Exercices de physique - Corrigé de la série n° **1**

Cours 3PYOS01

1. Deux trains.

Pour repérer la position des trains, choisissons un zéro: Genève. De plus, choisissons d'enclencher le chronomètre à 12h10. Donc le temps t mesure le temps écoulé depuis 12h10. Par conséquent, l'horaire de l'InterCity est donné par $x_A(t) = X_{0A} + 160t = \frac{160}{6} + 160t$ (car à 12h10, l'InterCity est à $160 \cdot \frac{1}{6}$ km de Genève) et celui de l'InterRegion par $x_B(t) = X_{0B} + 80t = 30 + 80t$ (car la gare de Gland est à environ 30 km de la gare Cornavin). L'InterCity rattrape l'InterRegion après un temps t qui est solution de l'équation

$$\frac{160}{6} + 160t = 30 + 80t \;\Rightarrow\; 80t = \frac{20}{6} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{24}\text{ h} = 2'30''$$

c'est-à-dire à 12h12'30" et à

$$30 + 80 \cdot \frac{1}{24} \approx 33 \text{ km}$$

de Genève, soit proche de Bursins. Les horaires sont représentés sur la figure 1.

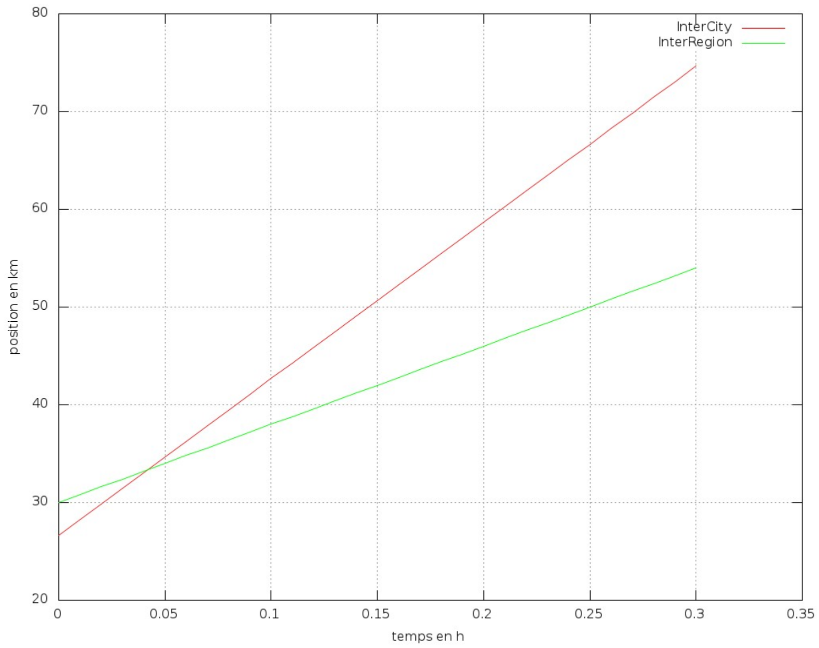

FIGURE 1. Exercice 1
print ex.jpg

2. Billes.

On a $x_{B1}(t) = 300 - \frac{1}{2}9.8t^2$ et $v_{B1}(t) = -9.8 \cdot t$.

(1) $x_{B1}(3) = 255.9$ m

(2) $v_{B1}(t_1) = -60 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{-60}{-9.8}$ s et $x_{B1}(t_1) = 300 - \frac{1}{2}9.8\left(\frac{60}{9.8}\right)^2 \approx 116.3$ m.

On trouve $x_{B1}(t_2) = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = \sqrt{\frac{2\cdot 300}{9.8}} \approx 7.8$ s. Donc au moment où la première bille touche le sol, la deuxième est à une altitude de

$$x = 300 - \frac{1}{2}9.8\left(\sqrt{\frac{2\cdot 300}{9.8}} - 1\right)^2 \approx 71.8 \text{ m}$$

3. Un projectile.

(1) On a $v_P(t) = v_0 - 9.8 \cdot t$, par conséquent, $0 = v_0 - 9.8 \cdot 3 \;\Rightarrow\; v_0 = 29.4$ m/s.

(2) $gh = \frac{1}{2}v_0^2 \;\Rightarrow\; h = \frac{\frac{1}{2}v_0^2}{9.8} = 44.1$ m

(3) La vitesse à l'arrivée est égale à v_0.

4. Une pierre.

On a ($g = 9.8$ m/s^2, $v_0 = 29.4$ m/s)

$$x_{P1}(t) = v_0t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$x_{P2}(t) = -\tfrac{1}{2}g(t-4)^2$$

et

$$x_{P1}(t) = x_{P2}(t) \;\Rightarrow\; v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g(t-4)^2 \;\Rightarrow\; v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}8gt - \frac{1}{2}g16$$
$$\Rightarrow\; v_0t = 4gt - 8g \;\Rightarrow\; t = \frac{8g}{4g - v_0} == \frac{8g}{4g - 3g} = 8 \text{ s}$$

soit 4 secondes exactement après qu'on ait lâché la deuxième pierre.

5. Tir oblique.

(1) On a

$$v_{0x} = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s et } v_y = v_{0y} - gt \;\Rightarrow\; 0 = v_{0y} - 9.8\cdot 2 \;\Rightarrow\; v_{0y} = 19.6 \text{ m/s}$$
$$\Rightarrow\; \vec{v_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ 19.6 \end{pmatrix} \text{ et } v_0 = \|\vec{v_0}\| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{4^2 + 19.6^2} \approx 20 \text{ m/s}$$

(2) $\tan(\alpha) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \;\Rightarrow\; \alpha = \arctan\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) = \arctan\left(\frac{19.6}{4}\right) = \arctan(4.9) \approx 78.5\,°$

(3) $y_{max} = v_{0y}2 - \frac{1}{2}9.8\cdot 2^2 = 19.6\cdot 2 - 2\cdot 9.8 = 19.6$ m

(4) On trouve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t \\ v_{0y}t - \frac{1}{2}9.8\cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 19.6t - 4.9t^2 \end{pmatrix}$$

(5) On a

$$x = 4t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{4} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{19.6}{4}x - \frac{1}{2}9.8\frac{x^2}{16} \;\Rightarrow\; y = 4.9x - 0.30625x^2$$

(6) On a

$$\vec{r}(3) = (4 \cdot 3; 19.6 \cdot 3 - 4.9 \cdot 3^2) = (12; 14.7) \text{ et } \|\vec{r}(3)\| = \sqrt{12^2 + 14.7^2} \approx 19.0 \text{ m}$$

6. Base-ball.

(1) On trouve

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{pmatrix} \cos(30)15t \\ 0.9 + \sin(30)15t - \frac{1}{2}9.8t^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 13t \\ 0.9 + 7.5t - 4.9t^2 \end{pmatrix}$$

(2) On trouve

$$\vec{r}_B(0.5) \approx \begin{pmatrix} 6.5 \\ 3.4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{r}_B(1) \approx \begin{pmatrix} 13 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

(3) On trouve

$$\vec{r}_J(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t = \begin{pmatrix} 25 - vt \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) On trouve

$$y_B(t) = 2.4 \Rightarrow 0.9 + 7.5t - 4.9t^2 = 2.4 \Rightarrow 4.9t^2 - 7.5t + 1.5 = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{7.5 \pm \sqrt{7.5^2 - 4 \cdot 4.9 \cdot 1.5}}{9.8} \Rightarrow t_1 \approx 0.24 \text{ et } t_2 \approx 1.30 \text{ s}$$

et

$$x_B(t_1) \approx 3.12 \text{ m et } x_B(t_2) \approx 16.9 \text{ m}$$

Il y a donc deux solutions pour la vitesse v:

$$25 - vt_1 = x_B(t_1) \Rightarrow v = \frac{25 - x_B(t_1)}{t_1} = \frac{25 - 13t_1}{t_1} \approx 91.2 \text{ m/s} \approx 328 \text{ km/h !}$$

$$\text{et } 25 - vt_2 = x_B(t_2) \Rightarrow v = \frac{25 - 13t_2}{t_2} \approx 6.2 \text{ m/s} \approx 22 \text{ km/h}$$

Conclusion, si le joueur court à environ 22 km/h, il attrape la balle à 16.9 m du premier joueur quand elle est à 2.4 m de hauteur.

7. Mouvement parabolique.

On a

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)v_0 t \\ \sin(\alpha)v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

(1) On note T le temps nécessaire pour atteindre le point P:

$$\sin(\alpha)v_0 T - \frac{1}{2}gT^2 = 0 \Rightarrow T = \frac{2\sin(\alpha)v_0}{g}$$
$$\Rightarrow P = x_1(T) = \cos(\alpha)v_0 \frac{2\sin(\alpha)v_0}{g} = \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)v_0^2}{g} = \frac{\sin(2\alpha)v_0^2}{g}$$

(2) La hauteur maximale est atteinte quand:

$$\frac{d}{dt}\left(\sin(\alpha)v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right) = \sin(\alpha)v_0 - gt = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\sin(\alpha)v_0}{g} = \frac{T}{2}$$

et elle vaut

$$h_{max} = y(T/2) = \sin(\alpha)v_0\frac{T}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$= \sin(\alpha)v_0\frac{\sin(\alpha)v_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\sin(\alpha)v_0}{g}\right)^2 = \frac{\sin(\alpha)^2v_0^2}{g} - \frac{\sin(\alpha)^2v_0^2}{2g}$$

$$\Rightarrow\; h_{max} = \frac{\sin(\alpha)^2v_0^2}{2g}$$

(3) La valeur de $\sin(2\alpha)$ est maximale pour $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45,^\circ$$

On peut aussi dériver P par rapport à α:

$$\frac{dP}{d\alpha} = \frac{\cos(2\alpha)2v_0^2}{g} = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{4}$$

On a

$$P_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

(4) On a

$$25 = \frac{\sin(2\alpha)22^2}{9.8} \;\Rightarrow\; \sin(2\alpha) = \frac{25\cdot 9.8}{22^2} \Rightarrow\; 2\alpha = \arcsin\left(\frac{25\cdot 9.8}{22^2}\right) + 2k\pi$$

$$\text{et}\;\; 2\alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{25\cdot 9.8}{22^2}\right) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow\; \alpha \approx 15.2^\circ \text{ (tire “tendu”) et } \alpha \approx 74.8^\circ \text{ (tire en “cloche”)}$$

8. MCU.

(1) On trouve $\omega = 2\pi\nu$ où $\nu = \frac{1}{T} = 10\ \text{s}^{-1} = 10$ Hz, donc $\omega \approx 63$ rad/s.

(2) On trouve

$$\vec{r}(t) \approx \begin{pmatrix} R\cos(\underbrace{63t}_{\text{en rad}}) \\ R\sin(63t) \end{pmatrix}$$

(3) On trouve

$$\vec{r}(0.08) \approx \begin{pmatrix} 0.25\cos(63\cdot 0.08) \\ 0.25\sin(63\cdot 0.08) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.08\ \text{m} \\ -0.24\ \text{m} \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{r}(0.14) \approx \begin{pmatrix} 0.25\cos(63\cdot 0.14) \\ 0.25\sin(63\cdot 0.14) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.21\ \text{m} \\ 0.14\ \text{m} \end{pmatrix}$$

et le nombre de tours après 0.14 s est donné par $\frac{\omega t}{2\pi} = \frac{t}{T} = t\nu = 1.4$.

(4) La trajectoire est le cercle $\{(x;y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$. On a $0.1^2 + 0.2^2 = 0.05 \neq R^2 = 0.0625$ m^2, par conséquent, le point $(0.1; 0.2)$ ne fait pas partie de la trajectoire.

(5) On a $x^2 + 5^2 = 25^2 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{25^2 - 5^2} = \pm\sqrt{600} = \pm 10\sqrt{6} \approx \pm 24.5$ cm.