1 Nombres naturels : $\mathbb{N}$

L'ensemble des nombres naturels est noté $\mathbb{N}$ (on l'appelle aussi l'ensemble des entiers naturels) :

Les opérations internes aux nombres naturels sont :

Les opérations qui posent problème sont :

2 Nombres entiers : $\mathbb{Z}$

L'ensemble des nombres entiers est noté $\mathbb{Z}$ (on l'appelle aussi l'ensemble des entiers relatifs) :

Introduire les nombres entiers négatifs implique une gestion du signe pour les différentes opérations :

Les opérations internes aux nombres entiers sont :

Les opérations qui posent problème sont :

3 Nombres rationnels : $\mathbb{Q}$

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$:

On garde la même gestion des signes que pour les entiers et on définit l'addition/la soustraction/la multiplication et la division de fractions.

Comme il existe plusieurs façons d'écrire un même nombre sous forme de fraction, on introduit la notion de **simplification** d'une fraction permettant d'aboutir à une **fraction irréductible**.

Le processus contraire, l'**amplification**, s'utilise par exemple pour obtenir une fraction avec un dénominateur bien choisi, notamment pour pouvoir additionner deux fractions.

En dehors de la division par le nombre 0 (qui n'est pas définie), les "quatre opérations de base" (addition, soustraction, multiplication et division) sont internes à l'ensemble $\mathbb{Q}$ et on a les propriétés suivantes :

3.1 Propriétés de l'addition :

l'addition est associative :

l'addition est commutative :

0 est l'élément neutre pour l'addition :

chaque nombre rationnel possède un opposé pour l'addition :

3.2 Propriétés de la multiplication :

la multiplication est associative :

la multiplication est commutative :

1 est l'élément neutre pour la multiplication :

chaque nombre rationnel non nul possède un inverse pour la multiplication :

0 est l'élément absorbant pour la multiplication :

propriété du 0 :

Soustraction et division :

On ne mentionne ici nulle part ni la soustraction, ni la division car :
soustraire un nombre revient à ajouter son opposé :

diviser par un nombre (non nul) revient à multiplier par son inverse :

3.3 Priorité des opérations :

Particularité : la barre de fraction

3.4 Distributivité/mise en évidence :

simple distributivité (dans l'autre sens : mise en évidence)

double distributivité (dans l'autre sens : mise en évidence)

4 Exercices

1. Calculer (réponse sous forme réduite : nombre sous forme de fraction irréductible ou en écriture décimale exacte)
   (a) $-3.4+(-4.7)$
   (b) $13.8-(-24.5)$
   (c) $54-63-11+73-108$
   (d) $-4.16+0.97+10.16-1$
   (e) $(-6)\cdot(+7)$
   (f) $(-156):(-8)$
   (g) $(-1)\cdot(+1)\cdot(+1)\cdot(-1):((-1)\cdot(+1))$
   (h) $(-2)\cdot(+2)\cdot(+2)\cdot(-2):((-2)\cdot(+2))$
   (i) $17.4-(7.4-12.1)$
   (j) $-56+7\cdot 12$
   (k) $(-4.5-9.9):(-5.8+7)$
   (l) $4.73\cdot 2-6\cdot(2+2.73)-(-14+20)\cdot 4.73$

2. Transformer en fractions irréductibles.
   (a) 0.35
   (b) $0.\overline{7}$
   (c) 8
   (d) $1.\overline{21}$
   (e) $4.\overline{457}$
   (f) $3.12\overline{47}$
   (g) $-3.12\overline{47}$
   (h) $7.\overline{9}$

3. Calculer (réponses sous forme de fractions irréductibles).
   (a) $\frac{7}{240}-\frac{13}{360}+\frac{17}{300}$
   (b) $\frac{252}{752}\cdot\frac{94}{49}$
   (c) $\frac{7}{5}:\frac{35}{25}$
   (d) $\left(\frac{6}{17}-\frac{9}{2}\right)\cdot\frac{34}{3}$
   (e) $\left(\frac{6}{17}-\frac{9}{2}\right):\frac{34}{3}$
   (f) $\frac{\frac{1}{2}}{3}$
   (g) $\frac{1}{\frac{2}{3}}$
   (h) $-\frac{5}{3}:\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{2}{7}}$
   (i) $\frac{\left(-\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}}{-\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)}$

4. Modifier les notations suivantes afin d'échanger les notations pour l'opération de division (barre de fraction à la place de ":" ou vice-versa).
   (a) $48+3:2-1$
   (b) $2-\frac{7+1}{4-10}$
   (c) $\frac{(5+431):(4+38)}{7:(57-3)}$

5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier si elles sont vraies, donner un contre-exemple sinon.
   (a) $(a+b):c=a:c+b:c$
   (b) La soustraction est une opération associative.
   (c) $(a+b):(c+d)=a:c+a:d+b:c+b:d$
   (d) La division est une opération commutative.

5 Décomposition en facteurs premiers, pgdc, ppmc

Pour travailler (entre autres) avec des fractions, quelques rappels sur les décompositions en facteurs premiers, le pgdc et le ppmc sont utiles.

Définition :

Un entier naturel est appelé **nombre premier** s'il possède exactement deux diviseurs entiers positifs.

Pour un nombre entier supérieur à 1, cela revient à demander qu'il ne soit divisible que par 1 et lui-même.

Définition :

Pour obtenir la **décomposition en facteurs premiers** d'un entier naturel a, on l'écrit comme produit de nombres premiers. (Pour faciliter la lecture de cette décomposition, on groupe souvent les facteurs par ordre croissant.)

Définition :

Le **pgdc** de deux entiers naturels ou plus est le plus grand diviseur commun de ces nombres.

Le pgdc divise donc chacun de ces nombres et c'est le plus grand nombre possédant cette propriété.

Définition :

Le **ppmc** de deux entiers naturels ou plus est le plus petit multiple commun de ces nombres.

Le ppmc est donc multiple de chacun des nombres et c'est le plus petit nombre possédant cette propriété.

6 Exercices

1. Déterminer la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants

   (a) 345
   (b) 219
   (c) 1987
   (d) 1024
   (e) 688
   (f) 8190

2. Calculer le pgdc et le ppmc des nombres suivants

   (a) 225 et 105
   (b) 345 et 219
   (c) 12, 18 et 21
   (d) 345, 688 et 8190

3. Christelle et Cyril font des tours de stade. Christelle fait un tour en 54 minutes et Cyril en 72 minutes. Quel sera le temps minimal jusqu'à ce qu'ils se croisent de nouveau sur la ligne de départ s'ils commencent la course au même moment ?

7 Puissances et racines

Dans quel sens peut-on dire que les puissances constituent un "raccourci de la multiplication" ?

Que signifie prendre la racine carré, cubique, quatrième, etc. d'un nombre ?

Quelles règles de calcul connaissez-vous pour les puissances ?

Que signifient des puissances négatives ?

Que signifient des puissances rationnelles ?

Les puissances et racines ont la priorité sur la multiplication (et la division), ainsi que sur l'addition (et la soustraction).

Les puissances et racines se distribuent sur la multiplication (et la division) mais pas sur l'addition (ni sur la soustraction).

Les règles de calcul pour les puissances et racines, déjà discutées, sont les suivantes :

Pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $m, n \in \mathbb{N}$

Si $a \neq 0$, alors $\quad a^0 = 1$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

8 Exercices

1. Simplifier au maximum :

(a) $\dfrac{4 \cdot 10^2 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^8}$

(b) $\dfrac{12 \cdot 10^2 \cdot (10^3)^2}{(2 \cdot 10)^2}$

(c) $\dfrac{0.01 \cdot 10^6 \cdot 400}{(20 : 5)^2}$

(d) $\dfrac{14^3 \cdot 15^5}{25^5 \cdot 28^4}$

(e) $\dfrac{(2^4 \cdot 15^3)^2}{5^8 \cdot 7^2 \cdot 12^6}$

(f) $\dfrac{8 \cdot 5^7 - 5^8}{5^8 \cdot 2^6}$

(g) $\dfrac{9^{91} \cdot 11^8}{99^9 \cdot (9^9)^9}$

(h) $\dfrac{2^{15} \cdot 10^7 \cdot 5^{13}}{10^{20}}$

(i) $\dfrac{4^{14} : 2 + 2^{26} \cdot 2}{16 \cdot 6 \cdot 2^2}$

(j) $\dfrac{6^5 \cdot 7^6 \cdot 8^7 \cdot 9^8}{21^5 \cdot 2^{12} \cdot 14}$

2. Simplifier au maximum :

(a) $\sqrt{180}$

(b) $\sqrt[3]{16}$

(c) $\sqrt{(-9)^2}$

(d) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

(e) $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2}$

(f) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) \cdot (5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$

3. Déterminer le chiffre des unités de 2^{100}.

9 Nombres réels : $\mathbb{R}$

Pour compléter notre liste d'ensembles (jusqu'en 4ème année du moins) nous introduisons l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$

Il contient :

Nous avons par exemple "deviné" que les racines (carrées ou aussi autres) de certains nombres n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$, càd ne peuvent pas être écrites sous forme d'une fraction. A titre d'exemple, démontrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel :

Théorème :

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration :

Exercice :

Démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Pour les plus téméraires : démontrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.

Table des matières

Sources

1. *Formulaires et tables, Mathématiques, Physique, Chimie*
2. Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2000
3. *Lambacher Schweizer 10, Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium Ausgabe Baden-Württemberg*, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart, 1996
4. Cours de J.-M. Bacchiocchi, D. Bopp, M. Ducommun, C. Magnon