Exercices de mathématiques - Corrigé de la série n° **3**

Cours 3PYOS01

1. Un pendule.

(1) La vitesse est donnée par

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \delta)$$

Ainsi,

$$v_0 = v(0) = \omega A \cos(\delta)$$

De plus, la valeur maximale pour x est A. Or $\frac{A}{l} = \sin(\theta_0)$, par conséquent, $A = l \sin(\theta_0)$ et

$$\delta = \arccos\left(\frac{v_0}{\omega l \sin(\theta_0)}\right)$$

(2) La position de l'ombre du cylindre est donnée par (c'est un m.c.u. !)

$$x_c(t) = R \sin(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi\frac{33}{60}$$

Par conséquent, si la longueur du pendule est donnée par

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{60}{33} \;\Rightarrow\; l = 9.8\left(\frac{60}{33 \cdot 2\pi}\right)^2 \approx 82 \text{ cm}$$

il est possible de synchroniser les deux ombres.

2. Tir sur cible tombante.

La bille touche la cible. En effet, notons t_1 le temps mis par la bille pour arriver sous l'électro-aimant:

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} v_0\cos(\alpha)t \\ z_{0B} + v_0\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix},\; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} x_{0C} \\ z_{0C} - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{x_{0C}}{\cos(\alpha)v_0}$$

$$\begin{aligned} z_{0B} + v_0\sin(\alpha)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 &= z_{0B} + v_0\sin(\alpha)\frac{x_{0C}}{\cos(\alpha)v_0} - \frac{1}{2}gt_1^2 \\ &= z_{0B} + \tan(\alpha)x_{0C} - \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad = z_{0C} - \frac{1}{2}gt_1^2 \end{aligned}$$

Ou, plus simplement, dans un référentiel en chute libre:

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} v_0\cos(\alpha)t \\ z_{0B} + v_0\sin(\alpha)t \end{pmatrix},\; \vec{r}_C = \begin{pmatrix} x_{0C} \\ z_{0C} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{x_{0C}}{\cos(\alpha)v_0}$$

$$z_{0B} + v_0\sin(\alpha)t_1 = z_{0B} + \tan(\alpha)x_{0C} = z_{0C}$$

3. Projection.

On a

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ vt \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

(1) la vitesse est donnée par

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R\sin(\omega t) \\ \omega R\cos(\omega t) \\ v \end{pmatrix} \text{ et } v(t) = \sqrt{\omega^2 R^2 + v^2} \approx 2.51 \text{ m/s}$$

(2) et

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R\cos(\omega t) \\ -\omega^2 R\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } a(t) = \omega^2 R = 125 \text{ m/s}^2$$

4. Théorie.

On trouve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v_0}t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ v_{0z}t \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0z} - gt \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$x(t) = v_{0x}t,\ y(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2,\ v_x(t) = v_{0x} \text{ et } v_z(t) = v_{0z} - gt$$

5. Théorie.

En orientant l'axe z parallèlement à $\vec{a}$ et l'axe y perpendiculairement à l'axe z et dans le plan engendré par $\vec{a}$ et $\vec{v_0}$ et en plaçant l'origine en $\vec{r_0}$, l'horaire s'écrit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ v_{0y}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{pmatrix}$$

En posant $x = v_{0x}t$, il vient $t = \frac{x}{v_{0x}}$ et

$$z = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_z t^2 = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} + \frac{1}{2}a_z\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = x\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) + x^2\left(\frac{a_z}{2v_{0x}^2}\right)$$

ce qui correspond à l'équation d'une parabole.

6. Courbure et torsion.

(1) En plaçant l'origine du repère au centre du m.c.u. et l'axe x passant par la position initiale du mobile, l'horaire est donné par (en omettant d'écrire la composante z)

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t) = \vec{a}_\perp(t)$$

Par conséquent,

$$\rho(t) = \frac{\|\vec{v}(t)\|^2}{\|\vec{a}_\perp(t)\|} = \frac{R^2\omega^2}{R\omega^2} = R$$

et donc $\vec{C}_{osc}(t) = \vec{0}$.

(2) Pour calculer la torsion, on considère l'horaire

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{R}t) \\ \sin(\frac{1}{R}t) \end{pmatrix}$$

dont la vitesse est $\|\dot{\vec{r}}(t)\| = 1$. Alors,

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{R}t) \\ \cos(\frac{1}{R}t) \end{pmatrix}, \; \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -\cos(\frac{1}{R}t) \\ -\sin(\frac{1}{R}t) \end{pmatrix}, \; \dddot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} \sin(\frac{1}{R}t) \\ -\cos(\frac{1}{R}t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{R^2}\dot{\vec{r}}(t)$$

On trouve

$$\omega(t) = \frac{\dddot{\vec{r}}(t) \bullet \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right)}{\|\ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = -\frac{1}{R^2}\frac{\dot{\vec{r}}(t) \bullet \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right)}{\|\ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = 0$$

car le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal aux vecteurs.

7. Courbure et torsion.

L'horaire est donné par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ vt \end{pmatrix}$$

La trajectoire est une hélice comme celle de la figure 1 tracée avec le code *Octave* suivant:

```
t=0:0.001:0.5;
R=0.05;
omega=50;
v=0.2;
x=R*cos(omega*t);
y=R*sin(omega*t);
z=v*t;
plot3(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
print gr.png
```

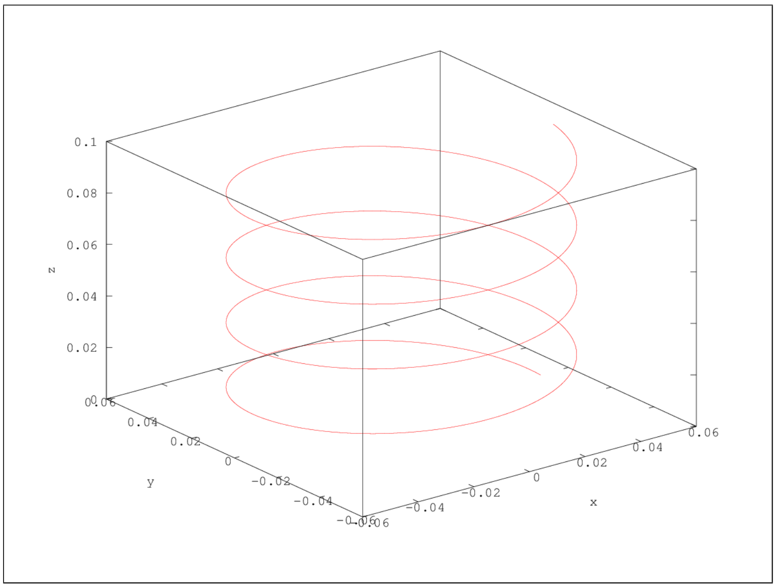

FIGURE 1. Exercice 7.

(1) On trouve

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ v \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t) \\ -R\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On constate que $\vec{a}(t) \bullet \vec{v}(t) = 0$, par conséquent, $\vec{a}_\perp(t) = \vec{a}(t)$ et le rayon de courbure est donné par

$$\rho(t) = \frac{\|\vec{v}(t)\|^2}{\|\vec{a}(t)\|} = \frac{R^2\omega^2 + v^2}{R\omega^2} = \frac{R^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}{R}$$

et la courbure par

$$\kappa = \frac{R}{R^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$$

Remarquons que si $v = 0$, on retrouve les résultats obtenus pour un m.c.u.

(2) On définit

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(t/V) \text{ avec } V = \sqrt{R^2\omega^2 + v^2}$$

Ainsi, en vertu de la règle de dérivation d'une composition,

$$\|\dot{\vec{R}}(t)\| = \|\dot{\vec{r}}(t/V)\frac{1}{V}\| = \frac{V}{V} = 1$$

De plus,

$$\dot{\vec{R}}(t) = \frac{1}{V}\begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t/V) \\ R\omega\cos(\omega t/V) \\ v \end{pmatrix}$$

et

$$\ddot{\vec{R}}(t) = \frac{1}{V^2}\begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t/V) \\ -R\omega^2\sin(\omega t/V) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\dddot{\vec{R}}(t) = \frac{1}{V^3}\begin{pmatrix} R\omega^3\sin(\omega t/V) \\ -R\omega^3\cos(\omega t/V) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il suit que la torsion est donnée par

$$\omega(t) = \frac{\dddot{\vec{R}}(t) \bullet \left(\dot{\vec{R}}(t) \times \ddot{\vec{R}}(t)\right)}{\|\ddot{\vec{R}}(t)\|^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{V^3}\begin{pmatrix} R\omega^3\sin(\omega t/V) \\ -R\omega^3\cos(\omega t/V) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \left(\frac{1}{V}\begin{pmatrix} -R\omega\sin(\omega t/V) \\ R\omega\cos(\omega t/V) \\ v \end{pmatrix} \times \frac{1}{V^2}\begin{pmatrix} -R\omega^2\cos(\omega t/V) \\ -R\omega^2\sin(\omega t/V) \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{\frac{1}{V^4}R^2\omega^4}$$

$$= \frac{V^4}{R^2\omega^4}\frac{1}{V^3}\begin{pmatrix} R\omega^3\sin(\omega t/V) \\ -R\omega^3\cos(\omega t/V) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{V^3}\begin{pmatrix} vR\omega^2\sin(\omega t/V) \\ -vR\omega^2\cos(\omega t/V) \\ R^2\omega^3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{V^4}{R^2\omega^4}\frac{1}{V^6}R^2\omega^5 v = \frac{\omega v}{V^2} = \frac{\omega v}{R^2\omega^2 + v^2} = \frac{\frac{v}{\omega}}{R^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$$

Remarquons que si $v = 0$, on retrouve les résultats obtenus pour un m.c.u.

8. Miroir liquide.

(1) On trouve

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

De plus, en vertu de la deuxième loi de Newton

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{R} = m\begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ g \end{pmatrix}$$

(2) On trouve

$$f'(x) = -\frac{1}{\frac{R_y}{R_x}} = \frac{\omega^2}{g}x$$

(3) f est une parabole, dont l'axe de symétrie passe par le point $(0;0)$. Ainsi, la forme générale de f est

$$f(x) = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$$

(4) On trouve

$$\frac{1}{4\frac{\omega^2}{2g}} = \frac{g}{2\omega^2}$$

9. Vitesse aréolaire.

(1) Par définition,

$$\vec{V}_{areo} = \frac{\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R\cos(\alpha(t)) \\ R\sin(\alpha(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin(\alpha(t))\dot{\alpha}(t) \\ R\cos(\alpha(t))\dot{\alpha(t)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R^2|\dot{\alpha}(t)|}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$V_{areo} = \|\vec{V}_{areo}\| = \frac{R^2\dot{\alpha}(t)}{2}$$

(2) Il suit du point (1) que la vitesse aréolaire est constante si et seulement si

$$\ddot{\alpha}(t) = 0$$

c'est-à-dire, si et seulement si $t \mapsto \alpha(t)$ est une droite:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$$

c'est-à-dire, si et seulement si le mouvement est un MCU.