**Exercices de physique - Corrigé de la série** n° **5**

Cours 3PYOS01

**1. Poids.**

Le poids à la surface de la Terre est donné par

$$P_0 = G\frac{M_T 70}{R_T^2} \approx 9.8 \cdot 70 = 686 \text{ N}$$

et à une hauteur $h$ par

$$P_h = G\frac{M_T 70}{(R_T+h)^2} \;\Rightarrow\; R_T + h = \sqrt{G\frac{M_T 70}{P_h}}$$

$$\Rightarrow\; h = \sqrt{G\frac{M_T 70}{P_h}} - R_T = \sqrt{P_0\frac{R_T^2}{P_h}} - R_T = R_T\left(\sqrt{\frac{P_0}{P_h}} - 1\right) \approx 6.4 \cdot 10^6\left(\sqrt{\frac{P_0}{P_h}} - 1\right)$$

Par conséquent,

(1) le poids diminue de 1 % à une hauteur de

$$h \approx 6.4 \cdot 10^6\left(\sqrt{\frac{P_0}{0.99P_0}} - 1\right) \approx 32 \text{ km}$$

(2) le poids diminue de moitié à une hauteur de

$$h \approx 6.4 \cdot 10^6\left(\sqrt{\frac{P_0}{0.5P_0}} - 1\right) \approx 2650 \text{ km}$$

(3) le poids diminue de 100 N à une hauteur de

$$h \approx 6.4 \cdot 10^6\left(\sqrt{\frac{P_0}{P_0 - 100}} - 1\right) \approx 524 \text{ km}$$

**2. Orbites.**

(1) (a) On a

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; G\frac{M_T m_s}{R^2} = m_s\frac{V^2}{R} \;\Rightarrow\; V = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

(b) La vitesse diminue avec l'éloignement du satellite.

(2) (a) On trouve

$$V = \frac{2\pi R}{T} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\frac{M_T}{R}}} = \frac{2\pi\sqrt{R^3}}{\sqrt{GM_T}}$$

(b) La période augmente avec l'éloignement du satellite.

**3. Satellites.**

(1) Dans le plan équatorial.

(2) On a

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \ \Rightarrow \ G\frac{M_T m_s}{R^2} = m_s\omega^2 R \ \Rightarrow \ R = \sqrt[3]{G\frac{M_T}{\omega^2}} \approx \sqrt[3]{6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.97\cdot 10^{24}}{\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\right)^2}} \approx 42200 \text{ km}$$

et l'altitude est donnée par

$$\sqrt[3]{6.67\cdot 10^{-11}\frac{5.97\cdot 10^{24}}{\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\right)^2}} - 6.4\cdot 10^6 \approx 35'800 \text{ km}$$

et la vitesse est donnée par

$$V = \frac{2\pi R}{T} \approx \frac{2\pi 42200}{24\cdot 3600} \approx 3 \text{ km/s}$$

**4. Jules Vernes.**

(1) Notons $R$ la distance séparant le centre de la Terre du point entre la Terre et la Lune où la force d'attraction de la Terre et la force d'attraction de la Lune sont égales et opposées et notons $d$ la distance Terre-Lune ($d \approx 3.8\cdot 10^8$ m). Alors

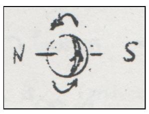
$$G\frac{M_T}{R^2} = G\frac{M_L}{(d-R)^2} \ \Rightarrow \ \frac{R}{\sqrt{M_T}} = \frac{d-R}{\sqrt{M_L}} \ \Rightarrow \ R\left(\frac{1}{\sqrt{M_T}} + \frac{1}{\sqrt{M_L}}\right) = \frac{d}{\sqrt{M_L}}$$

$$\Rightarrow \ R = d\frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_L}+\sqrt{M_T}} = d\frac{1}{1+\sqrt{\frac{M_L}{M_T}}} \approx \frac{3.8\cdot 10^8}{1+\sqrt{\frac{7.35\cdot 10^{22}}{5.97\cdot 10^{24}}}} \approx 342'000 \text{ km}$$

(2) Il faut préciser ce que l'on entend par "apesanteur". Il ne s'agit pas d'un "manque" ou "absence" de champ de gravitation, mais de l'absence de "sensation" de la pesanteur. Cette sensation provient de la réaction du sol qui s'oppose au poids et nous empêche de tomber en chute libre. Ainsi, "apesanteur" est équivalent à "chute libre". Si la cage qui nous entoure est en chute libre (satellite, ascenseur fou, ...), tous les corps sont en état d'apesanteur. Le point de gravité nulle peut-être un point d'apesanteur, mais ce n'est de loin pas le seul.

**5. La Terre.**

(1) En appliquant la règle du tire-bouchon à la rotation de la Terre, on obtient la direction sud-nord:




(2) On trouve

$$m\frac{V^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \ \Rightarrow \ V = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 1.99\cdot 10^{30}}{1.5\cdot 10^{11}}} \approx 2.98\cdot 10^4 \text{ m/s} \approx 29.8 \text{ km/s}$$

La vitesse est plus grande quand la Terre est plus proche du Soleil.

(3) Comme la vitesse aréolaire est constante, on trouve que $t_{C\to A} < t_{A\to C}$. Par conséquent, $A$ = équinoxe de printemps (21 mars), $B$ = solstice d'été (21 juin), $C$ = équinoxe d'automne (21 septembre) et $D$ = solstice d'hivers (21 décembre).

(4) Les étés seraient plus long et les hivers plus courts.

**6. La comète de Halley.**

(1) En vertu de la loi des périodes de Kepler (la masse de la comète est négligeable par rapport à celle du soleil) nous trouvons:

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2 \ \Rightarrow\ a = \sqrt[3]{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 1.99\cdot 10^{30}}{4\pi^2}(75\cdot 356\cdot 24\cdot 3600)^2} \approx 2.65\cdot 10^{12}\ \text{m} \approx 5210\cdot 10^6\ \text{km}$$

où $a$ est le demi grand axe de l'ellipse. Et la distance de l'aphélie est donnée par

$$2a - 89\cdot 10^6 \approx 2560\cdot 10^6\ \text{km}$$

(2) Soit $f$ la distance focale de l'ellipse (distance du centre au foyer). Alors

$$a - f = \text{périhélie} = 89\cdot 10^9\ \text{m} \ \Rightarrow\ f \approx (2.65\cdot 10^{12} - 89\cdot 10^9) = 2561\cdot 10^6\ \text{km}$$

Notons $b$ le demi petit axe. Alors

$$a^2 = b^2 + f^2 \ \Rightarrow\ b = \sqrt{a^2 - f^2} \approx 681\cdot 10^6\ \text{km}$$

Soit $e$ l'excentricité de l'ellipse. Alors

$$e = \frac{f}{a} \approx 1 - \frac{89}{2650} \approx 0.966$$

Notons $V$ la vitesse aréolaire. Alors

$$V = \frac{\pi\cdot a\cdot b}{T} \approx 2.4\cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

En vertu de la formule

$$V = \frac{1}{2}r\cdot v|\sin(\alpha)| \ \Rightarrow\ v = \frac{2V}{r|\sin(\alpha)|}$$

où $\alpha$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$, il suit que

$$v_{pe} = \frac{2V}{89\cdot 10^9} \approx 54\ \text{km/s et}\ v_{ap} = \frac{2V}{5211\cdot 10^9} \approx 921\ \text{m/s}$$

**7. Tunnel circulaire.**

(1) On peut appliquer la loi des périodes de Kepler ou simplement

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M\cdot m}{R^2} \ \Rightarrow\ \rho\cdot T^2 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(\frac{2\pi R}{v}\right)^2 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4\pi^2R^2}{\frac{GM}{R}} = \frac{3\pi}{G} = \frac{3\pi}{6.67\cdot 10^{-11}}$$
$$\approx 1.41\cdot 10^{11}\ \frac{\text{kg}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} = 1.41\cdot 10^{11}\frac{\text{kg}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

(2) Seule compte l'action de la masse hachurée sur la figure 2 pour le champ de gravitation dans le tunnel. Par conséquent, tout se passe comme si la masse gravitait à la surface d'une planète de densité $\rho$ et la période est donnée par

$$\rho \cdot T^2 = \frac{3\pi}{G} \;\Rightarrow\; T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

et ne dépend pas de la grandeur du cercle.

### 8. Energie potentielle de gravitation.

L'énergie potentielle de gravitation à une hauteur $h$ est donnée par

$$E_{pot\,grav}(R_T + h) = -G\frac{M_T m}{R_T + h}$$

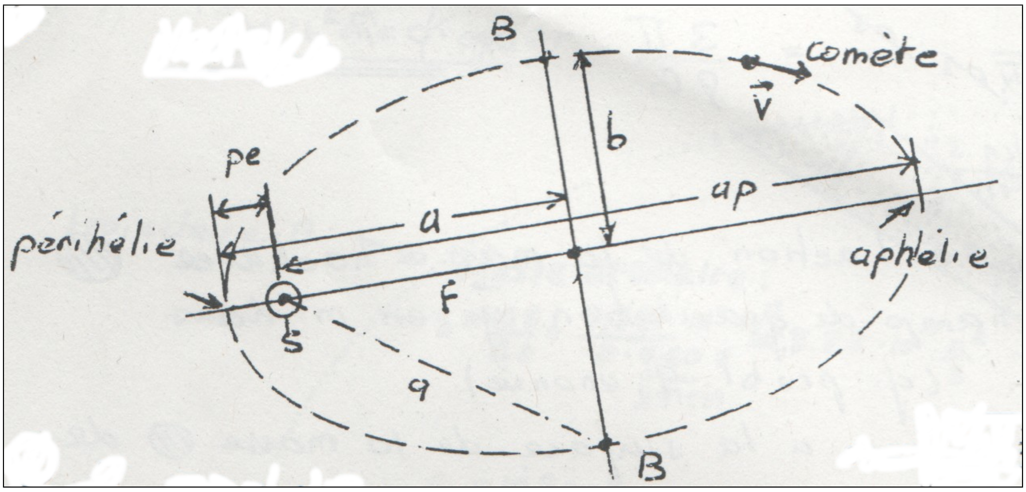



FIGURE 1. Exercice 6

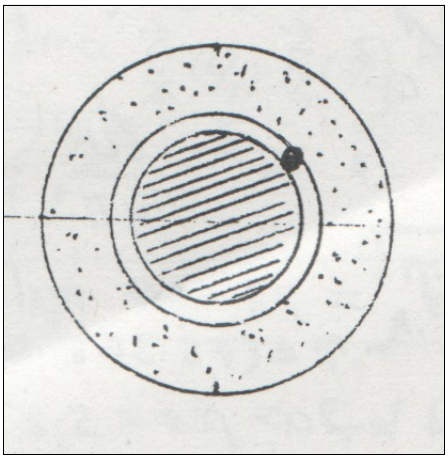


FIGURE 2. Exercice 7

Par conséquent, pour une dénivellation $h$,

$$\begin{aligned}\Delta E_{pot\,grav} &= E_{pot\,grav}(R_T+h) - E_{pot\,grav}(R_T) = -G\frac{M_T m}{R_T+h} - \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right)\\ &= G\frac{M_T m}{R_T}\left(1-\frac{R_T}{R_T+h}\right) = G\frac{M_T m}{R_T}\frac{h}{R_T+h} = G\frac{M_T m}{R_T^2}\frac{h}{1+\frac{h}{R_T}}\end{aligned}$$

Rappelons quelques résultats concernant les suites géométriques:

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots x^n)(1-x) = 1-x^{n+1} \;\Rightarrow\; 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Il suit que si $|x|<1$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

car

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0 \text{ si } |x|<1$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Delta E_{pot\,grav} &= G\frac{M_T m}{R_T^2}h\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}} = m\underbrace{G\frac{M_T}{R_T^2}}_{=g}h\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}} = mgh\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}}\\ &= mgh\left(1+\frac{h}{R_T}+\left(\frac{h}{R_T}\right)^2+\cdots\right) \approx mgh\end{aligned}$$

**9. Vitesse de libération.**

Notons $r(t)$ la distance entre le satellite et le centre de la Terre. Elle dépend du temps $t$. Notons $v(t)$ la vitesse du satellite mesurée dans un référentiel attaché au centre de la Terre. Supposons qu'au temps $t=0$, $r(0)=R_T+h$, $v(0)=v_\infty$ et que la vitesse du satellite soit tangente à son orbite. Rappelons que la vitesse de satellisation (vitesse pour laquelle le satellite reste sur son orbite) est donnée par

$$G\frac{M_T m}{(R_T+h)^2} = m\frac{v_{sat}^2}{R_T+h} \;\Rightarrow\; v_{sat} = \sqrt{G\frac{M_T}{(R_T+h)}}$$

Si la vitesse du satellite $v_\infty$ est supérieure à $v_{sat}$, il va quitter son orbite (il va monter). Son énergie mécanique est donnée par

$$E_{mec\,i} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{M_T m}{R_T+h}$$

Si le satellite ne subit aucune autre force que la gravitation, l'énergie mécanique est conservée, par conséquent

$$E_{mec\,i} = E_{mec}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 - G\frac{M_T m}{r(t)}$$

et la vitesse du satellite diminue quand il monte. Pour qu'il monte "jusqu'à l'infini" il faut et il suffit que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$$

et donc que

$$E_{mec\,i} = \lim_{t\to\infty} E_{mec}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}mv(t)^2 - \lim_{t\to\infty} G\frac{M_T m}{r(t)} = 0$$

c'est-à-dire, que

$$0 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} \;\Rightarrow\; v_\infty = \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T + h}} = \sqrt{2}\cdot v_{sat}$$

**10. Trou noir.**

On trouve

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \;\Rightarrow\; c^2 = \frac{2GM}{R}$$

(1) On trouve

$$c^2 = \frac{2GM}{R} \;\Rightarrow\; M = \frac{c^2 R}{2G}$$

c'est-à-dire, pour la Terre

$$M_T \to M = \frac{(3\cdot 10^8)^2 \cdot 6.37\cdot 10^6}{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}} \approx 4.30\cdot 10^{33}\ \text{kg}$$

et pour le Soleil

$$M_S \to M = \frac{(3\cdot 10^8)^2 \cdot 6.95\cdot 10^8}{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}} \approx 4.69\cdot 10^{35}\ \text{kg}$$

(3) On trouve

$$c^2 = \frac{2GM}{R_{Sch}} \;\Rightarrow\; R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

(2) On trouve pour la Terre

$$R_{Sch} = \frac{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}}{(3\cdot 10^8)^2} \approx 8.85\ \text{mm}$$

et pour le Soleil

$$R_{Sch} = \frac{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 1.99\cdot 10^{30}}{(3\cdot 10^8)^2} \approx 2950\ \text{m}$$