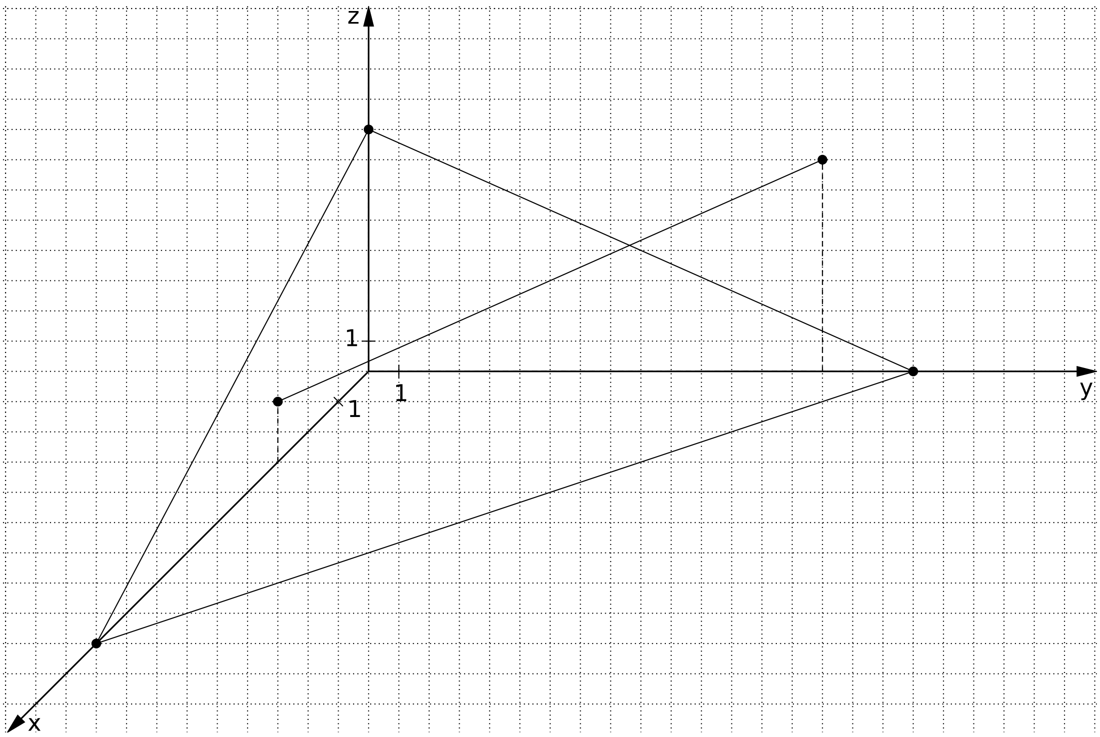
(a)



(b)



(c)



Quellen

- *Formulaires et tables, Mathématiques, Physique, Chimie*

  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2000

- *Fundamentum de mathématique, Géométrie vectorielle et analytique plane*

  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2003

- *Fundamentum de mathématique, Géométrie vectorielle et analytique de l'espace*

  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2003

- *Fundamentum de mathématique, Algèbre linéaire*

  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2000

- *Formelsammlung Mathematik,*

  Norbert Krank, Horst Sewerin, Verlag Konrad Wittwer GmbH, Stuttgart 2001

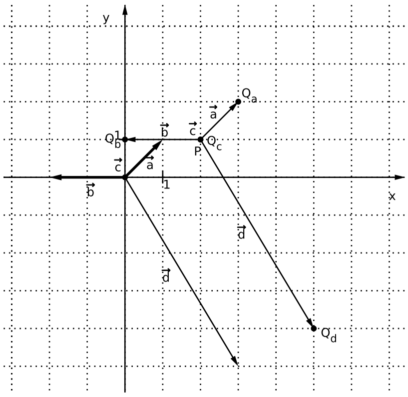
- *Duden Abiturhilfen, Lineare Algebra und analytische Geometrie I,*

  Dudenverlag, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim 2001

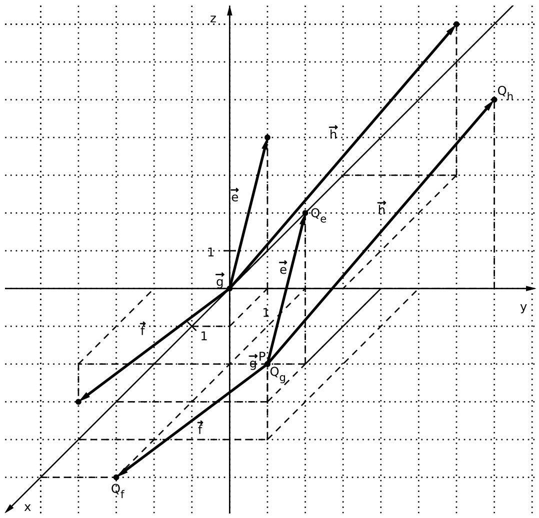
Lösungen

1.2 Affiner Punktraum, Seite 3

1. $Q_a\,(3;2)$ $\quad Q_b\,(0;1)$ $\quad Q_c\,(2;1)$ $\quad Q_d\,(5;-4)$



$Q_e\,(2;4;4)$ $\quad Q_f\,(5;2;0)$ $\quad Q_g\,(4;5;2)$ $\quad Q_h\,(0;7;5)$



2. (a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ (e) $\overrightarrow{AE}$ existiert nicht (g) $\overrightarrow{GE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

   (b) $\overrightarrow{DO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\overrightarrow{CD}$ existiert nicht (f) $\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (h) $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

1.3 Vektoraddition, Seite 5

1. entweder graphisch ... (wird auf Verlangen im Unterricht korrigiert)
   oder algebraisch (hier für $\mathbb{R}^2$ gemacht, für $\mathbb{R}^3$ verfährt man analog)

   (a) assoziativ :

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \end{pmatrix}$$

Die beiden letzten Vektoren sind gleich, da die Additionen in den ersten und zweiten Koordinaten zwischen reellen Zahlen stattfindet und die Addition in $\mathbb{R}$ assoziativ ist.

(b) kommutativ :

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \end{pmatrix}$$

Die beiden letzten Vektoren sind gleich, da die Additionen in den ersten und zweiten Koordinaten zwischen reellen Zahlen stattfindet und die Addition in $\mathbb{R}$ kommutativ ist.

2. (a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) Die Addition $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{e}$ ist unmöglich.

(c) $-\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(d) $\overrightarrow{e} + (-\overrightarrow{f}) + (-\overrightarrow{e}) + (-\overrightarrow{g}) = -\overrightarrow{f} - \overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. wird auf Verlangen im Unterricht korrigiert

1.4 S-Multiplikation, Seite 7

1. Algebraisch für $\mathbb{R}^2$ gezeigt ($\mathbb{R}^3$ analog).

(a) $\lambda \cdot (\mu \cdot \overrightarrow{a}) = \lambda \cdot \left(\mu \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \cdot a_1 \\ \mu \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (\mu \cdot a_1) \\ \lambda \cdot (\mu \cdot a_2) \end{pmatrix}$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \overrightarrow{a} = (\lambda \cdot \mu) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot \mu) \cdot a_1 \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Die beiden letzten Vektoren sind gleich, da die Multiplikationen in den ersten und zweiten Koordinaten zwischen reellen Zahlen stattfinden und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ assoziativ ist.

(b) $(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{a} = (\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) \cdot a_1 \\ (\lambda + \mu) \cdot a_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \cdot a_1 \\ \mu \cdot a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 + \mu \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Die beiden letzten Vektoren sind gleich, da die Multiplikationen und Additionen in den ersten und zweiten Koordinaten zwischen reellen Zahlen stattfinden und das Distributivgesetz in $\mathbb{R}$ gilt.

(c) $\lambda \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right) = \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} \lambda \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \right) = \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (a_1 + b_1) \\ \lambda \cdot (a_2 + b_2) \end{pmatrix}$

$$\lambda \cdot \overrightarrow{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{b} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \cdot b_1 \\ \lambda \cdot b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot b_1 \\ \lambda \cdot a_2 + \lambda \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

Die beiden letzten Vektoren sind gleich, da die Multiplikationen und Additionen in den ersten und zweiten Koordinaten zwischen reellen Zahlen stattfinden und das Distributivgesetz in $\mathbb{R}$ gilt.

(d) $1 \cdot \overrightarrow{a} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot a_2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{a}$

Die Aussage $(*)$ ist korrekt, da 1 das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist.

2. (a) $3\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (b) $0\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (c) $-5\overrightarrow{e} + 3\overrightarrow{f} - 6\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}$

   (d) $2\overrightarrow{e} + 7\overrightarrow{f} - 6\overrightarrow{e} + 13\overrightarrow{g} - 6\overrightarrow{f} = -4\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} + 13\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.5 Linearkombination, Seite 8

1. wird im Unterricht korrigiert

2. (a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

   (b) $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

   (c) $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$

   (d) $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

   (e) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$

   (f) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{w} + \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$

   (g) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

2.1 Betrag, Seite 11

1. (a) $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = \sqrt{2}$

   (b) $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 2$

   (c) $\left\|\overrightarrow{c}\right\| = 2\sqrt{5}$

   (d) $\left\|\overrightarrow{d}\right\| = \sqrt{34}$

   (e) $\left\|\overrightarrow{e}\right\| = \sqrt{10}$

   (f) $\left\|\overrightarrow{f}\right\| = 3$

   (g) $\left\|\overrightarrow{g}\right\| = \sqrt{3}$

   (h) $\left\|\overrightarrow{h}\right\| = \sqrt{34}$

2. Algebraisch für $\mathbb{R}^2$ gezeigt ($\mathbb{R}^3$ analog)

   (a) $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = \sqrt{\cdots} \geq 0$

   (b) $\left\|\overrightarrow{a}\right\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = -a_2^2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

   (c) $\left\|\lambda\overrightarrow{a}\right\| = \left\|\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2^2)} = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2} = \sqrt{\lambda^2\left(a_1^2 + a_2^2\right)} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
   $= |\lambda| \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda| \left\|\overrightarrow{a}\right\|$

   (d) wird im Unterricht korrigiert

2.2 Skalarprodukt, Seite 12

1. $\vec{a} \bullet \vec{a} = 1$
   $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} = 0$
   $\vec{a} \bullet \vec{c} = \vec{c} \bullet \vec{a} = 2$
   $\vec{a} \bullet \vec{d} = \vec{d} \bullet \vec{a} = -6$
   $\vec{a} \bullet \vec{e} = \vec{e} \bullet \vec{a} = 0$
   $\vec{b} \bullet \vec{b} = 4$
   $\vec{b} \bullet \vec{c} = \vec{c} \bullet \vec{b} = -8$
   $\vec{b} \bullet \vec{d} = \vec{d} \bullet \vec{b} = -6$
   $\vec{b} \bullet \vec{e} = \vec{e} \bullet \vec{b} = 0$
   $\vec{c} \bullet \vec{c} = 20$
   $\vec{c} \bullet \vec{d} = \vec{d} \bullet \vec{c} = 0$
   $\vec{c} \bullet \vec{e} = \vec{e} \bullet \vec{c} = 0$
   $\vec{d} \bullet \vec{d} = 45$
   $\vec{d} \bullet \vec{e} = \vec{e} \bullet \vec{d} = 0$
   $\vec{e} \bullet \vec{e} = 0$
   $\vec{f} \bullet \vec{f} = 9$
   $\vec{f} \bullet \vec{g} = \vec{g} \bullet \vec{f} = 0$
   $\vec{f} \bullet \vec{h} = \vec{h} \bullet \vec{f} = -16$
   $\vec{f} \bullet \vec{i} = \vec{i} \bullet \vec{f} = 0$
   $\vec{f} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{f} = -22$
   $\vec{g} \bullet \vec{g} = 2$
   $\vec{g} \bullet \vec{h} = \vec{h} \bullet \vec{g} = 0$
   $\vec{g} \bullet \vec{i} = \vec{i} \bullet \vec{g} = -3$
   $\vec{g} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{g} = 11$
   $\vec{h} \bullet \vec{h} = 34$
   $\vec{h} \bullet \vec{i} = \vec{i} \bullet \vec{h} = 15$
   $\vec{h} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{h} = 33$
   $\vec{i} \bullet \vec{i} = 45$
   $\vec{i} \bullet \vec{j} = \vec{j} \bullet \vec{i} = 0$
   $\vec{j} \bullet \vec{j} = 121$

2. Algebraisch für $\mathbb{R}^2$ gezeigt ($\mathbb{R}^3$ analog)

   (a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \vec{b} \bullet \vec{a}$

   (b) $(\lambda \vec{a}) \bullet \vec{b} = (\lambda a_1)\, b_1 + (\lambda a_2)\, b_2 = \lambda\,(a_1 b_1) + \lambda\,(a_2 b_2) = \lambda\,(a_1 b_1 + a_2 b_2) = \lambda\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$

   (c) $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = a_1\,(b_1 + c_1) + a_2\,(b_2 + c_2) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2)$
   $= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

   (d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{c} + \vec{d}\right) \overset{(c)}{=} \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{c} + \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \vec{d} \overset{(a)}{=} \vec{c} \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{d} \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$
   $\overset{(c)}{=} \vec{c} \bullet \vec{a} + \vec{c} \bullet \vec{b} + \vec{d} \bullet \vec{a} + \vec{d} \bullet \vec{b} \quad \left(\overset{(a)}{=} \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c} + \vec{a} \bullet \vec{d} + \vec{b} \bullet \vec{d}\right)$

   (e) $\|\vec{a}\|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}^{\,2} = a_1^2 + a_2^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$

   (f) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda \vec{a}) \overset{(a)}{=} (\lambda \vec{a}) \bullet \vec{a} \overset{(b)}{=} \lambda\,(\vec{a} \bullet \vec{a}) \overset{(e)}{=} \lambda \|\vec{a}\|^2$

2.3 Winkel, Seite 14

1. (a) $\cos(\alpha) = \dfrac{-29}{5 \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{-29}{5 \cdot \sqrt{53}}\right) \approx 142.8°$

   (b) $\cos(\beta) = \dfrac{32}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{32}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}}\right) \approx 12.9°$

2. Sei α der Winkel in A, β der Winkel in B und γ der Winkel in C.

   Gebraucht werden folgende Vektoren und Normen :

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = 2\sqrt{2}$$

   $$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{17}$$

   $$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{10}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}}\right) \approx 31.0°$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 108.4°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CB}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 40.6°$$

Kontrolle : $31.0° + 108.4° + 40.6° = 180°$

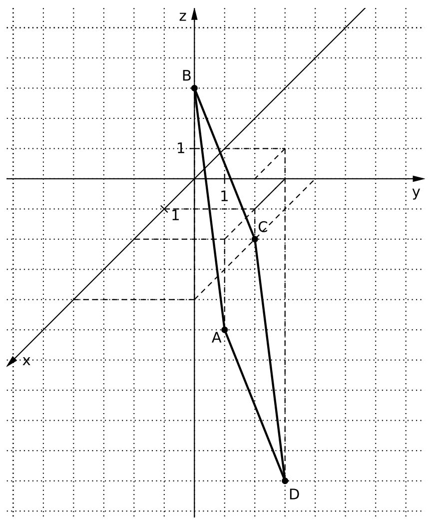
Man kann natürlich, statt die 180° zur Kontrolle zu benutzen, auch stattdessen schneller rechnen :

$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 31.0° - 108.4° = 40.6°$

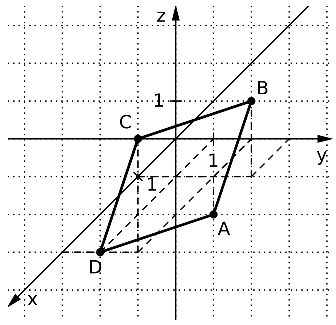
2.4 Gemischte Aufgaben, Seite 15

1. (a) $D(1;5)$ (graphische Darstellung auf Nachfrage)
   (b) $B(2;-1)$ $C(5;6)$ $D(4;11)$ (graphische Darstellung auf Nachfrage)

2. (a) $D(-1;2;-11)$



(b) $B(1;3;2)$ $C(3;2;3)$ $D(3;1;0)$



3. Nein : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{13}$ aber $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4 \neq \sqrt{13}$

4. Sei $C(x;y)$.

   Man will : $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = -x + 5$

   Man erhält also : $C(x;-x+5) \quad x \in \mathbb{R}$

   Dies entspricht der Mittelsenkrechten des Segments $[AB]$.

   (graphische Darstellung auf Nachfrage)

5. Parallelogramm ? Ja : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (-4;-6;-2)^t$

   Rechteck ? Ja : es ist schon ein Parallelogramm und ausserdem gilt : $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

   Quadrat ? Nein : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{59}$ aber $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2\sqrt{14} \neq \sqrt{59}$

6. Sei α der Winkel in A, β der Winkel in B und γ der Winkel in C.

   Gebraucht werden folgende Vektoren und Normen :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{34}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{43}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{-2}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 98.8°$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{36}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{43}} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{36}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{43}}\right) \approx 19.7°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CB}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{43}} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{43}}\right) \approx 61.5°$$

Kontrolle : $98.8° + 19.7° + 61.5° = 180°$

Man kann natürlich, statt die 180° zur Kontrolle zu benutzen, auch stattdessen schneller rechnen :

$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 98.8° - 19.7° = 61.5°$

7. Sei $C(x;y)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0 \\ \cos(60°) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{-2x + 2y + 6}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{8}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-4)^2 + x^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ \sqrt{(x-4)^2 + x^2} = \dfrac{8}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ (x-4)^2 + x^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 2 \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

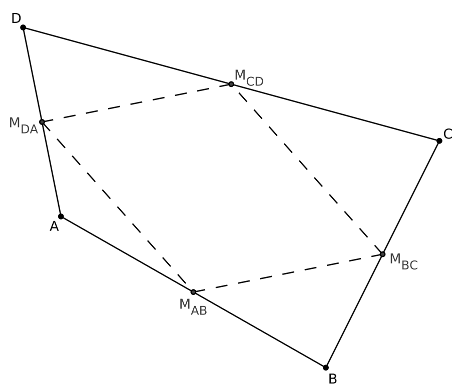
Es existieren also zwei Lösungen : $C_1\left(2 - 2\sqrt{3}; 3 - 2\sqrt{3}\right)$ und $C_2\left(2 + 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}\right)$.

Eine graphische Darstellung kann helfen dies zu begreifen.

8. $\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_A; y_A)^t + \frac{1}{2} \cdot (x_B - x_A; y_B - y_A)^t = \ldots = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)^t \Leftrightarrow M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

   In $\mathbb{R}^3$ gilt (analoger Beweis) : $M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

9. Der folgende Beweis basierend auf der gegebenen Illustration ist sowohl für $\mathbb{R}^2$ als auch für $\mathbb{R}^3$ gültig :



$M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ Parallelogramm $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_{AB}M_{DA}} = \overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$

Bemerkung : im Falle eines „unechten" Vierecks bei dem die vier Eckpunkte auf derselben Geraden liegen, erhält man ein ebenso „unechtes" Parallelogramm.

3 Vektorprodukt und Anwendungen, Seite 19

1. (a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -53 \\ -46 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. (a) Ist $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ oder $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ (oder beide), dann gilt : $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. (Beweis für $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ gemacht, aus Antikommutativitätsgründen auch für $\overrightarrow{b}$ korrekt.)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot b_3 - 0 \cdot b_2 \\ 0 \cdot b_1 - 0 \cdot b_3 \\ 0 \cdot b_2 - 0 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $$(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda a_2) \cdot b_3 - (\lambda a_3) \cdot b_2 \\ (\lambda a_3) \cdot b_1 - (\lambda a_1) \cdot b_3 \\ (\lambda a_1) \cdot b_2 - (\lambda a_2) \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \\ \lambda (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3) \\ \lambda (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \lambda \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right)$$

(c) $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot a_3 - a_3 \cdot a_2 \\ a_3 \cdot a_1 - a_1 \cdot a_3 \\ a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$$

(d) Wenn $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ die gleiche Richtung besitzen $\left(\overrightarrow{b} = \lambda \cdot \overrightarrow{a} \right)$, dann gilt : $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{a}) = -(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{a} = -\lambda (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a}) = -\lambda \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

(e) $$\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot (b_3 + c_3) - a_3 \cdot (b_2 + c_2) \\ a_3 \cdot (b_1 + c_1) - a_1 \cdot (b_3 + c_3) \\ a_1 \cdot (b_2 + c_2) - a_2 \cdot (b_1 + c_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 + a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot b_2 - a_3 \cdot c_2 \\ a_3 \cdot b_1 + a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_3 - a_1 \cdot c_3 \\ a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 - a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \cdot c_3 - a_3 \cdot c_2 \\ a_3 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_3 \\ a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$$

(f) z.B. ist $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aber $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(g) die Fläche des Parallelogramms ist gegeben durch (h bezeichnet die Höhe vom Endpunkt von $\overrightarrow{b}$ aus bis $\overrightarrow{a}$, φ den kleineren Winkel zwischen $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$) :
$\|\overrightarrow{a}\| \cdot h = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \sin(\varphi) = \left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|$

3. Die Fläche des Dreiecks ist die Hälfte der Fläche des (z.B.) durch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ bestimmten Parallelogramms.

$$\text{Fläche}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -26 \\ -15 \\ -17 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1190}$$

4.1 Parameterdarstellung und Koordinatengleichung(en), Seite 21

1. (a) Parameterdarstellung : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$

(zur Koordinatengleichung) $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4-x}{3} \\ y = 3 + 4 \cdot \frac{4-x}{3} \Leftrightarrow 4x + 3y = 25 \end{cases}$

Koordinatengleichung : $4x + 3y = 25$

(b) Parameterdarstellung : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

(zu den Koordinatengleichungen) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 5 - 5z \\ \lambda = z \end{cases}$

Koordinatengleichungen : $\begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 5 - 5z \end{cases}$

(c) Parameterdarstellung : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 - 3\lambda \end{cases}$

Koordinatengleichung : $x = 5$

2. $d\ :\ -3x + 4y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

$$P(x; y) \in d \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{4}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Parameterdarstellung mit : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$, Richtungsvektor $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ und $\lambda = x$

3. Parameterdarstellung : $d_2\ :\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 5\lambda \end{cases}$

(zu den Koordinatengleichungen) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2(y-2) \Leftrightarrow x = 2y - 7 \\ \lambda = y - 2 \\ z = 5 + 5(y-2) \Leftrightarrow z = 5y - 5 \end{cases}$

Koordinatengleichungen : $d_2\ :\ \begin{cases} x = 2y - 7 \\ z = 5y - 5 \end{cases}$

Und die Geraden sind wirklich parallel und nicht identisch, da z.B. A nicht auf d_2 liegt.

4.2 Normalengleichung und Koordinatengleichung in $\mathbb{R}^2$, Seite 23

1. (a) Normalengleichung : $\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$

   (zur Koordinatengleichung) $\Leftrightarrow -(x-4)+7(y-3)=0$

   Koordinatengleichung : $-x+7y=17$

   (b) Normalenvektor : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Normalengleichung : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

   (zur Koordinatengleichung) $\Leftrightarrow -5(x-1)+3(y-2)=0$

   Koordinatengleichung : $-5x+3y=1$

2. (a) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

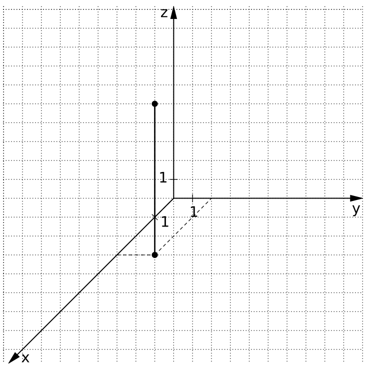
   (b) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

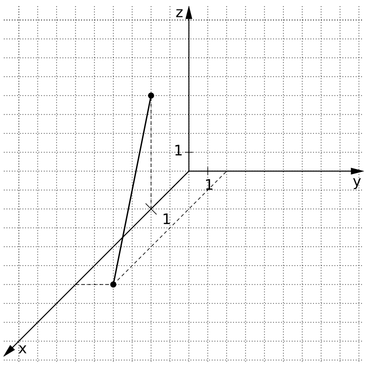
   (c) $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (es darf **nicht** $a=b=0$ sein)

3. ...

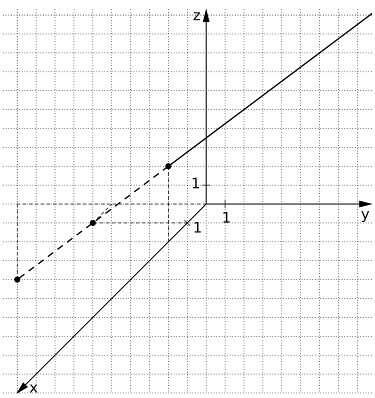
4.3 Graphische Darstellung im dreidimensionalen Raum, Seite 26

1. $d \cap Oxy = \{(3;2;0)\}$ $d \cap Oxz = \{(1;0;6)\}$ $d \cap Oyz = \{(0;-1;5)\}$

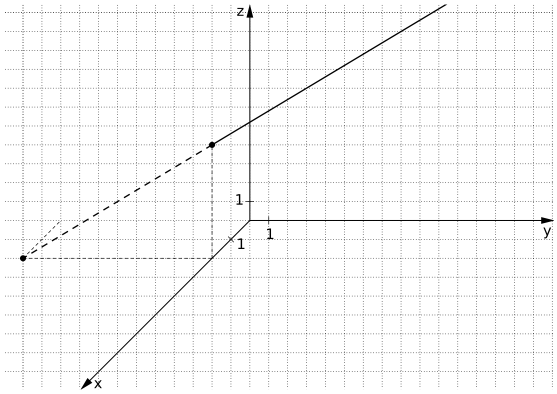




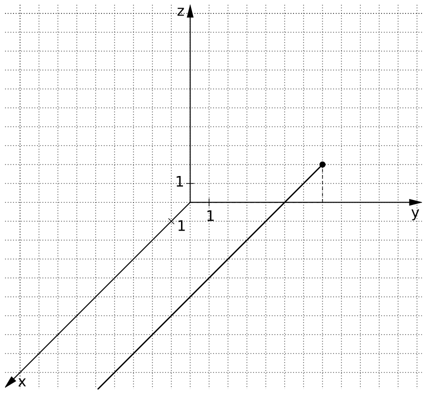
2. $d \cap Oxy = \{(1;-5;0)\}$ $d \cap Oxz = \{(2;0;4)\}$ $d \cap Oyz = \{(0;-10;-4)\}$



3. $d \cap Oxy = \{(2;-10;0)\}$ $d \cap Oxz = \{(2;0;6)\}$ $d \cap Oyz = \emptyset$



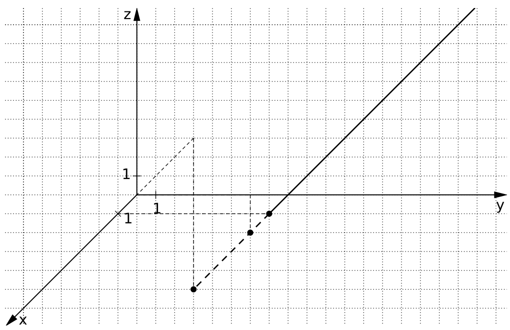
4. $d \cap Oxy = \emptyset$ $d \cap Oxz = \emptyset$ $d \cap Oyz = \{(0;7;2)\}$



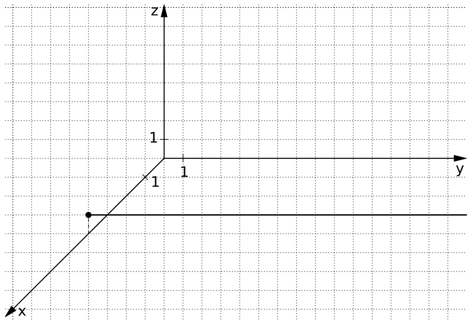
5. $d \cap Oxy = \{(-15;6;0)\}$ $d \cap Oxz = \emptyset$ $d \cap Oyz = \{(0;6;-3)\}$

Die Gerade liegt nie im sichtbaren Teil.

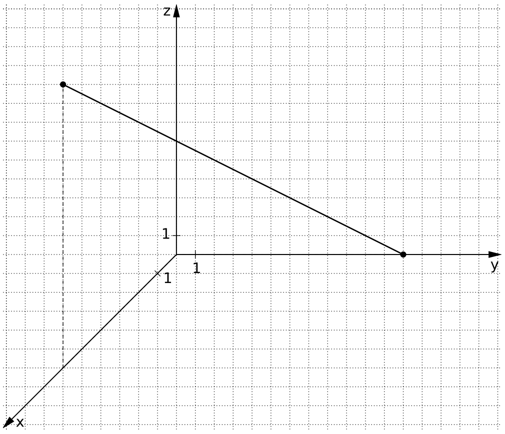
6. $d \cap Oxy = \{(1;8;0)\}$ $d \cap Oxz = \{(-3;0;-8)\}$ $d \cap Oyz = \{(0;6;-2)\}$



7. $d \cap Oxy = \emptyset$ $d \cap Oxz = \{(4;0;1)\}$ $d \cap Oyz = \emptyset$



8. $d \cap Oxy = \{(0;12;0)\}$ $\quad d \cap Oxz = \{(6;0;15)\}$ $\quad d \cap Oyz = \{(0;12;0)\}$



9. $d \cap Oxy = \{(-3;4;0)\}$ $\quad d \cap Oxz = \{(-1;0;2)\}$ $\quad d \cap Oyz = \{(0;-2;3)\}$

   Die Gerade liegt nie im sichtbaren Teil.

10. $d \cap Oxy = \{(-1;-4;0)\}$ $\quad d \cap Oxz = \{(-5;0;4)\}$ $\quad d \cap Oyz = \{(0;-5;-1)\}$

    Die Gerade liegt nie im sichtbaren Teil.

11. wird im Unterricht korrigiert

12. wird im Unterricht korrigiert

13. wird im Unterricht korrigiert

14. wird im Unterricht korrigiert

15. wird im Unterricht korrigiert

4.4 Relative Lage von Geraden, Seite 32

1. Die relative Lage der folgenden Geraden bestimmen (einen Schnittpunkt oder identisch oder parallel oder windschief). Den Winkel, den die Geraden bilden, berechnen, falls sie einen Schnittpunkt besitzen.

   (a) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 5 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ und $d_2 : \begin{cases} x = 0 - 2\mu \\ y = 4 + 2\mu \\ z = 4 - 4\mu \end{cases}$

   $$\text{Schnittpunkt } S\,(x;y;z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 5 \\ z = 1 - 2\lambda \\ x = 0 - 2\mu \\ y = 4 + 2\mu \\ z = 4 - 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 5 \\ z = 1 - 2\lambda \\ 1 + 4\lambda = 0 - 2\mu \\ 5 = 4 + 2\mu \\ 1 - 2\lambda = 4 - 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 5 \\ z = 1 - 2\lambda \\ 1 + 4\lambda = -1 \\ \mu = \frac{1}{2} \\ 1 - 2\lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 5 \\ z = 1 - 2\lambda \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \\ z = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Die Geraden schneiden sich im Punkt } S\,(-1;5;2)$$

   Richtungsvektoren (RV) :

   $$\text{RV} : \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ von } d_1\text{, besser noch : } \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{RV} : \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ von } d_2\text{, besser noch : } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Winkel zwischen d_1 und d_2 : $\quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}\right) = 90°$

(b) $d_1 : \begin{cases} y = 3 - x \\ z = 4 - 2x \end{cases}$ und $d_2 : \begin{cases} y = 3 - x \\ z = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ z = 4 - 2x \end{cases}$ $\Rightarrow d_1 = d_2$, die Geraden sind identisch

(c) $d_1 : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ und $d_2 : \begin{cases} x = z - 3 \\ y = z + 1 \end{cases}$

Schnittpunkt $S(x;y;z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 2\lambda \\ x = z - 3 \\ y = z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 2\lambda \\ 3 - 4\lambda = -1 + 2\lambda - 3 \\ 3 = -1 + 2\lambda + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 2\lambda \\ \lambda = \frac{7}{6} \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$

Die Geraden besitzen also keinen Schnittpunkt und sind daher entweder parallel oder windschief.

RV : $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von d_1, besser noch : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ RV : $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von d_2

$\overrightarrow{u} \neq \lambda \overrightarrow{v}$ also sind die zwei Geraden windschief.

2. wird im Unterricht korrigiert

5.1 Parameterdarstellung und Koordinatengleichung, Seite 34

1. (a) $\Pi_1 : \begin{cases} x = 5 - 6\lambda - 4\mu \\ y = -3 + 10\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 6(z-1) - 4\mu \\ y = -3 + 10(z-1) + 2\mu \\ \lambda = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6z + 11 - 4\mu \\ y = 10z - 13 + 2\mu \\ \lambda = z - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -6z + 11 - 2(y - 10z + 13) \\ 2\mu = y - 10z + 13 \\ \lambda = z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y - 14z = -15$

Koordinatengleichung : $\Pi_1 : x + 2y - 14z = -15$

(b) $\Pi_2 : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda + \mu \\ y = 3 \\ z = -2 + 4\lambda + \mu \end{cases}$ Koordinatengleichung : $\Pi_2 : y = 3$

(c) $\Pi_3 : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 - 5\lambda + 2\mu \\ z = 4 + 3\lambda + 7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 2 \\ y = 5 - 5(x-2) + 2\mu \\ z = 4 + 3(x-2) + 7\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 2 \\ y = 15 - 5x + 2\mu \\ z = -2 + 3x + 7\mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 2 \\ \mu = \dfrac{5x + y - 15}{2} \\ z = -2 + 3x + 7 \cdot \dfrac{5x + y - 15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 41x + 7y - 2z = 109$

Koordinatengleichung : $\Pi_3 : 41x + 7y - 2z = 109$

2. $\Pi : -3x + 4y - 5z = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{4y - 5z - 6}{3}$ Für einen Punkt $P \in \Pi$ gilt :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4y - 5z - 6}{3} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{6}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{4y}{3} \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{-5z}{3} \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Parameterdarstellung von Π mit den zwei Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es wäre natürlich auch möglich drei (nicht aufgereihte) Punkte der Ebene zu berechnen und dann die Parameterdarstellung zu geben.

5.2 Normalengleichung und Koordinatengleichung, Seite 35

1. (a) Normalengleichung : $(x-7; y-3; z-4)^t \bullet (-1; 7; 3)^t = 0$
   Koordinatengleichung : $-x + 7y + 3z = 26$
   (b) Normalengleichung : $(x-1; y-2; z+1)^t \bullet (-5; 0; 4)^t = 0$
   Koordinatengleichung : $-5x + 4z = -9$

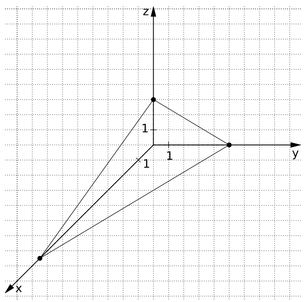
2. (a) $\overrightarrow{n} = (-5; 3; 7)^t$
   (b) $\overrightarrow{n} = (-5; 3; 7)^t$
   (c) $\overrightarrow{n} = (-3; 0; 1)^t$
   (d) $\overrightarrow{n} = (a; b; c)^t$ (Bedingung : $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$)

3. zwei Richtungsvektoren von Π (mit verschiedenen Richtungen) sind : $\overrightarrow{AB} = (-6; 10; 1)^t$ und $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 0)^t$
   Noch besser : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (-6; 10; 1)^t$ und $\overrightarrow{v} = (-2; 1; 0)^t$ sind auch zwei solche Richtungsvektoren von Π
   Ein Normalenvektor von Π ist : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (-1; -2; 14)^t$
   Normalengleichung von Π : $(x-5; y+3; z-1)^t \bullet (-1; -2; 14)^t = 0$
   Koordinatengleichung von Π : $-x - 2y + 14z = 15$

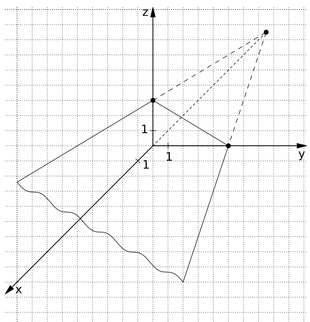
5.3 Graphische Darstellung, Seite 39

Die Ebenen wurden aus „Photokopiegründen" nicht schraffiert. Bitte ergänzen.

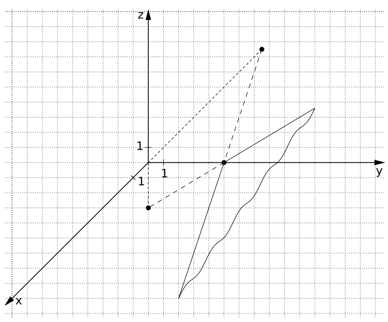
1. $\Pi \cap Ox = \left\{\left(\frac{15}{2}; 0; 0\right)\right\}$ $\Pi \cap Oy = \{(0; 5; 0)\}$ $\Pi \cap Oz = \{(0; 0; 3)\}$



2. $\Pi \cap Ox = \left\{\left(-\frac{15}{2}; 0; 0\right)\right\}$ $\Pi \cap Oy = \{(0; 5; 0)\}$ $\Pi \cap Oz = \{(0; 0; 3)\}$



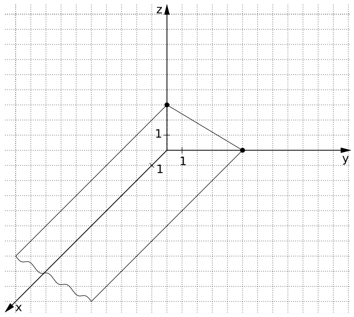
3. $\Pi \cap Ox = \left\{\left(-\frac{15}{2}; 0; 0\right)\right\}$ $\Pi \cap Oy = \{(0; 5; 0)\}$ $\Pi \cap Oz = \{(0; 0; -3)\}$



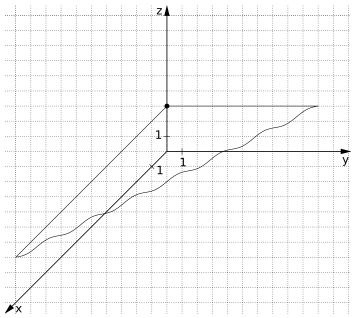
4. $\Pi \cap Ox = \left\{\left(-\frac{15}{2};0;0\right)\right\}$ $\Pi \cap Oy = \{(0;-5;0)\}$ $\Pi \cap Oz = \{(0;0;-3)\}$

   Diese Ebene liegt nie im sichtbaren Bereich.

5. $\Pi \cap Ox = \emptyset$ $\Pi \cap Oy = \{(0;5;0)\}$ $\Pi \cap Oz = \{(0;0;3)\}$



6. $\Pi \cap Ox = \emptyset$ $\Pi \cap Oy = \emptyset$ $\Pi \cap Oz = \{(0;0;3)\}$

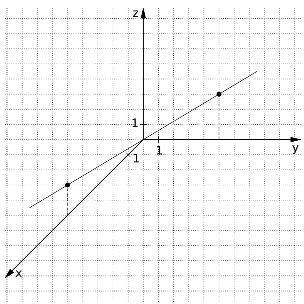


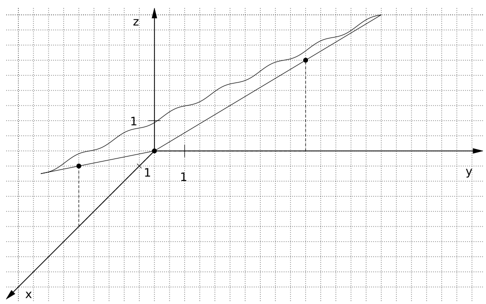
7. $\Pi \cap Ox = \Pi \cap Oy = \Pi \cap Oz = \{(0;0;0)\}$

   weiterer Punkt auf Oxy : z.B. $(3;-2;0)$ (unsichtbar)

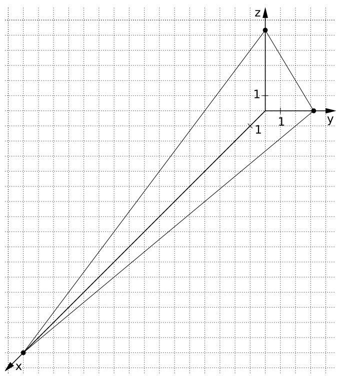
   weiterer Punkt auf Oxz : z.B. $(5;0;2)$

   weiterer Punkt auf Oyz : z.B. $(0;5;3)$

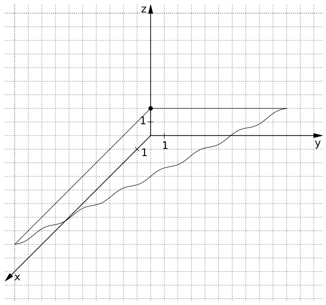




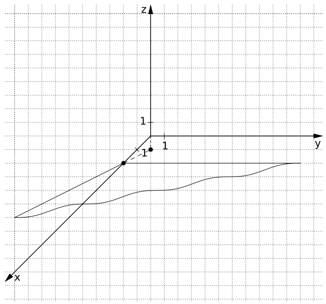
8. $\Pi\,:\,x+5y+3z=16$ $\Pi \cap Ox = \{(16;0;0)\}$ $\Pi \cap Oy = \left\{\left(0;\frac{16}{5};0\right)\right\}$ $\Pi \cap Oz = \left\{\left(0;0;\frac{16}{3}\right)\right\}$



9. $\Pi\,:\,z=2 \qquad \Pi\cap Ox=\emptyset \quad \Pi\cap Oy=\emptyset \quad \Pi\cap Oz=\{(0;0;2)\}$



10. $\Pi\,:\,-x+2z=-2 \qquad \Pi\cap Ox=\{(2;0;0)\} \quad \Pi\cap Oy=\emptyset \quad \Pi\cap Oz=\{(0;0;-1)\}$

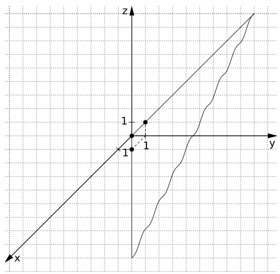


11. $\Pi\,:\,x-y+z=0 \qquad \Pi\cap Ox=\Pi\cap Oy=\Pi\cap Oz=\{(0;0;0)\}$

weiterer Punkt auf Oxy : z.B. $(1;1;0)$

weiterer Punkt auf Oxz : z.B. $(1;0;-1)$ (unsichtbar)

weiterer Punkt auf Oyz : z.B. $(0;1;1)$



5.4 Relative Lage von Geraden und Ebenen, bzw. Ebenen und Ebenen, Seite 41

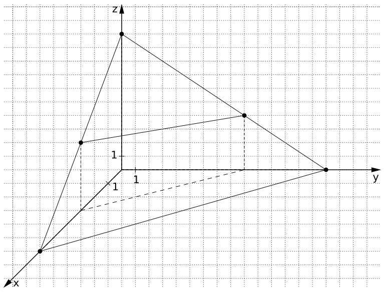
1. Achtung : in den graphischen Darstellung müssen die Ebenen noch (verschiedenfarbig) schraffiert werden und die unverdeckten Teile der Geraden (farbig) deutlich hervorgehoben werden.

   (a) relative Lage : $d\subset\Pi$

   für die graphische Darstellung :

   $d\cap Oxy=\{(-12;45;0)\} \quad d\cap Oxz=\{(3;0;5)\} \quad d\cap Oyz=\{(0;9;4)\}$

   $\Pi\cap Ox=\{(6;0;0)\} \quad \Pi\cap Oy=\{(0;15;0)\} \quad \Pi\cap Oz=\{(0;0;10)\}$



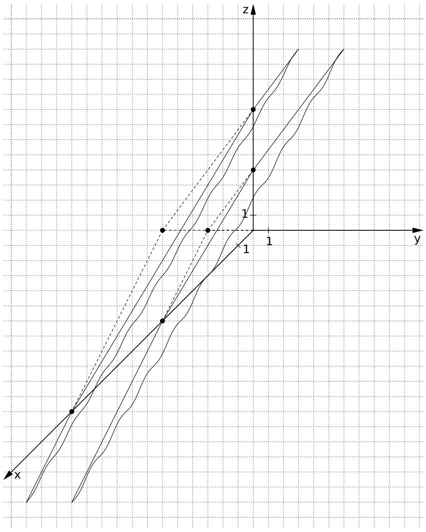
(b) $\Pi_2 \;:\; 2x - 4y + 3z = 24$

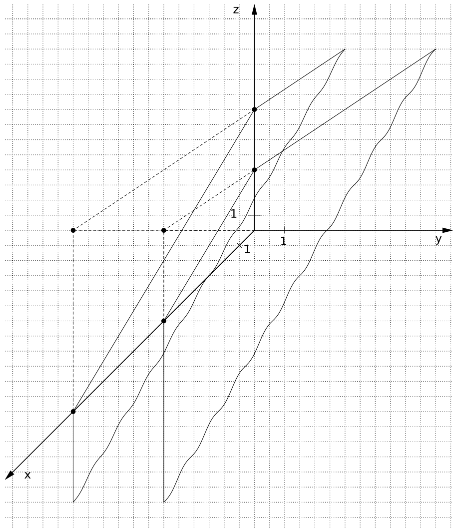
relative Lage : $\Pi_1 \parallel \Pi_2$

für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \{(6;0;0)\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oy = \{(0;-3;0)\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oz = \{(0;0;4)\}$

$\Pi_2 \cap Ox = \{(12;0;0)\}$ $\quad \Pi_2 \cap Oy = \{(0;-6;0)\}$ $\quad \Pi_2 \cap Oz = \{(0;0;8)\}$



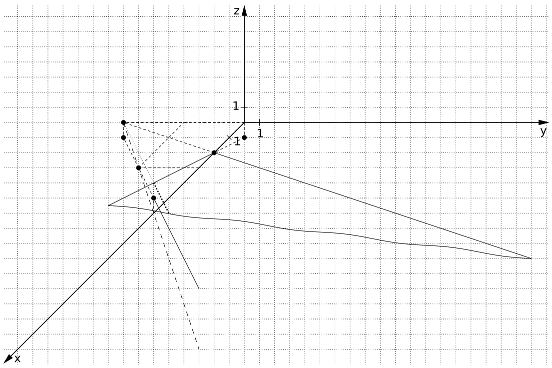


(c) relative Lage : $d \parallel \Pi$

für die graphische Darstellung :

$d \cap Oxy = \{(3;-4;0)\}$ $\quad d \cap Oxz = \{(6;0;1)\}$ $\quad d \cap Oyz = \{(0;-8;-1)\}$

$\Pi \cap Ox = \{(2;0;0)\}$ $\quad \Pi \cap Oy = \{(0;-8;0)\}$ $\quad \Pi \cap Oz = \{(0;0;-1)\}$



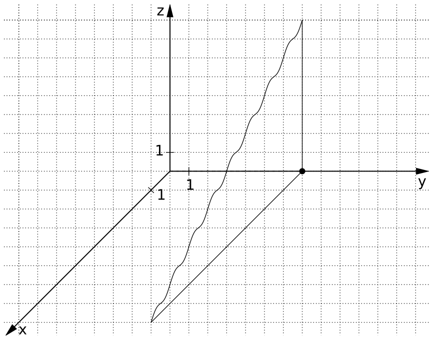
(d) $\Pi_1 \;:\; y = 7$

$\Pi_2 \;:\; y = 7$

relative Lage : $\Pi_1 = \Pi_2$

für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \Pi_2 \cap Ox = \emptyset$ $\quad \Pi_1 \cap Oy = \Pi_2 \cap Oy = \{(0;7;0)\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oz = \Pi_2 \cap Oz = \emptyset$



(e) relative Lage : $d \cap \Pi = \left\{\left(\frac{7}{4}; 5; \frac{13}{4}\right)\right\}$

Winkel zwischen d und Π :

Richtungsvektor von d : z.B. $\overrightarrow{u} = (-1; 4; 1)^t$

Normalenvektor von Π : z.B. $\overrightarrow{n} = (3; 2; -1)^t$

Winkel zwischen $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{n}$: $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{14}}\right) \approx 75.4°$

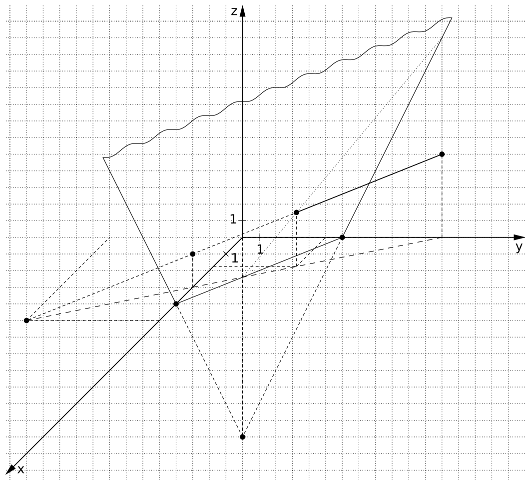
Winkel zwischen d und Π : $\alpha = 90° - \beta \approx 14.6°$

für die graphische Darstellung :

$d \cap Oxy = \{(5; -8; 0)\}$ $d \cap Oxz = \{(3; 0; 2)\}$ $d \cap Oyz = \{(0; 12; 5)\}$

$\Pi \cap Ox = \{(4; 0; 0)\}$ $\Pi \cap Oy = \{(0; 6; 0)\}$ $\Pi \cap Oz = \{(0; 0; -12)\}$

Der Schnittpunkt kann entweder graphisch konstruiert werden oder mit Hilfe der berechneten Koordinaten eingezeichnet werden.



(f) Π_2 : $x - y + 7z = 7$

relative Lage : $\Pi_1 \cap \Pi_2 = d$: $\begin{cases} x = -3z + \frac{17}{3} \\ y = 4z - \frac{4}{3} \end{cases}$

(es existieren verschiedene mögliche Formen für d)

Winkel zwischen Π_1 und Π_2 :

Normalenvektor von Π_1 : z.B. $\overrightarrow{n_1} = (2; 1; 2)^t$

Normalenvektor von Π_2 : z.B. $\overrightarrow{n_2} = (1; -1; 7)^t$

Winkel zwischen Π_1 und Π_2 : Winkel zwischen $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$: $\cos^{-1}\left(\frac{15}{3\cdot\sqrt{51}}\right) \approx 45.6°$

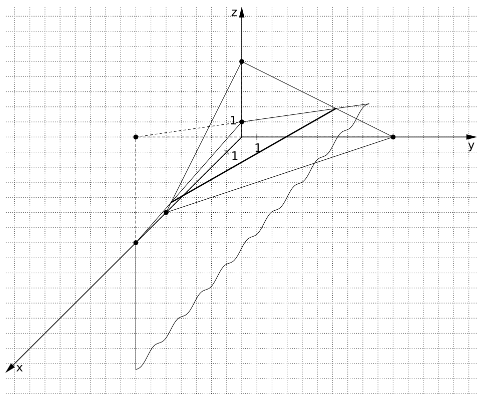
für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \{(5; 0; 0)\}$ $\Pi_1 \cap Oy = \{(0; 10; 0)\}$ $\Pi_1 \cap Oz = \{(0; 0; 5)\}$

$\Pi_2 \cap Ox = \{(7; 0; 0)\}$ $\Pi_2 \cap Oy = \{(0; -7; 0)\}$ $\Pi_2 \cap Oz = \{(0; 0; 1)\}$

die Schnittgerade d in der graphischen Darstellung kann direkt graphisch konstruiert werden

(oder : $d \cap Oxy = \left\{\left(\frac{17}{3}; -\frac{4}{3}; 0\right)\right\}$ $d \cap Oxz = \left\{\left(\frac{14}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)\right\}$ $d \cap Oyz = \left\{\left(0; \frac{56}{9}; \frac{17}{9}\right)\right\}$ ... schwierig darzustellen)



(g) $\Pi_1 \ : \ 2x + 3z = 5$

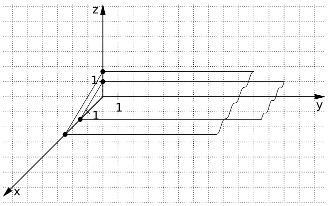
$\Pi_2 \ : \ 2x + 3z = 3$

relative Lage : $\Pi_1 \parallel \Pi_2$

für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \left\{\left(\frac{5}{2};0;0\right)\right\} \quad \Pi_1 \cap Oy = \emptyset \quad \Pi_1 \cap Oz = \left\{\left(0;0;\frac{5}{3}\right)\right\}$

$\Pi_2 \cap Ox = \left\{\left(\frac{3}{2};0;0\right)\right\} \quad \Pi_2 \cap Oy = \emptyset \quad \Pi_2 \cap Oz = \{(0;0;1)\}$



(h) relative Lage : $\Pi_1 \cap \Pi_2 = d \ : \ \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z + \frac{4}{3} \\ y = 0 \end{cases}$

(es existieren verschiedene mögliche Formen für d)

Winkel zwischen Π_1 und Π_2 :

Normalenvektor von Π_1 : z.B. $\overrightarrow{n_1} = (3;-2;5)^t$

Normalenvektor von Π_2 : z.B. $\overrightarrow{n_2} = (3;2;5)^t$

Winkel zwischen Π_1 und Π_2 : Winkel zwischen $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$: $\cos^{-1}\left(\frac{30}{38}\right) \approx 37.9°$

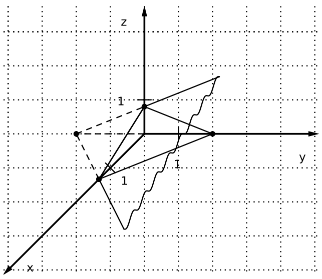
für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \left\{\left(\frac{4}{3};0;0\right)\right\} \quad \Pi_1 \cap Oy = \{(0;-2;0)\} \quad \Pi_1 \cap Oz = \left\{\left(0;0;\frac{4}{5}\right)\right\}$

$\Pi_2 \cap Ox = \left\{\left(\frac{4}{3};0;0\right)\right\} \quad \Pi_2 \cap Oy = \{(0;2;0)\} \quad \Pi_2 \cap Oz = \left\{\left(0;0;\frac{4}{5}\right)\right\}$

die Schnittgerade d in der graphischen Darstellung kann direkt graphisch konstruiert werden

(oder : $d \cap Oxy = \left\{\left(\frac{4}{3};0;0\right)\right\} \quad d \cap Oxz = d \quad d \cap Oyz = \left\{\left(0;0;\frac{4}{5}\right)\right\}$)



(i) relative Lage : $d \parallel \Pi$

für die graphische Darstellung :

$d \cap Oxy = d \cap Oyz = \{(0;8;0)\} \quad d \cap Oxz = \{(8;0;8)\}$

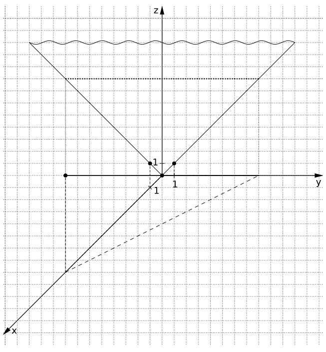
$\Pi \cap Ox = \Pi \cap Oy = \Pi \cap Oz = \{(0;0;0)\}$

Hilfspunkte für Π :

auf Oxy : z.B. $(1;-2;0)$ (unsichtbar, nicht benötigt)

auf Oxz : z.B. $(1;0;2)$

auf Oyz : z.B. $(0;1;1)$



(j) relative Lage : $d \subset \Pi$

für die graphische Darstellung :

$d \cap Oxy = \{(-1;4;0)\}$ $\quad d \cap Oxz = \{(11;0;4)\}$ $\quad d \cap Oyz = \left\{\left(0;\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$

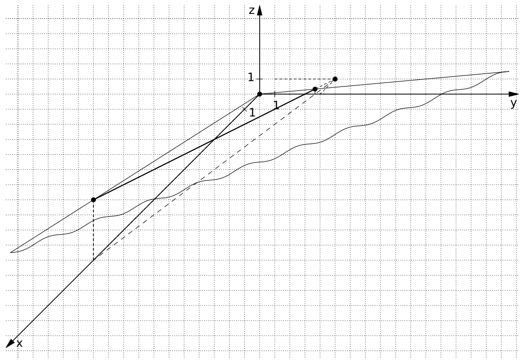
$\Pi \cap Ox = \Pi \cap Oy = \Pi \cap Oz = \{(0;0;0)\}$

Hilfspunkte für Π :

auf Oxy : z.B. $(1;-4;0)$ (unsichtbar, nicht benötigt)

auf Oxz : z.B. $(11;0;4)$

auf Oyz : z.B. $(0;11;1)$

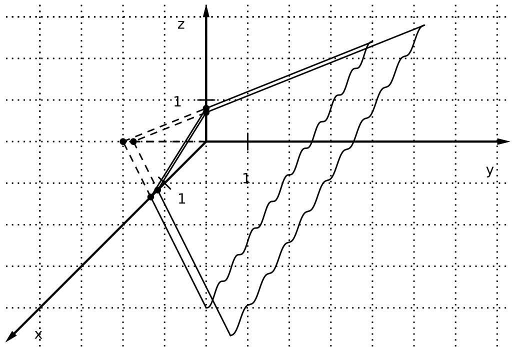


(k) relative Lage : $\Pi_1 \parallel \Pi_2$

für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \left\{\left(\frac{4}{3};0;0\right)\right\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oy = \{(0;-2;0)\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oz = \left\{\left(0;0;\frac{4}{5}\right)\right\}$

$\Pi_2 \cap Ox = \left\{\left(\frac{7}{6};0;0\right)\right\}$ $\quad \Pi_2 \cap Oy = \left\{\left(0;-\frac{7}{4};0\right)\right\}$ $\quad \Pi_2 \cap Oz = \left\{\left(0;0;\frac{7}{10}\right)\right\}$



(l) umgeformt z.B. : $\Pi \ : \ 3x - 2y + 4z = 0$ und $d \ : \ \begin{cases} y = 3x - 8 \\ z = 5x - 12 \end{cases}$

relative Lage : $d \cap \Pi = \left\{\left(\frac{32}{17};-\frac{40}{17};-\frac{44}{17}\right)\right\}$

Winkel zwischen d und Π :

Richtungsvektor von d : z.B. $\overrightarrow{u} = (1;3;5)^t$

Normalenvektor von Π : z.B. $\overrightarrow{n} = (3;-2;4)^t$

Winkel zwischen $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{n}$: $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{17}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{29}}\right) \approx 57.8°$

Winkel zwischen d und Π : $\alpha = 90° - \beta \approx 32.2°$

für die graphische Darstellung :

$d \cap Oxy = \left\{\left(\frac{12}{5};-\frac{4}{5};0\right)\right\}$ $\quad d \cap Oxz = \left\{\left(\frac{8}{3};0;\frac{4}{3}\right)\right\}$ $\quad d \cap Oyz = \{(0;-8;-12)\}$

$\Pi \cap Ox = \Pi \cap Oy = \Pi \cap Oz = \{(0;0;0)\}$

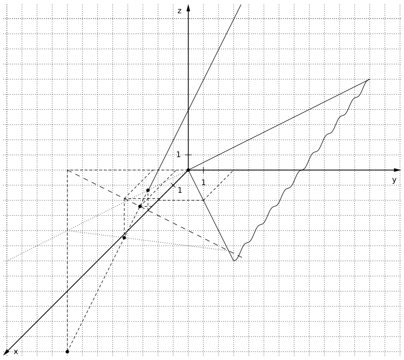
Hilfspunkte für Π :

auf Oxy : z.B. $(2;3;0)$

auf Oxz : z.B. $(4;0;-3)$ (unsichtbar, nicht benötigt)

auf Oyz : z.B. $(0;4;2)$

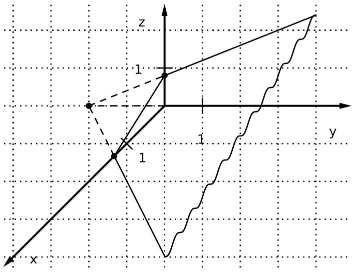
Der Schnittpunkt muss nicht dargestellt werden (er liegt im unsichtbaren Teil), er wurde in der folgenden Darstellung nur dargestellt, um die Konstruktionsweise noch einmal zu illustrieren.



(m) relative Lage : $\Pi_1 = \Pi_2$

für die graphische Darstellung :

$\Pi_1 \cap Ox = \Pi_2 \cap Ox = \left\{\left(\frac{4}{3}; 0; 0\right)\right\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oy = \Pi_2 \cap Oy = \{(0; -2; 0)\}$ $\quad \Pi_1 \cap Oz = \Pi_2 \cap Oz = \left\{\left(0; 0; \frac{4}{5}\right)\right\}$



(n) umgeformt z.B. : $d \; : \; \begin{cases} x = 2y + \frac{3}{2} \\ z = y + \frac{1}{2} \end{cases}$

relative Lage : $d \cap \Pi = \left\{\left(\frac{26}{3}; \frac{43}{12}; \frac{49}{12}\right)\right\}$

Winkel zwischen d und Π :

Richtungsvektor von d : z.B. $\overrightarrow{u} = (2; 1; 1)^t$

Normalenvektor von Π : z.B. $\overrightarrow{n} = (2; 1; 1)^t$

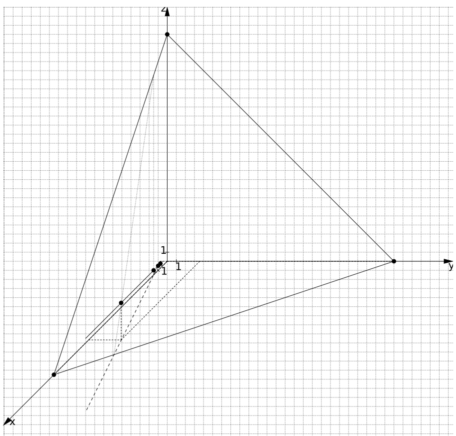
Winkel zwischen $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{n}$: $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{6}\right) = 0°$

Winkel zwischen d und Π : $\alpha = 90° - \beta = 90°$

für die graphische Darstellung :

$d \cap Oxy = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)\right\}$ $\quad d \cap Oxz = \left\{\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)\right\}$ $\quad d \cap Oyz = \left\{\left(0; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)\right\}$

$\Pi \cap Ox = \left\{\left(\frac{25}{2}; 0; 0\right)\right\}$ $\quad \Pi \cap Oy = \{(0; 25; 0)\}$ $\quad \Pi \cap Oz = \{(0; 0; 25)\}$



2. wird im Unterricht korrigiert