Opérations sur les fonctions

Remarque :

Dans cet atelier nous ne nous occuperons pas des domaines de définition des différentes fonctions.

Il s'agit uniquement de comprendre et d'appliquer les différentes opérations.

Opérations de base sur les fonctions :

Soient les fonctions f, g, h, j et k données par :

$$f(x) = -x^2 + 3x - 4 \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = x^2 + 7 \qquad j(x) = x - 1 \qquad k(x) = \sqrt{x}$$

Donner intuitivement un sens aux fonctions suivantes :

$$u_1 = f + h \qquad u_2 = 3h - j \qquad u_3 = g \cdot j \qquad u_4 = \frac{k}{h} \qquad u_5 = \frac{f \cdot j}{g - k}$$

Pour cela compléter (simplifier au maximum) :

$u_1(x) = (f + h)(x) =$

$u_2(x) = (3h - j)(x) =$

$u_3(x) = (g \cdot j)(x) =$

$u_4(x) = \left(\frac{k}{h}\right)(x) =$

$u_5(x) = \left(\frac{f \cdot j}{g - k}\right)(x) =$

Compositions de fonctions :

On introduit maintenant une nouvelle opération sur les fonctions, la composition, qui consiste à prendre le résultat fourni par une première fonction et de le donner comme argument à une deuxième fonction.

Soient f et g deux fonctions

On définit la fonction composée $h = g \circ f$ (on lit "g rond f") par

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple :

Soit f, donnée par $f(x) = x^2 + 1$ et g par $g(x) = 2x - 3$.

Alors la fonction $h = g \circ f$ est donnée par :

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(x^2 + 1\right) = 2 \cdot \left(x^2 + 1\right) - 3 = 2x^2 + 2 - 3 = 2x^2 - 1$$

Et la fonction $j = f \circ g$?

$$j(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) =$$

Remarque :

On peut conclure de cet exemple que l'opération de composition n'est pas

Exercices : (Source : sesamath.ch/manuel-matugym-2e/version-2013-15/pdf/ma2-ch06-composees-et-reciproques/at_download/file)

1. Soient f, g et h définies par : $f(x) = 3x + 1$ $\quad g(x) = x^2 - 2$ $\quad h(x) = \dfrac{3x}{x-2}$
   Déterminer les expressions algébriques qui définissent les fonctions :

   (a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$ (e) $f \circ h$ (f) $h \circ f$ (g) $h \circ h$ (h) $h \circ f \circ g$

2. Pour chacune des fonctions h suivantes, trouver deux fonctions f et g telles que leur composée $g \circ f$ soit la fonction h donnée (sans utiliser la fonction identité $id(x) = x$)

   (a) $h(x) = \dfrac{1}{x-5}$ (b) $h(x) = \sqrt{7-x}$ (c) $h(x) = \sqrt{x} + 3$

3. Ecrire chacune des fonctions f suivantes comme la composée de quatre fonctions (sans utiliser la fonction identité $id(x) = x$)

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$ (b) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{3+\sqrt{x+9}}$

4. Si $f(x) = 3x + 5$ et $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, trouver une fonction g telle que $f \circ g = h$.
5. Si $f(x) = x + 4$ et $h(x) = 4x - 1$, trouver une fonction g telle que $g \circ f = h$.