Exercices d'applications des mathématiques - Série n° 5

Cours 3AMOS01 Série distribuée le 2.10.2017

1. Vecteurs du plan.

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de nombres réels. Soit $\vec{x} = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{y} = (-x_2; x_1)$. On considère la flèche reliant le point $(0;0)$ à $\vec{x}$ d'une part et la flèche reliant le point $(0;0)$ à $\vec{y}$ d'autre part. Que vaut l'angle entre ces deux flèches (celui qui est plus petit que 180 ° !). Pour répondre, exécuter avec Octave le script suivant pour différentes valeurs de `x=[?,?]`.

```
clear
x=[?,?];
y=[-x(2),x(1)];
clf
plot([0,x(1)],[0,x(2)],"1;x;",[0,y(1)],[0,y(2)],"2;y;")
axis([-5,5,-5,5],"equal")
grid("on")
```

2. Vecteurs du plan.

Soient $\vec{x} = (x_1; x_2)$ et $\vec{y} = (y_1; y_2)$. On définit un nouveau vecteur

$$\vec{p} = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{x_1^2 + x_2^2} \vec{x}$$

Que représente le vecteur $\vec{p}$? Pour répondre, exécuter avec Octave le script suivant pour différentes valeurs de `x=[?,?];` et `y=[?,?];`.

```
clear
x=[?,?];
y=[?,?];
p=(x(1)*y(1)+x(2)*y(2))/(x(1)^2+x(2)^2)*[x(1),x(2)];
clf
plot([0,x(1)],[0,x(2)],"1;x;",[0,y(1)],[0,y(2)],"2;y;",[0,p(1)],[0,p(2)],"-@13;p;")
axis([-5,5,-5,5],"equal")
grid("on")
```

3. Vecteurs du plan.

Soient $\vec{x} = (x_1; x_2)$ et $\vec{y} = (y_1; y_2)$ et

$$\vec{p} = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{x_1^2 + x_2^2} \vec{x}$$

On définit un nouveau vecteur $\vec{q} = \vec{y} - \vec{p}$. Montrer que

$$\vec{q} = \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Que représente le vecteur $\vec{q}$? Pour répondre, exécuter avec Octave le script suivant pour différentes valeurs de `x=[?,?];` et `y=[?,?];`.

```
clear
x=[?,?];
y=[?,?];
p=(x(1)*y(1)+x(2)*y(2))/(x(1)^2+x(2)^2)*[x(1),x(2)];
q=(x(1)*y(2)-x(2)*y(1))/(x(1)^2+x(2)^2)*[-x(2),x(1)];
clf
plot([0,x(1)],[0,x(2)],"1;x;",[0,y(1)],[0,y(2)],"2;y;",[0,p(1)],[0,p(2)],"-@13;p;",[0,q(1)],[0,q(2)],"-@14;q;")
axis([-5,5,-5,5],"equal")
grid("on")
```

4. Vecteurs.
Soient $\vec{x} = (x_1; x_2)$ et $\vec{y} = (y_1; y_2)$ et

$$\vec{p} = \frac{(x_1y_1 + x_2y_2)}{x_1^2 + x_2^2}\vec{x}$$

a) Trouver un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{x} = (-3; -\frac{2}{3})$.
b) Calculer la projection de $\vec{x}$ sur l'axe engendré par $\vec{y}$ et la projection de $\vec{y}$ sur l'axe perpendiculaire à $\vec{x}$ pour

(1) $\vec{x} = (-2; 3)$ et $\vec{y} = (1; \frac{1}{2})$
(2) $\vec{x} = (3; -2)$ et $\vec{y} = (-2; -3)$

Vérifier les résultats en utilisant le script suivant

```
clear
x=[?,?];
y=[?,?];
p=(x(1)*y(1)+x(2)*y(2))/(x(1)^2+x(2)^2)*[x(1),x(2)];
q=?;
clf
plot([0,x(1)],[0,x(2)],"1;x;",[0,y(1)],[0,y(2)],"2;y;",[0,p(1)],[0,p(2)],"-@13;p;",[0,q(1)],[0,q(2)],"-@14;q;",[p(1),p(1)+q(1)],[p(2),p(2)+q(2)],"5")
axis([-5,5,-5,5],"equal")
grid("on")
p
```

5. Rayon de courbure. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (f_1(t); f_2(t)) \end{array}$$

une fonction deux fois dérivable. La fonction $\vec{f}$ associe à chaque nombre t deux nombres notés $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Elle peut par exemple décrire le mouvement d'un objet sur un plan. Dans ce cas, la dérivée $\dot{\vec{f}}(t) = (\dot{f}_1(t); \dot{f}_2(t))$ représente le vecteur vitesse de l'objet au temps t et la deuxième dérivée $\ddot{\vec{f}}(t) = (\ddot{f}_1(t); \ddot{f}_2(t))$ correspond à l'accélération. L'image de f est la trajectoire de l'objet. C'est une courbe du plan.

Calculer la composante perpendiculaire au vecteur $\dot{\vec{f}}(t)$ du vecteur accélération $\ddot{\vec{f}}(t)$.

6. Rayon de courbure. Soit $\vec{g}(\tau) = \vec{x_0} + \begin{pmatrix} R\cos(\omega\tau) \\ R\sin(\omega\tau) \end{pmatrix}$.

(1) Calculer les vecteurs $\dot{\vec{g}}(\tau)$ et $\ddot{\vec{g}}(\tau)$.

(2) Calculer les normes des vecteurs trouvés ci-dessus $v = \|\dot{\vec{g}}(\tau)\|$ et $a = \|\ddot{\vec{g}}(\tau)\|$.

(3) Soit $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction qui décrit le mouvement d'un objet sur un plan. On suppose que $\|\dot{\vec{f}}(t)\| = v$ et que $\|\ddot{\vec{f}}_\perp(t)\| = a$ où $\ddot{\vec{f}}_\perp(t)$ désigne la composante perpendiculaire au vecteur $\dot{\vec{f}}(t)$ du vecteur accélération $\ddot{\vec{f}}(t)$ et v et a sont la vitesse et l'accélération du point 2. Trouver une formule pour R contenant les dérivées des composantes de $\vec{f}$.

7. Rayon de courbure.
Soit

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (f_1(t); f_2(t)) \end{array}$$

une fonction deux fois dérivable. Pour chaque valeur de t, on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

et le centre par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $\vec{x}(t)$ et $R(t)$ pour $\vec{f}(t) = \vec{x_0} + r\begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \end{pmatrix}$.

Soit g la fonction définie par

$$\vec{g} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & \vec{x}(t) + R(t)\begin{pmatrix} \cos(\omega s) \\ \sin(\omega s) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{où } \omega = \sqrt{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}$$

(2) Calculer la norme de la dérivée $\|\dot{\vec{g}}(s)\|$.

(3) Calculer la norme de la deuxième dérivée $\|\ddot{\vec{g}}(s)\|$.

8. Rayon de courbure.
Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour chaque valeur de t, on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

et le centre par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{pmatrix}$$

Calculer $\vec{x}(t)$ et $R(t)$ pour $\vec{f}(t) = \vec{x_0} + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

9. Cercle osculateur.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Pour chaque valeur de t, on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

et le centre par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le rayon et le centre du cercle osculateur.

(2) Vérifier les calculs en exécutant avec Octave le script suivant (noter les modifications)

```
clear
nmax=200;
cmax=200;
tmax=4*pi;
#%Coordonnees parametriques de la courbe
function y=f(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
end
#%Formule pour le rayon de courbure
function y=h(t)
  y=?;
end
#%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
function y=g(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
end
clf
for n=1:nmax
  x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
for m=1:cmax
  n=round(m*nmax/cmax);
  x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
  x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
  r(n)=h(n/nmax*tmax);
  h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
  for k=1:200
    c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
    c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
  end
  plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
  title('Courbes du plan et rayon de courbure')
  xlabel('x')
```

```
  ylabel('y')
  axis([-5,5,-2,15],"equal")
  pause(40/1000)
end
```

10. Rayon de courbure.

Soit

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (f_1(t); f_2(t)) \end{array}$$

une fonction deux fois dérivable. Pour chaque valeur de t, on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\vec{F}(t) = \vec{f}(g(t))$. Que se passe-t-il si dans la formule pour $R(t)$ on remplace $\vec{f}$ par $\vec{F}$ (changement de paramétrisation) ? La formule obtenue est-elle différente ?

11. Rayon de courbure.

(1) Trouver une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ représentée sur la figure 1, c'est-à-dire, une fonction $\vec{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\vec{f}([0, 2\pi]) = \mathcal{C}$. Vérifier la solution trouvée en complétant et en exécutant le script suivant:

```
clear
nmax=?;
tmax=?;
function y=f(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
endfunction
for n=0:nmax
  x(n+1)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n+1)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
clf
plot(x,y)
title('Courbes du plan')
grid("on");
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-1,1,-1,1],"equal")
```

(2) Pour une courbe $\mathcal{C}$ du plan, on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

et le centre par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{pmatrix}$$

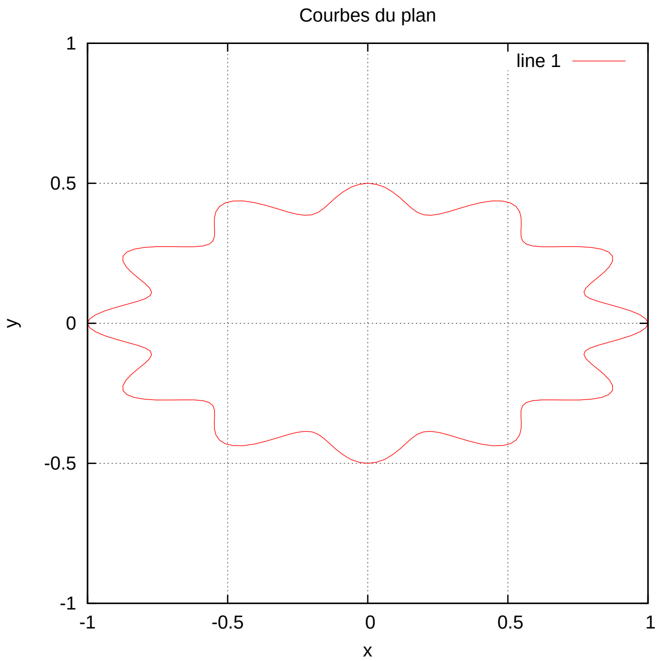

FIGURE 1. Exercice 11

où $\vec{f}$ est une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$. Ces formules dépendent-elles de la paramétrisation $\vec{f}$? **Attention**: Justifier la réponse en remplaçant dans la formule pour $R(t)$ la fonction $\vec{f}$ par $\vec{F}(t) = \vec{f}(g(t))$ où g est une fonction quelconque d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable et dont la dérivée ne s'annule jamais.

(3) Calculer le rayon de courbure et le centre du cercle osculateur pour la courbe $\mathcal{C}$ du point 1 et compléter le script suivant de manière à afficher pour chaque point de la courbe $\mathcal{C}$ le cercle osculateur.

```
clear
nmax=10000;
cmax=200;
tmax=?;
#%Coordonnees parametriques de la courbe
function y=f(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
end
#%Formule pour le rayon de courbure
function y=h(t)
  y=?;
end
#%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
function y=g(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
end
clf
for n=1:nmax
  x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
for m=1:cmax
  n=round(m*nmax/cmax);
```

```
    x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
    x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
    r(n)=h(n/nmax*tmax);
    h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
    h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
    for k=1:200
      c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
      c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
    end
    plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
    title('Courbes du plan et rayon de courbure')
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5],"equal")
    grid("on")
    pause(80/1000)
end
```

12. Rayon de courbure.

(1) Trouver une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$ représentée sur la figure 2, c'est-à-dire, une fonction $\vec{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\vec{f}([0, 2\pi]) = \mathcal{C}$. Vérifier la solution trouvée en complétant et en exécutant le script suivant:

```
clear
nmax=?;
tmax=?;
function y=f(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
endfunction
for n=0:nmax
  x(n+1)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n+1)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
clf
plot(x,y)
title('Courbes du plan')
grid("on");
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-1,1,-1,1],"equal")
```

(2) Pour une courbe $\mathcal{C}$ du plan, on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

et le centre par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{pmatrix}$$

où $\vec{f}$ est une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$. Ces formules dépendent-elles de la paramétrisation $\vec{f}$? **Attention**: Justifier la réponse en remplaçant dans la formule pour $R(t)$ la fonction $\vec{f}$ par $\vec{F}(t) = \vec{f}(g(t))$ où g est une fonction quelconque d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable et dont la dérivée ne s'annule jamais.

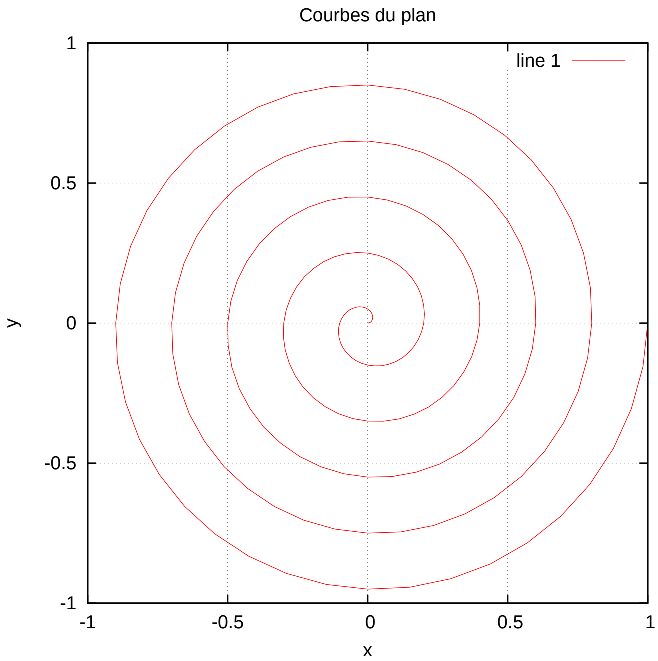

FIGURE 2. Exercice 12

(3) Calculer le rayon de courbure et le centre du cercle osculateur pour la courbe $\mathcal{C}$ du point 1 et compléter le script suivant de manière à afficher pour chaque point de la courbe $\mathcal{C}$ le cercle osculateur.

```
clear
nmax=10000;
cmax=200;
tmax=?;
#%Coordonnees parametriques de la courbe
function y=f(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
end
#%Formule pour le rayon de courbure
function y=h(t)
  y=?;
end
#%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
function y=g(t)
  y(1)=?;
  y(2)=?;
end
clf
for n=1:nmax
  x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
end
for m=1:cmax
  n=round(m*nmax/cmax);
  x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
  x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
  r(n)=h(n/nmax*tmax);
  h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
  h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
  for k=1:200
```

```
      c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
      c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
    end
    plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
    title('Courbes du plan et rayon de courbure')
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    axis([-1.5,1.5,-1.5,1.5],"equal")
    grid("on")
    pause(80/1000)
end
```