Exercices de physique - Corrigé de la série n° 2

Cours 3PYOS01

1. Mouvement harmonique.

On a

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.628} \approx 10 \text{ Hz}$$

La condition $x(0) = 0$ implique $\delta = 0$. De plus, $x(1.5) = 20$ cm, donc $A\sin(10 \cdot 1.5) = 20 \Rightarrow A = \frac{20}{\sin(15)} \approx 30.8$ cm.

2. Problème.

(1) On trouve

$$\frac{x(t)^2}{A^2} + \frac{y(t)^2}{B^2} = \sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \Rightarrow y = \pm B\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

(2) La trajectoire est une ellipse dont les demi-axes ont les valeurs A et B.

(3) On trouve

(a) en exécutant le script *Octave* suivant (en utilisant la paramétrisation $\vec{r}(t)$ de la trajectoire)

```
t=0:0.02:0.62;
x=7*sin(10*t);
y=4*cos(10*t);
plot(x,y)
grid('on')
xlabel('x')
ylabel('y')
axis('equal')
title('Parametrisation')
print gr1.png
```

le graphique de gauche sur la figure 1 avec les données

```
octave:10> x
x = 0.00000   1.39069   2.72593   3.95250   5.02149   5.89030   6.52427   6.89815   6.99702
6.81693   6.36508   5.65947   4.72824   3.60851   2.34492   0.98784  -0.40862  -1.78879
-3.09764  -4.28301 -5.29762  -6.10103  -6.66121  -6.95584  -6.97315  -6.71247  -6.18418
-5.40935  -4.41887  -3.25222  -1.95591  -0.5816
y = 4.00000   3.92027   3.68424   3.30134   2.78683   2.16121   1.44943   0.67987  -0.11680
-0.90881  -1.66459  -2.35400  -2.94957   -3.42756  -3.76889  -3.95997  -3.99318  -3.86719
-3.58703  -3.16387 -2.61457  -1.96104  -1.22933  -0.44861   0.35000   1.13465   1.87407
2.53877   3.10226   3.54208   3.84068   3.98617
```

(b) et en exécutant le script *Octave* suivant (en utilisant l'équation de la trajectoire)

```
x=-7:0.1:7;
yp=4*sqrt(1-x.^2/7^2);
ym=-4*sqrt(1-x.^2/7^2);
plot(x,yp,x,ym)
grid('on')
xlabel('x')
ylabel('y')
axis('equal')
title('Equation')
print gr2.png
```

le graphique de droite sur la figure 1.

3. Projection.

On trouve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ vt \end{pmatrix}$$

C'est une hélice comme celle de la figure 2 tracée avec le code *Octave* suivant:

```
t=0:0.001:0.5;
R=0.05;
omega=50;
v=0.2;
x=R*cos(omega*t);
y=R*sin(omega*t);
z=v*t;
plot3(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
print gr.png
```

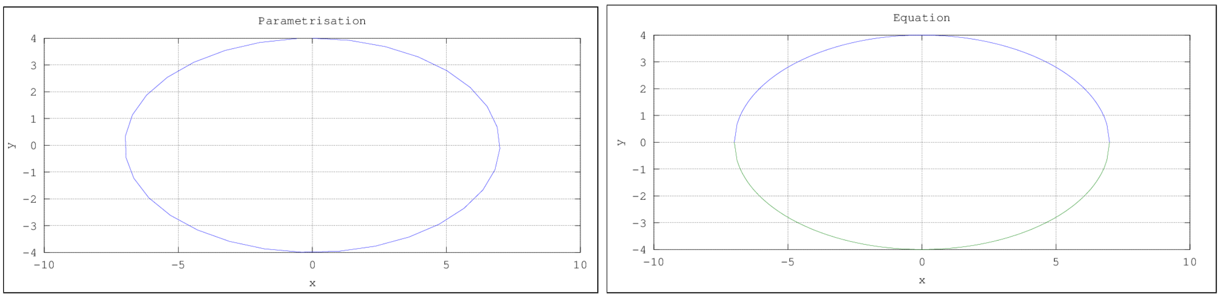

FIGURE 1. Exercice 2

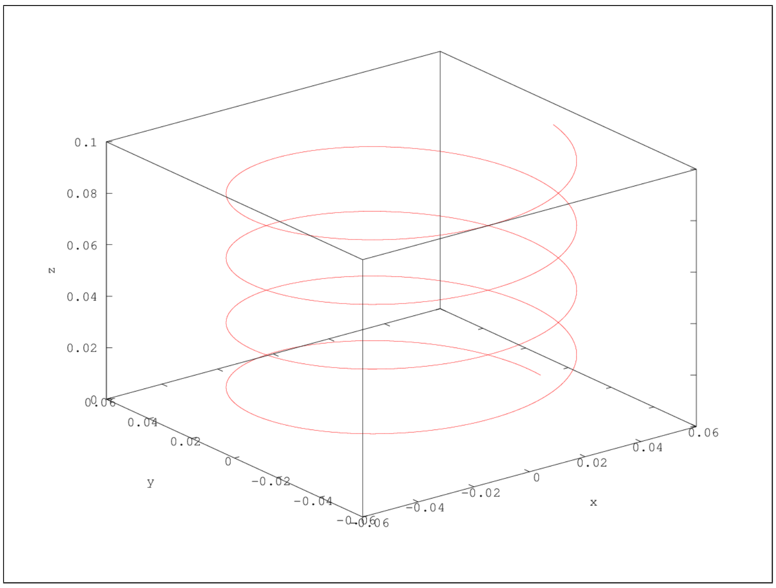

FIGURE 2. Exercice 3.

(1) On trouve

$$\vec{r}(1) = \begin{pmatrix} 0.05\cos(50 \cdot 1) \\ 0.05\sin(50 \cdot 1) \\ 0.2 \cdot 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.82 \text{ cm} \\ -1.31 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

et le nombre de tours vaut: $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \approx 8$ tours.

(2) Le pas est donné par $vT = v\frac{2\pi}{\omega} = 0.2\frac{2\pi}{50} \approx 2.5$ cm

4. Tir oblique.

L'horaire du mouvement est donné par

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ 19.6t - 4.9t^2 \end{pmatrix}$$

(1) En exécutant le script *Octave* suivant:

```
t=0:0.1:4;
x=4*t;
z=19.6*t-4.9*t.^2;
hold('on')
plot(x,z)
t1=[0,1,2,3,4];
x1=4*t1;
z1=19.6*t1-4.9*t1.^2;
vx=4;
vz=19.6-9.8*t1;
quiver(x1,z1,vx,vz,"color","r")
t2=[1,2,3];
x2=4*t2;
z2=19.6*t2-4.9*t2.^2;
ax=0;
az=-9.8;
quiver(x2,z2,ax,az,"color","g")
grid('on')
xlabel('x [m]')
ylabel('z [m]')
axis('equal',[0 16 0 25])
hold('off')
print tirpara.png
```

on obtient le graphique de la figure 3.

(2) On trouve

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 19.6 - 9.8t \end{pmatrix}$$

et

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2} = \sqrt{4^2 + (19.6 - 9.8t)^2}$$

Par conséquent,

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 19.6 \end{pmatrix}, \ \vec{v}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}, \ \vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}(3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -9.8 \end{pmatrix}, \ \vec{v}(4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -19.6 \end{pmatrix},$$

et

$$v(0) = \sqrt{4^2 + 19.6^2} \approx 20 \text{ m/s}, \ v(1) \approx 10.6 \text{ m/s}, \ v(2) = 4 \text{ m/s}, \ v(3) \approx 10.6 \text{ m/s}, \ v(4) \approx 20 \text{ m/s}$$

(3) Voir figure 3.
(4) On trouve

$$v(t) = \sqrt{4^2 + (19.6 - 9.8t)^2} = 15 \ \Rightarrow \ 16 + (19.6 - 9.8t)^2 = 225 \ \Rightarrow \ 19.6 - 9.8t = \pm\sqrt{225 - 16}$$
$$\Rightarrow \ t = \frac{19.6 \mp \sqrt{209}}{9.8} \approx 0.52 \text{ s ou } 3.48 \text{ s}$$

(5) Voir figure 3.

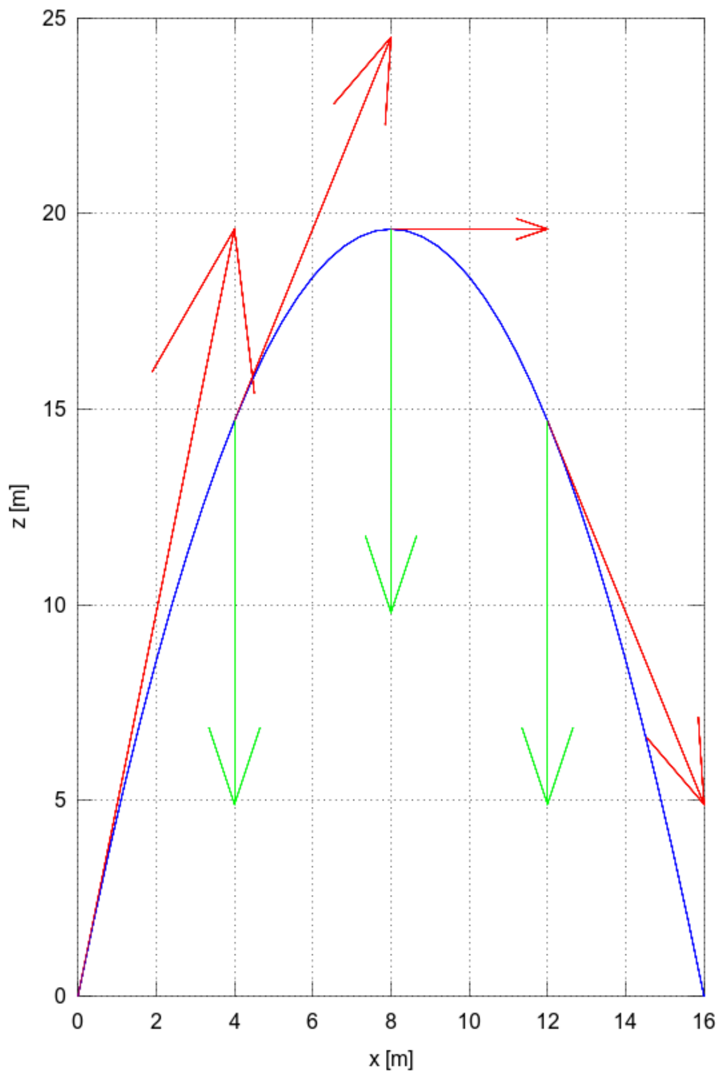

Figure 3. Exercice 4

5. M.C.U..

On a

$$\vec{r}(t) \approx 0.25 \begin{pmatrix} \cos(63t) \\ \sin(63t) \end{pmatrix}$$

(1) La vitesse vaut $\frac{2\pi \cdot 0.25}{T} = 2\pi \cdot 0.25 \cdot 10 \approx 15.7$ m/s. Elle est constante.

(2) On trouve

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = 0.25 \begin{pmatrix} -63\sin(63t) \\ 63\cos(63t) \end{pmatrix} = 15.75 \begin{pmatrix} -\sin(63t) \\ \cos(63t) \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\vec{v}(0.08) = 15.75 \begin{pmatrix} -\sin(63 \cdot 0.08) \\ \cos(63 \cdot 0.08) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 14.9 \text{ m/s} \\ 5.1 \text{ m/s} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(0.14) \approx \begin{pmatrix} -9.0 \text{ m/s} \\ -13 \text{ m/s} \end{pmatrix}$$

(3) On trouve

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = 0.25 \cdot 63 \begin{pmatrix} -63\cos(63t) \\ -63\sin(63t) \end{pmatrix} = -63^2\vec{r}(t) = -\omega^2\vec{r}(t) \approx -992 \begin{pmatrix} -\cos(63t) \\ -\sin(63t) \end{pmatrix}$$

et $a(t) = \|\vec{a}(t)\| = R\omega^2 \approx 992$ m/s^2 soit environ 100 "g".

6. Mouvement harmonique.

L'horaire d'un mouvement harmonique est (par exemple)

$$x(t) = A\sin(\omega t) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

sa vitesse est donnée par

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t)$$

et son accélération vaut

$$a(t) = \dot{v}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$$

(1) La valeur absolue de la vitesse est maximale pour $\omega t = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dans ce cas $\cos(\omega t)$ vaut ± 1. Il faut donc résoudre l'équation

$$A\omega = 5 \ \Rightarrow \ A = \frac{5}{\omega} = \frac{5}{2\pi}T = \frac{1.5}{2\pi} \approx 0.24\ m = 24\ cm$$

(2) Il faut résoudre l'équation

$$A\omega^2 = 98 \ \Rightarrow \ A = \frac{98}{\omega^2} = \frac{98}{4\pi^2}T^2 = \frac{98}{4\pi^2}0.3^2 \approx 0.22\ m = 22\ cm$$

7. Problème.

(1) On trouve

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} A\omega\cos(\omega t) \\ -B\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix} \text{ et } v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \omega\sqrt{A^2\cos(\omega t)^2 + B^2\sin(\omega t)^2}$$

Par conséquent,

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} A\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \text{ m/s} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}(T/8) = \begin{pmatrix} A\omega\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -B\omega\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.49 \text{ m/s} \\ -0.28 \text{ m/s} \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}(T/4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -B\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.4 \text{ m/s} \end{pmatrix}$$

et

$$v(0) = A\omega = 0.7 \text{ m/s}, \ v(T/8) = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{A^2 + B^2} \approx 0.57 \text{ m/s}, \ v(T/4) = B\omega = 0.4 \text{ m/s}$$

(2) On trouve

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} -A\omega^2\sin(\omega t) \\ -B\omega^2\cos(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} A\sin(\omega t) \\ B\cos(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}(t)$$