## Exercices d'applications des mathématiques - Corrigé de la série n° 5

Cours 3AMOS01

### 1. Vecteurs du plan.

Les vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (-x_2, x_1)$ sont orthogonaux car $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 \cdot (-x_2) + x_2 \cdot x_1 = 0$. L'angle entre ces deux vecteurs vaut 90°.

### 2. Vecteurs du plan.

Le vecteur $\vec{p}$ correspond à la projection orthogonale du vecteur $\vec{y}$ sur le vecteur $\vec{x}$.

### 3. Vecteurs du plan.

Le vecteur $\vec{q}$ correspond à la projection orthogonale du vecteur $\vec{y}$ sur l'axe perpendiculaire au vecteur $\vec{x}$.

### 4. Vecteurs.

a) $(\frac{2}{3}; -3)$

b) (1) $P_{\vec{y}}(\vec{x}) = (-0.4; -0.2)$, $P_{\vec{x}^\perp}(\vec{y}) = (\frac{12}{13}; \frac{8}{13})$

(2) $P_{\vec{y}}(\vec{x}) = (0; 0)$, $P_{\vec{x}^\perp}(\vec{y}) = \vec{y}$

### 8. Rayon de courbure.

On trouve, $\vec{x}(t) = \vec{x_0}$ et $R(t) = r$, $\forall\ t$.

### 9. Cercle osculateur.

Le rayon de courbure est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\sin^2(t) + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{|\cos(t)|}$$

et le centre du cercle osculateur par

$$\begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix} + \frac{\sin^2(t) + 1}{\cos(t)} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Il suffit de compléter le script comme suit:

```
clear
nmax=200;
cmax=200;
tmax=4*pi;
#%Coordonnees parametriques de la courbe
function y=f(t)
  y(1)=cos(t);
  y(2)=t;
end
#%Formule pour le rayon de courbure
function y=h(t)
  y=(sin(t)^2+1)^(3/2)/abs(cos(t));
end
#%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
function y=g(t)
  y(1)=cos(t)+(sin(t)^2+1)/cos(t)*(-1);
  y(2)=t+(sin(t)^2+1)/cos(t)*(-sin(t));
end
clf
for n=1:nmax
```

```
  x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
for m=1:cmax
  n=round(m*nmax/cmax);
  x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
  x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
  r(n)=h(n/nmax*tmax);
  h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
  for k=1:200
    c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
    c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
  end
  plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
  title('Courbes du plan et rayon de courbure')
  xlabel('x')
  ylabel('y')
  axis([-5,5,-2,15],"equal")
  pause(40/1000)
end
```

## 10. Rayon de courbure.

Remarquons que $\dot{\vec{F}}(t) = \dot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)$ et $\ddot{\vec{F}}(t) = \ddot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)^2 + \dot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \ddot{g}(t)$. Par conséquent, en remplaçant dans la formule pour $R(t)$ la fonction $\vec{f}$ par $\vec{F}$, on obtient

$$\frac{\left(\dot{F}_1(t)^2+\dot{F}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{F}_1(t)\ddot{F}_2(t)-\ddot{F}_1(t)\dot{F}_2(t)|}$$

$$= \frac{\left(\left[\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]^2+\left[\dot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\left[\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]\left[\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]-\left[\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]\left[\dot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]\right|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\left[\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]-\left[\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2\cdot\dot{f}_2(g(t))-\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|^3}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))|} = R(g(t))$$

En résumé, pour un point donné $\vec{x} = \vec{f}(t_0)$ de la courbe $\mathcal{C}$, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ est donné par $R(t_0)$ pour la paramétrisation $\vec{f}$. Par ailleurs, $\vec{x} = \vec{F}(g^{-1}(t_0))$. Ainsi, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ pour la paramétrisation $\vec{F}$ est donné par $R(g(g^{-1}(t_0))) = R(t_0)$. Par conséquent, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ ne dépend pas de la paramétrisation.

## 11. Rayon de courbure.

(1) Une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} [0.9 + 0.1\cos(12t)]\cos(t) \\ \frac{1}{2}[0.9 + 0.1\cos(12t)]\sin(t) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, en exécutant le script donné ci-dessous, on obtient une représentation de la courbe $\mathcal{C}$.

```
clear
nmax=200;
tmax=2*pi;
function y=f(t)
  y(1)=(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t);
  y(2)=0.5*(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t);
endfunction
for n=0:nmax
  x(n+1)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n+1)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
clf
plot(x,y)
title('Courbes du plan')
grid("on");
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-1,1,-1,1],"equal")
```

(2) Remarquons que $\dot{\vec{F}}(t) = \dot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)$ et $\ddot{\vec{F}}(t) = \ddot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)^2 + \dot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \ddot{g}(t)$. Par conséquent, en remplaçant dans la formule pour $R(t)$ la fonction $\vec{f}$ par $\vec{F}$, on obtient

$$\frac{\left(\dot{F}_1(t)^2+\dot{F}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{F}_1(t)\ddot{F}_2(t)-\ddot{F}_1(t)\dot{F}_2(t)|}$$

$$= \frac{\left(\left[\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]^2+\left[\dot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\left[\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]\left[\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]-\left[\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]\left[\dot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\left[\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]-\left[\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2\cdot\dot{f}_2(g(t))-\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|^3}$$

$$= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))|} = R(g(t))$$

En résumé, pour un point donné $\vec{x} = \vec{f}(t_0)$ de la courbe $\mathcal{C}$, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ est donné par $R(t_0)$ pour la paramétrisation $\vec{f}$. Par ailleurs, $\vec{x} =$

$\vec{F}(g^{-1}(t_0))$. Ainsi, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ pour la paramétrisation $\vec{F}$ est donné par $R(g(g^{-1}(t_0))) = R(t_0)$. Par conséquent, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ ne dépend pas de la paramétrisation.

(3) La dérivée de $\vec{f}$ est donnée par

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} -1.2\sin(12t)\cos(t) - [0.9 + 0.1\cos(12t)]\sin(t) \\ \frac{1}{2}\left(-1.2\sin(12t)\sin(t) + [0.9 + 0.1\cos(12t)]\cos(t)\right) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1(t) &= -14.4\cos(12t)\cos(t) + 1.2\sin(12t)\sin(t) + 1.2\sin(12t)\sin(t) \\ &\qquad - [0.9 + 0.1\cos(12t)]\cos(t) \\ &= -14.5\cos(12t)\cos(t) + 2.4\sin(12t)\sin(t) - 0.9\cos(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{f}_2(t) &= \tfrac{1}{2}\big(-14.4\cos(12t)\sin(t) - 1.2\sin(12t)\cos(t) - 1.2\sin(12t)\cos(t) \\ &\qquad - [0.9 + 0.1\cos(12t)]\sin(t)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-14.5\cos(12t)\sin(t) - 2.4\sin(12t)\cos(t) - 0.9\sin(t)\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, le script suivant permet de tracer en chaque point de la courbe $\mathcal{C}$ son cercle osculateur:

```
clear
nmax=10000;
cmax=200;
tmax=2*pi;
#%Coordonnees parametriques de la courbe
function y=f(t)
  y(1)=(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t);
  y(2)=0.5*(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t);
end
#%Formule pour le rayon de courbure
function y=h(t)
  y=((-1.2*sin(12*t)*cos(t)-(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t))^2+(0.5*(-1.2*sin(12*t)*sin(t)
      +(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t)))^2)^(3/2)/abs((-1.2*sin(12*t)*cos(t)-(0.9+0.1*cos(12*t
      ))*sin(t))*(0.5*(-14.5*cos(12*t)*sin(t)-2.4*sin(12*t)*cos(t)-0.9*sin(t)))-(-14.5*
      cos(12*t)*cos(t)+2.4*sin(12*t)*sin(t)-0.9*cos(t))*(0.5*(-1.2*sin(12*t)*sin(t)
      +(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t))));
end
#%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
function y=g(t)
  y(1)=((0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t))+(((-1.2*sin(12*t)*cos(t)-(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t))
      ^2+(0.5*(-1.2*sin(12*t)*sin(t)+(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t)))^2)/((-1.2*sin(12*t)*cos
      (t)-(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t))*(0.5*(-14.5*cos(12*t)*sin(t)-2.4*sin(12*t)*cos(t)
      -0.9*sin(t)))-(-14.5*cos(12*t)*cos(t)+2.4*sin(12*t)*sin(t)-0.9*cos(t))*(0.5*(-1.2*
      sin(12*t)*sin(t)+(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t)))))*(-(0.5*(-1.2*sin(12*t)*sin(t)
      +(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t))));
```

```
  y(2)=(0.5*(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t))+(((-1.2*sin(12*t)*cos(t)-(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t))^2+(0.5*(-1.2*sin(12*t)*sin(t)+(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t)))^2)/((-1.2*sin(12*t)*cos(t)-(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t))*(0.5*(-14.5*cos(12*t)*sin(t)-2.4*sin(12*t)*cos(t)-0.9*sin(t)))-(-14.5*cos(12*t)*cos(t)+2.4*sin(12*t)*sin(t)-0.9*cos(t))*(0.5*(-1.2*sin(12*t)*sin(t)+(0.9+0.1*cos(12*t))*cos(t)))))*(-1.2*sin(12*t)*cos(t)-(0.9+0.1*cos(12*t))*sin(t));
end
clf
for n=1:nmax
  x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
for m=1:cmax
  n=round(m*nmax/cmax);
  x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
  x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
  r(n)=h(n/nmax*tmax);
  h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
  for k=1:200
    c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
    c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
  end
  plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
  title('Courbes du plan et rayon de courbure')
  xlabel('x')
  ylabel('y')
  axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5],"equal")
  grid("on")
  pause(80/1000)
end
```

## 12. Rayon de courbure.

(1) Une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{2\pi}\cos(5t) \\ \frac{t}{2\pi}\sin(5t) \end{pmatrix}$$

Par conséquent, en exécutant le script donné ci-dessous, on obtient une représentation de la courbe $\mathcal{C}$.

```
clear
nmax=200;
tmax=2*pi;
function y=f(t)
  y(1)=(t/(2*pi))*cos(5*t);
  y(2)=(t/(2*pi))*sin(5*t);
endfunction
for n=0:nmax
  x(n+1)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n+1)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
clf
plot(x,y)
title('Courbes du plan')
grid("on");
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-1,1,-1,1],"equal")
```

(2) Remarquons que $\dot{\vec{F}}(t) = \dot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)$ et $\ddot{\vec{F}}(t) = \ddot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)^2 + \dot{\vec{f}}(g(t)) \cdot \ddot{g}(t)$. Par conséquent, en remplaçant dans la formule pour $R(t)$ la fonction $\vec{f}$ par $\vec{F}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\dot{F}_1(t)^2+\dot{F}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{F}_1(t)\ddot{F}_2(t)-\ddot{F}_1(t)\dot{F}_2(t)|}\\
&= \frac{\left(\left[\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]^2+\left[\dot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\left[\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]\left[\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]-\left[\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]\left[\dot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)\right]\right|}\\
&= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{\left|\dot{f}_1(g(t))\left[\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]-\left[\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\right]\dot{f}_2(g(t))\right||\dot{g}(t)|}\\
&= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2+\dot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))\cdot\ddot{g}(t)-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2\cdot\dot{f}_2(g(t))-\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{g}(t)\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}\\
&= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{g}(t)^2\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|}\\
&= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot|\dot{g}(t)|^3}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))||\dot{g}(t)|^3}\\
&= \frac{\left(\dot{f}_1(g(t))^2+\dot{f}_2(g(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(g(t))\cdot\ddot{f}_2(g(t))-\ddot{f}_1(g(t))\cdot\dot{f}_2(g(t))|} = R(g(t))
\end{aligned}$$

En résumé, pour un point donné $\vec{x} = \vec{f}(t_0)$ de la courbe $\mathcal{C}$, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ est donné par $R(t_0)$ pour la paramétrisation $\vec{f}$. Par ailleurs, $\vec{x} = \vec{F}(g^{-1}(t_0))$. Ainsi, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ pour la paramétrisation $\vec{F}$ est donné par $R(g(g^{-1}(t_0))) = R(t_0)$. Par conséquent, le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point $\vec{x}$ ne dépend pas de la paramétrisation.

(3) La dérivée de $\vec{f}$ est donnée par

$$\dot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\left[\cos(5t) - 5t\sin(5t)\right] \\ \frac{1}{2\pi}\left[\sin(5t) + 5t\cos(5t)\right] \end{pmatrix}$$

et

$$\ddot{\vec{f}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\left[-5\sin(5t) - 5\sin(5t) - 25t\cos(5t)\right] \\ \frac{1}{2\pi}\left[5\cos(5t) + 5\cos(5t) - 25t\sin(5t)\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\left[-10\sin(5t) - 25t\cos(5t)\right] \\ \frac{1}{2\pi}\left[10\cos(5t) - 25t\sin(5t)\right] \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le script suivant permet de tracer en chaque point de la courbe $\mathcal{C}$ son cercle osculateur:

```
clear
nmax=10000;
cmax=200;
tmax=2*pi;
#%Coordonnees parametriques de la courbe
function y=f(t)
  y(1)=(t/(2*pi))*cos(5*t);
  y(2)=(t/(2*pi))*sin(5*t);
end
#%Formule pour le rayon de courbure
```

```
function y=h(t)
  y=(((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)))^2+((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t)))^2)^(3/2)/abs(((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)))*((1/(2*pi))*(10*cos(5*t)-25*t*sin(5*t)))-((1/(2*pi))*(-10*sin(5*t)-25*t*cos(5*t)))*((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t))));
end
#%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
function y=g(t)
  y(1)=((t/(2*pi))*cos(5*t))+((((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)))^2+((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t)))^2)/(((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)))*((1/(2*pi))*(10*cos(5*t)-25*t*sin(5*t)))-((1/(2*pi))*(-10*sin(5*t)-25*t*cos(5*t)))*((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t)))))*(-((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t))));
  y(2)=((t/(2*pi))*sin(5*t))+((((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)))^2+((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t)))^2)/(((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)))*((1/(2*pi))*(10*cos(5*t)-25*t*sin(5*t)))-((1/(2*pi))*(-10*sin(5*t)-25*t*cos(5*t)))*((1/(2*pi))*(sin(5*t)+5*t*cos(5*t)))))*((1/(2*pi))*(cos(5*t)-5*t*sin(5*t)));
end
clf
for n=1:nmax
  x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
for m=1:cmax
  n=round(m*nmax/cmax);
  x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
  x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
  r(n)=h(n/nmax*tmax);
  h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
  for k=1:200
    c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
    c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
  end
  plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
  title('Courbes du plan et rayon de courbure')
  xlabel('x')
  ylabel('y')
  axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5],"equal")
  grid("on")
  pause(80/1000)
end
```