1. Skalarprodukt : Definition und Eigenschaften (Beweis), Winkel zwischen zwei Vektoren (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett” des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Definition :

Das **Skalarprodukt** ist eine Abbildung die zwei Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ eine reelle Zahl zuordnet.
Für die Koordinatenschreibweise in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ ist das Skalarprodukt jeweils gegeben durch

$$\begin{array}{lll} \text{in } \mathbb{R}^2: & \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 & \text{für } \overrightarrow{a} = (a_1; a_2)^t \text{ und } \overrightarrow{b} = (b_1; b_2)^t \\ \text{in } \mathbb{R}^3: & \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & \text{für } \overrightarrow{a} = (a_1; a_2)^t \text{ und } \overrightarrow{b} = (b_1; b_2)^t \end{array}$$

Eigenschaften : (mit Beweis)

Die Beweise werden in $\mathbb{R}^2$ geführt, sind aber für $\mathbb{R}^3$ analog.

$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a}$: $\quad \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a}$

$\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{b}$:

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) &= (a_1 - b_1)(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)(a_2 - b_2) \\ &= a_1 a_1 - 2 a_1 b_1 + b_1 b_1 + a_2 a_2 - 2 a_2 b_2 + b_2 b_2 \\ &= a_1 a_1 + a_2 a_2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + b_1 b_1 + b_2 b_2 \\ &= \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|^2$: $\quad \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2$

Satz :

Gegeben sind zwei Vektoren $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Stellt man sie mit demselben Fusspunkt dar, dann erfüllt der Winkel φ den sie (von $\overrightarrow{a}$ nach $\overrightarrow{b}$ gedreht) bilden :

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|}$$

Beweis :

Wegen $\cos(360° - \alpha) = \cos(\alpha)$ und $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a}$, reicht es den Beweis für Winkel zwischen 0° und 180° zu führen.
Es gilt : (bitte graphisch illustrieren !)

$$\begin{aligned} &\left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \cos(\varphi) \\ &\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \cos(\varphi) \\ &\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} - 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \left\|\overrightarrow{b}\right\|^2 - 2 \cdot \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \cos(\varphi) \\ &-2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) = -2 \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \cos(\varphi) \\ &\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cdot \cos(\varphi) \\ &\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \cdot \left\|\overrightarrow{b}\right\|} \end{aligned}$$

2. Eindeutigkeit des Grenzwertes für $x \to \pm\infty$ (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett” des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Wenn er in $\mathbb{R}$ existiert, ist der Grenzwert einer Funktion f für $x \to +\infty$ eindeutig bestimmt.
Eine analoge Aussage gilt für $x \to -\infty$.

Beweis :

Ad absurdum : angenommen $L_1 < L_2$ sind beide Grenzwert von $f(x)$ für $x \to +\infty$.
Dies würde bedeuten :

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists M_1 \in \mathbb{R}, \text{ so dass } x > M_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists M_2 \in \mathbb{R}, \text{ so dass } x > M_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon_2$$

Für $x > max\{M_1; M_2\}$ hätte man dann : (eine Illustration kann hilfreich sein)

$$f(x) \in \left]L_1 - \varepsilon_1; L_1 + \varepsilon_1\right[\qquad \text{und} \qquad f(x) \in \left]L_2 - \varepsilon_2; L_2 + \varepsilon_2\right[$$

Sei $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{L_2 - L_1}{2}$, dann folgt :

$$f(x) \in \left]L_1 - \frac{L_2 - L_1}{2}; L_1 + \frac{L_2 - L_1}{2}\right[\quad \text{und} \quad f(x) \in \left]L_2 - \frac{L_2 - L_1}{2}; L_2 + \frac{L_2 - L_1}{2}\right[$$

Also :

$$f(x) \in \left]\frac{3L_1 - L_2}{2}; \frac{L_1 + L_2}{2}\right[\quad \text{und} \quad f(x) \in \left]\frac{L_1 + L_2}{2}; \frac{3L_2 - L_1}{2}\right[$$

Hieraus folgt, dass $f(x)$ gleichzeitig folgende Ungleichungen erfüllen müsste :

$$f(x) < \frac{L_1 + L_2}{2} \qquad \text{und} \qquad f(x) > \frac{L_1 + L_2}{2}$$

Dies stellt einen Widerspruch dar, da f eine Funktion ist.
Die absurde Annahme muss also verworfen werden.

Der Beweis für $x \to -\infty$ ist analog zu führen : statt mit $x > M_{1/2}$ arbeitet man mit $x < m_{1/2}$ und statt $x > max\{M_1; M_2\}$ benutzt man $x < min\{m_1; m_2\}$. Der Rest bleibt unverändert.

3. Satz : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = ?$ (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett” des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz : $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Beweis :

Die Funktion gegeben durch $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ ist gerade.

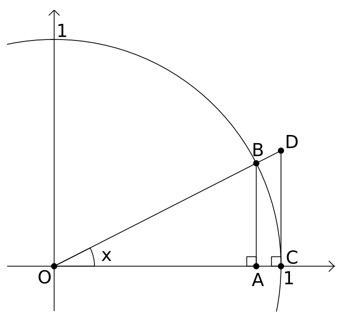
Es reicht deshalb zu beweisen, dass $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ ist.

Dafür vergleicht man Flächeninhalte im trigonometrischen Einheitskreis :

Für $x > 0$ aber nah bei 0 gilt :

Fläche $\Delta OAB <$ Fläche des Kreissektors $OCB <$ Fläche ΔOCD

$$\frac{OA \cdot AB}{2} < \frac{x}{2} < \frac{OC \cdot CD}{2}$$



$$OA \cdot AB < x < OC \cdot CD$$

$$\cos(x) \cdot \sin(x) < x < 1 \cdot \tan(x)$$

$$\cos(x) \cdot \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\frac{1}{\cos(x)} > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Aus : $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\cos(x)} = 1$ folgt dann : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

4. Präsentation der Definition der Ableitung an einer Stelle, Herleitung der Gleichung der Tangente

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Definition : (graphisch illustrieren !)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und f eine Funktion, die in einem Intervall um a und auch in a selbst definiert ist.
Die Funktion f heisst an der Stelle a **ableitbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Wenn ja schreibt man

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

und nennt $f'(a)$ (sprich : „f Strich von a ...") die **(erste) Ableitung** von f **an der Stelle** a.

Eine andere (äquivalente) Schreibweise ist

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tangente :

Sei eine Funktion f, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$.
Die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f an der Stelle $x = a$ ist gegeben durch :

$$y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Herleitung :

Die Gleichung einer Geraden (Funktion) hat allgemein die Form: $y = mx + h$

Die Tangente an der Stelle a hat eine Steigung von $f'(a)$. Daher ist : $m = f'(a)$

Die Tangente geht an der Stelle a durch den Punkt $(a; f(a))$. Daraus folgt :

$$f(a) = m \cdot a + h$$
$$f(a) = f'(a) \cdot a + h$$
$$h = f(a) - f'(a) \cdot a$$

Also ist die Gleichung der gesuchten Tangente gegeben durch :

$$y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a \qquad \Leftrightarrow \qquad y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

5. Zusammenhang zwischen Ableitbarkeit und Stetigkeit (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz : Wenn eine Funktion f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ ableitbar ist, dann ist sie auch in a stetig.

Beweis :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) + \lim_{x \to a} f(a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + \lim_{x \to a} f(a) \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

6. Produktregel der Ableitung (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett” des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Gegeben sind f und g, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$.
Dann ist die Funktion $f \cdot g$ in a ableitbar und es gilt :

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Beweis :

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) \right) + \lim_{x \to a} \left(f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)
\end{aligned}$$

7. Ableitung von x^n, $n \in \mathbb{N}^*$ (Induktionsbeweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz : Für $n \in \mathbb{N}^*$ gilt : $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad (*)$

Beweis :

Induktionsanfang :

Bemerkung : wir kümmern uns nicht um die für $n = 1$ etwas problematische Stelle $x = 0$.

Sei $n = 1$: dann ist $f(x) = x^1 = x$. Daraus folgt : $f'(x) = 1$

Die Aussage $(*)$ ist also (zumindest für $x \neq 0$) korrekt : $1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \surd$

Induktionsschritt :

Induktionsannahme : die Aussage $(*)$ ist für $n = k$ korrekt.

Daraus folgt für $n = k + 1$:

$$f(x) = x^{k+1} = x^k \cdot x$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x) &= \left(x^k \cdot x\right)' \\
&= \left(x^k\right)' \cdot x + x^k \cdot (x)' \\
&= k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 \\
&= k \cdot x^k + x^k \\
&= (k+1) \cdot x^k \\
&= (k+1) \cdot x^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

Zusammen beweisen Induktionsanfang und Induktionsschritt die Aussage $(*)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Quotientenregel der Ableitung (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Gegeben sind f und g, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$, $g(a) \neq 0$ und $g \neq 0$ in einem Intervall um a.
Dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in a ableitbar und es gilt : $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Beweis : Der Beweis wird in zwei Etappen geführt.

I. $\frac{1}{g}$ ist in a ableitbar und $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(a) - g(x)}{(x - a) \cdot g(x) \cdot g(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{-1}{g(a)} \cdot \frac{1}{g(x)} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} \frac{-1}{g(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} \\
&= g'(a) \cdot \frac{-1}{g(a)} \cdot \frac{1}{g(a)} \\
&= -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

II. f und $\frac{1}{g}$ sind in a ableitbar, also ist $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ in a ableitbar und es gilt :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\right) \\
&= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

9. Kettenregel der Ableitung (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Gegeben sind f ableitbar in $a \in \mathbb{R}$ und g ableitbar in $b = f(a)$.
Dann ist die Funktion $g \circ f$ in a ableitbar und es gilt : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Beweis :

Sei die Hilfsfunktion g^* gegeben für alle $y \in D_g$ durch :

$$g^*(y) = \begin{cases} g'(b) & \text{für } y = b \\ \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{für } y \neq b \end{cases}$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften :

- g^* ist an der Stelle b stetig : $\lim\limits_{y \to b} g^*(y) = \lim\limits_{y \to b} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} = g'(b) = g^*(b)$
- für alle $y \in D_g$ gilt : $g(y) - g(b) = g^*(y) \cdot (y - b)$

Und dann :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g^*(f(x)) \cdot (f(x) - f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} g^*(f(x)) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= g^*(f(a)) \cdot f'(a) \\
&= g'(f(a)) \cdot f'(a)
\end{aligned}$$

10. Lokales Extremum und Ableitung (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Extremstelle einer Funktion f und sei f ableitbar in a.
Dann ist $f'(a) = 0$.

Beweis :

Eine Extremstelle ist eine Minimal- oder Maximalstelle.
In der Prüfung wird in der Fragestellung angegeben welcher Fall behandelt werden soll.

Folgende Grenzwerte existieren alle in $\mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Fall einer Minimalstelle :

Für $x < a$, nah genug bei a gilt : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

Daraus folgt : $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

Für $x > a$, nah genug bei a gilt : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

Daraus folgt : $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

Fall einer Maximalstelle :

Für $x < a$, nah genug bei a gilt : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

Daraus folgt : $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

Für $x > a$, nah genug bei a gilt : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

Daraus folgt : $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$

Aus der anfängliche Gleichungskette folgt daher in beiden Fällen : $f'(a) = 0$.

11. Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Beweis)

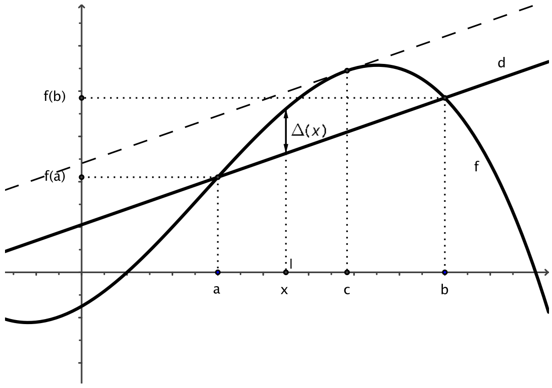
ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Wenn f auf $[a;b]$ stetig und auf $]a;b[$ ableitbar ist, dann gibt es mindestens eine Stelle $c \in]a;b[$ für die gilt

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis :



Sei $d(x) = mx + h$ die ganzrationale Funktion ersten Gerades deren Schaubild die Gerade durch die Punkte $(a; f(a))$ und $(b; f(b))$ ist.

Sei für jedes $x \in [a;b]$: $\quad \Delta(x) = f(x) - d(x)$

Die Funktion Δ :

- ist auf $[a;b]$ stetig
- ist auf $]a;b[$ ableitbar
- erfüllt $\Delta(a) = \Delta(b)$

Es existiert also mindestens eine Stelle $c \in]a;b[$ mit $\Delta'(c) = 0$.

Es gilt : $\Delta'(x) = (f(x) - d(x))' = f'(x) - d'(x) = f'(x) - m = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Und daher : $\Delta'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

12. Monotoniesätze (Beweise)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Erster Monotoniesatz :

Gegeben sei f ableitbar auf einem offenen Intervall I.
Wenn f auf I monoton zunehmend ist, dann gilt für jedes $x \in I : f'(x) \geq 0$.
Wenn f auf I monoton abnehmend ist, dann gilt für jedes $x \in I : f'(x) \leq 0$.

Beweis :

Fall f monoton zunehmend :

Für $x \in I$ und $h > 0$ gilt : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ und daher : $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

Da f in x ableitbar ist, folgt : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

Fall f monoton abnehmend :

Für $x \in I$ und $h > 0$ gilt : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ und daher : $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$

Da f in x ableitbar ist, folgt : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$

(Der Beweis hätte in beiden Fällen auch mit $h \to 0^-$ geführt werden können.)

Zweiter Monotoniesatz :

Gegeben sei f ableitbar auf einem Intervall I.
Gilt für alle $x \in I$ $f'(x) > 0$, dann ist f auf I streng monoton wachsend.
Gilt für alle $x \in I$ $f'(x) < 0$, dann ist f auf I streng monoton fallend.

Beweis :

Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ ist die Funktion f :

- auf $[x; y]$ stetig
- auf $]x; y[$ ableitbar

Es existiert also mindestens eine Stelle $c \in]x; y[$ mit : $f'(c) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Fall $f'(x) > 0$:

Daraus folgt : $f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(y) > f(x)$

Fall $f'(x) < 0$:

Daraus folgt : $f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(y) < f(x)$

13. Unterschied von zwei Stammfunktionen einer Funktion (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz :

Gegeben sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen derselben Funktion f auf dem Intervall I.
Dann unterscheiden sich F_1 und F_2 auf I durch eine reelle Konstante k :

$$F_2(x) = F_1(x) + k \quad \forall x \in I$$

Beweis : Der Beweis wird in zwei Etappen geführt.

I. Sei G eine Stammfunktion von 0 auf I, d.h. $G'(x) = 0\ \forall x \in I$

Für alle $x, y \in I$ mit $x \neq y$ ist die Funktion G :

- auf $[x; y]$ stetig
- auf $]x; y[$ ableitbar

Es existiert also mindestens eine Stelle $c \in]x; y[$ mit : $G'(c) = \dfrac{G(y) - G(x)}{y - x}$

Aus $G'(c) = 0$ folgt $G(x) = G(y)$.

Also ist G auf I konstant.

II. Aus $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ folgt $(F_2 - F_1)'(x) = 0$

Die Funktion $G = F_2 - F_1$ ist also eine Stammfunktion von 0 auf I.

Daher ist $G = F_2 - F_1$ auf I konstant, d.h. es existiert $k \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in I$ gilt :

$$G(x) = (F_2 - F_1)(x) = k \;\Leftrightarrow\; F_2(x) - F_1(x) = k \;\Leftrightarrow\; F_2(x) = F_1(x) + k$$

14. Kombinatorik : Binomischer Lehrsatz (Beweis) und Pascalsches Dreieck (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett" des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Satz : (binomischer Lehrsatz)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Beweis : (kombinatorische Erklärung)

Beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$
erhält man eine Summe vom Typ $\quad ?\cdot a^n + \ ?\cdot a^{n-1}b + \ ?\cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + \ ?\cdot b^n$

Der Term $a^{n-k}b^k$ kommt so oft vor wie es verschiedenen Anagramme des „Wortes" gibt, das $n-k$ mal den Buchstaben a enthält und k mal den Buchstaben b, d.h. $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$ mal.

Oder anders :

Um einen Term $a^{n-k}b^k$ zu bekommen nimmt man b aus genau k der n Faktoren $a+b$ und a aus den anderen. Es gibt dafür $C_k^n = \binom{n}{k}$ verschiedene Auswahlmöglichkeiten.

Pascalsches Dreieck :

Das Pascalsche Dreieck gibt die binomischen Koeffizienten aus dem vorhergehenden Satz wie folgt für die ersten Reihen gezeigt :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbf{1} & & & & \\ & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & \\ & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a+b)^0 = \mathbf{1} \\ (a+b)^1 = \mathbf{1}\cdot a + \mathbf{1}\cdot b \\ (a+b)^2 = \mathbf{1}\cdot a^2 + \mathbf{2}\cdot ab + \mathbf{1}\cdot b^2 \\ (a+b)^3 = \mathbf{1}\cdot a^3 + \mathbf{3}\cdot a^2b + \mathbf{3}\cdot ab^2 + \mathbf{1}\cdot b^3 \\ (a+b)^4 = \mathbf{1}\cdot a^4 + \mathbf{4}\cdot a^3b + \mathbf{6}\cdot a^2b^2 + \mathbf{4}\cdot ab^3 + \mathbf{1}\cdot b^4 \end{array}$$

Zu beweisen ist also für alle $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{0,\ldots,n-1\}$: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Beweis :

algebraisch :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-(k+1))!} = \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$$

kombinatorisch :

$\binom{n+1}{k+1} = C_{k+1}^{n+1}$: Anzahl der Möglichkeiten $k+1$ von $n+1$ Elementen zu wählen

Diese Auswahl kann aber auch getroffen werden indem man :

entweder das erste Element wählt und noch k aus den n weiteren wählt

oder das erste Element nicht wählt und daher $k+1$ aus den n weiteren wählt

Insgesamt gibt es also : $C_1^1 \cdot C_k^n + C_{k+1}^n = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ Wahlmöglichkeiten

15. Wahrscheinlichkeitsfunktion : Definition, Eigenschaften (Beweis), Laplacewahrscheinlichkeiten (Beweis)

ACHTUNG : Hier ist nur das „Skelett” des Themas gegeben. Jede Aussage oder Etappe muss erklärt und begründet werden können. Fragen zum Thema müssen beantwortet werden können.

Definition :

Sei U die Ergebnismenge eines Zufallversuchs und $\{A \mid A \subseteq U\}$ der Ereignisraum des Zufallsversuches.
Eine Funktion $P : \{A \mid A \subseteq U\} \to \mathbb{R}$ heisst **Wahrscheinlichkeitsfunktion**, wenn gilt :

1. für alle $A \subseteq U$ ist $P(A) \geq 0$
2. $P(U) = 1$
3. für alle $A, B \subseteq U$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Satz :

Sei $(U, \mathcal{P}(U), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \subseteq U$. Dann gilt

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. ist $A \subseteq B$, dann gilt $P(A) \leq P(B)$
6. $0 \leq P(A) \leq 1$

Beweis : (Diagramme zur Illustration können jeweils hilfreich sein)

In der Prüfung wird in der Fragestellung angegeben welche Eigenschaften behandelt werden sollen.

1. $A \cap \overline{A} = \emptyset \;\Rightarrow\; P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$ und $A \cup \overline{A} = U \;\Rightarrow\; P\left(A \cup \overline{A}\right) = P(U) = 1$
   Daher : $1 = P(A) + P\left(\overline{A}\right) \;\Leftrightarrow\; P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
2. $\emptyset = \overline{U} \;\Rightarrow\; P(\emptyset) = 1 - P(U) = 1 - 1 = 0$
3. $\left(A \cap \overline{B}\right) \cap (A \cap B) = \emptyset \;\Rightarrow\; P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(A \cap B)$
   $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) = A \;\Rightarrow\; P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)\right) = P(A)$
   Daher : $P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(A \cap B) = P(A) \;\Leftrightarrow\; P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $\left(A \cap \overline{B}\right) \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup B\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(B)$
   $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup B = A \cup B \;\Rightarrow\; P\left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup B\right) = P(A \cup B)$
   Daher : $P(A \cup B) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P(B) \;\Rightarrow\; P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$
5. $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B)$ und $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
   Daher : $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A) \;\Leftrightarrow\; P(B) = P(A) + P\left(B \cap \overline{A}\right) \geq P(A)$
6. $\emptyset \subseteq A \subseteq U \;\Rightarrow\; P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(U) \;\Rightarrow\; 0 \leq P(A) \leq 1$

Satz :

Sei ein Laplace-Experiment mit Ergebnismenge U. Dann gilt für $E \subseteq U$: $P(E) = \dfrac{m(E)}{m(U)}$

Beweis :

Sei $U = \{u_1; \ldots; u_n\}$. Für alle $i \neq j$ gilt : $\{u_i\} \cap \{u_j\} = \emptyset$

Daher : $P(U) = P(\{u_1\} \cup \{u_2\} \cup \ldots \cup \{u_n\}) = P(\{u_1\}) + P(\{u_2\}) + \ldots + P(\{u_n\})$

Man weiss : $P(U) = 1$ und $P(\{u_1\}) = P(\{u_2\}) = \ldots = P(\{u_n\}) = p$

Daher : $1 = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n} = np \;\Leftrightarrow\; p = \dfrac{1}{n}$

Sei $E = \{e_1; \ldots; e_k\}$ mit $E \subseteq U$. Für alle $i \neq j$ gilt : $\{e_i\} \cap \{e_j\} = \emptyset$

Daher : $P(E) = P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \ldots \cup \{e_k\}) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_k\})$

$$\Leftrightarrow P(E) = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{k} = kp = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{m(E)}{m(U)}$$