1 Fonctions réelles

1.1 Relations

Quelle relation peut-on établir entre les ensembles dans les exemples suivants ?

1.

Siméon
Anna
Nadège
Pascalela
Gauthier

Scherer
Sauvin
Migeotte
Benador
Ouadja

2.

Orlando Bloom
Angelina Jolie
Brad Pitt

Mr. & Mrs Smith
Ocean's 11
Tomb Raider

3.

12
-1
0
-3
4
-7
3

0
49
-1
9
144

1.2 Applications

Définition :

Une relation entre deux ensembles A et B est une **application** a de l'**ensemble de départ** A vers l'**ensemble d'arrivée** B (noté : $a : A \to B$) si à tout élément de A on associe exactement un élément de l'ensemble B.

Exercices :

1. Déterminer lesquelles parmi les relations du paragraphe précédent sont des applications en précisant les ensembles de départ et d'arrivée.
2. Pour les relations qui ne sont pas des applications, peut-on modifier les ensembles de départ et/ou d'arrivée pour que ce soient des applications ?

1.3 Fonctions réelles

Définitions illustrées :

Une **fonction réelle** (on dira fonction) est une application de $\mathbb{R}$, ou d'une partie de $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour exprimer que l'élément y de l'ensemble d'arrivée est associé à l'élément x de l'ensemble de départ, on écrit :

est appelé **image** de x, et x **préimage** de y.

Il arrive souvent que le calcul des images peut se faire à l'aide d'une formule. Prenons pour l'exemple la fonction qui à chaque nombre x associe sa racine carrée. La formule qui nous intéresse est $\sqrt{x}$.

La fonction f peut alors être décrite à l'aide de sa formule :

$$\begin{array}{rcl} f : D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f : x \mapsto \sqrt{x} \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Dans l'exemple choisi, on constate que la variable x ne peut pas prendre n'importe quelle valeur réelle car elle ne doit pas être négative. L'ensemble des éléments de départ pour lesquels $f(x)$ est définie s'appelle **domaine de définition** de la fonction f, noté D_f. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $D_f \subset \mathbb{R}$.

Dans l'exemple : $D_f =$

Exercices :

1. On considère la fonction définie par $f : x \mapsto 5x - 2$

   (a) Quelle est l'image de 2 ?

   (b) Y a-t-il une préimage de 2 ?

   (c) Quelle est la valeur de f en -1 ?

   (d) Y a-t-il des préimages de -2 ?

2. Déterminer les domaines de définition des fonctions données comme suit.

   (a) $f : x \mapsto 3x^2 + 1$

   (b) $f(x) = \frac{2}{x}$

   (c) $f(x) = \frac{3}{x+7}$

1.4 Représentation graphique d'une fonction

Définition :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction.

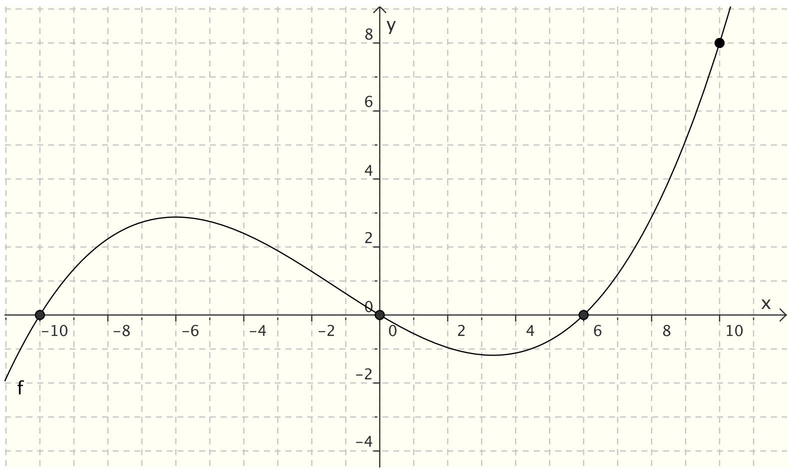
Le **graphe** de f est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que x appartient à D_f et $y = f(x)$.

On peut représenter le graphe (en partie) d'une fonction dans un système d'axes.

Un point $(x; y)$ situé sur la courbe satisfait $y = f(x)$.

La valeur de x se lit sur l'axe horizontal, appelé

La valeur de y ou $f(x)$ se lit sur l'axe vertical, appelé



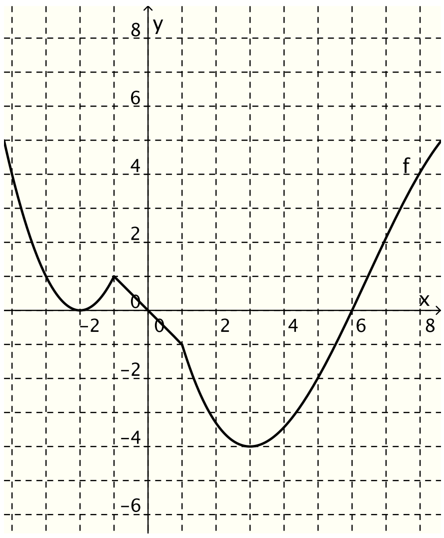
Exercices :

1. Pour la fonction partiellement représentée dans le graphique ci-dessus
   (a) Déterminer les coordonnées des points marqués sur la courbe par un point noir. Que peut-on en déduire pour f ?
   (b) Donner un encadrement à l'unité pour $f(-7)$.
   (c) Est-ce que f est définie en 11 ?
   (d) Combien de préimages est-ce que 1 possède au minimum ?
2. Représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous pour $x \in [-5; 5]$.
   (a) $f(x) = 2$ (b) $f(x) = x$

1.5 Exercices

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-3}$
   (a) Déterminer son domaine de définition.
   (b) Calculer l'image de 7.
   (c) Calculer $f(-10)$.
   (d) Quelle est l'image de 14 ?
2. Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto 4x - 7$
   (a) Déterminer son domaine de définition.
   (b) Calculer l'image de -3.
   (c) Calculer $f(-1)$.
   (d) Calculer toutes les préimages de 7.
   (e) Déterminer les valeurs de x tel que $f(x) = -11$.
3. Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto 3x^2 + x - 1$
   (a) Déterminer son domaine de définition.
   (b) Calculer $f(-10)$.
   (c) Déterminer les valeurs de x tels que $f(x) = -2$.
   (d) Calculer l'image de 4.
   (e) Calculer toutes les préimages de -1.
4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$
   (a) Déterminer son domaine de définition.
   (b) Calculer l'image de 0.
   (c) Calculer $f(-1)$.
   (d) Quelle est l'image de 2 ?
5. Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-x}$.
6. On appelle **zéros** d'une fonction f les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.
   Déterminer les zéros des fonctions données comme suit :
   (a) $f : x \mapsto x + 3$
   (b) $f(x) = x^2 + 1$
   (c) $f(x) = x^3 - 4x$
   (d) $f : x \mapsto 5 - 3x$
   (e) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
   (f) $f : x \mapsto 7$

7. Soit la représentation graphique suivante d'une fonction f :



En se limitant aux points représentés (même si la fonction continue éventuellement au-delà du graphique) répondre aux questions suivantes :

(a) Quelle est l'image de -4 ?

(b) Combien y a-t-il de préimages de 1 ? Quelles sont-elles ?

(c) Est-ce que f est définie en 1 ?

(d) Quels sont les zéros de f ?

(e) Quelles valeurs y, possèdent-t-elles

i. aucune préimage ?

ii. une seule préimage ?

iii. deux préimages ?

iv. trois préimages ?

v. quatre préimages ?

vi. plus de quatre préimages ?

(f) $f(5) = ?$

8. Esquisser pour $x \in [-3; 3]$ le graphe de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

9. Esquisser pour $x \in [-7; 10]$ le graphe d'une fonction f qui satisfait sur cet intervalle aux conditions suivantes :

(a) $f(-1) = 4$

(b) -2 et 3 sont les seules préimages de 5

(c) les zéros de f sont -6 et 8

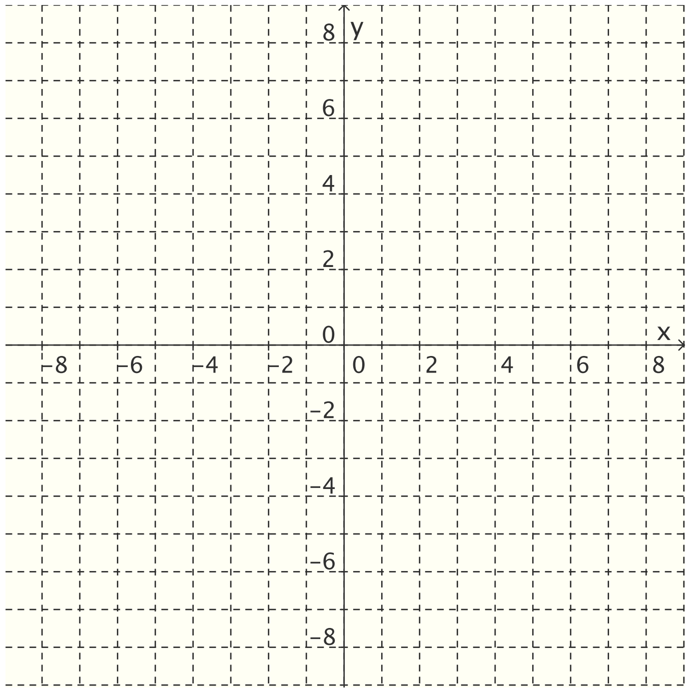
(d) f est définie partout sauf en $x = 0$ et $x = 1$

(e) 2 possède exactement trois préimages

(f) -1 ne possède pas de préimage

2 Fonctions polynômiales du premier degré

Rappel de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = x$,
ou autrement dit de la droite d'équation $y = x$:

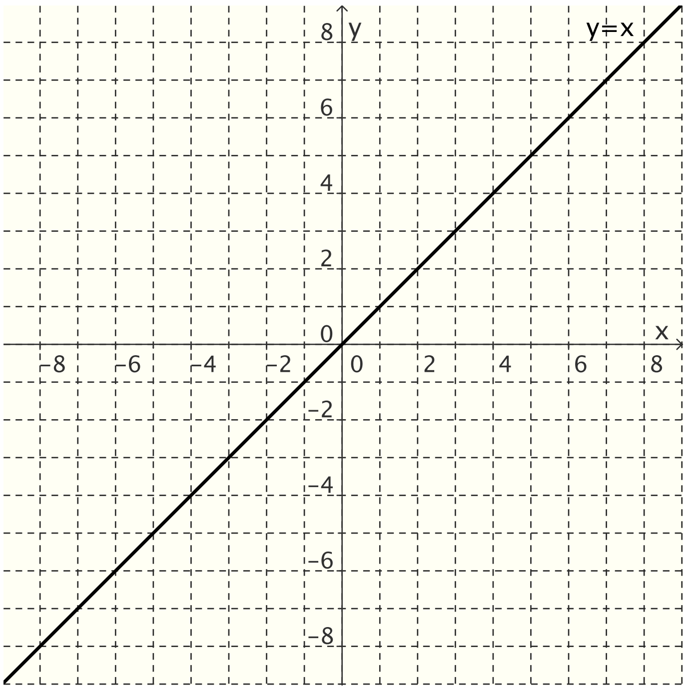


Particularités :

2.1 $f(x) = mx$ ou $y = mx$

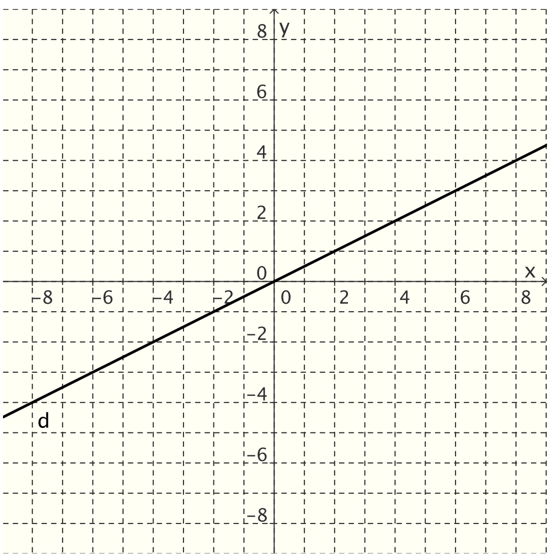
Soit f définie par $f(x) = 3x$ ou autrement dit soit l'équation $y = 3x$.

Représentation graphique des points $(x; y)$ qui satisfont cette équation :



Le facteur 3 correspond à :

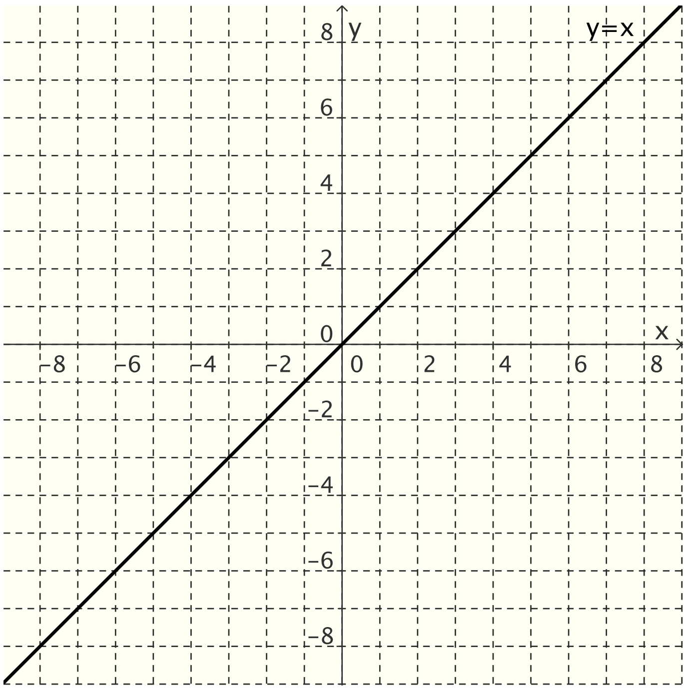
Soit la droite d représentée graphiquement. Quelle est son équation $d : y =?$



2.2 $f(x) = x + h$

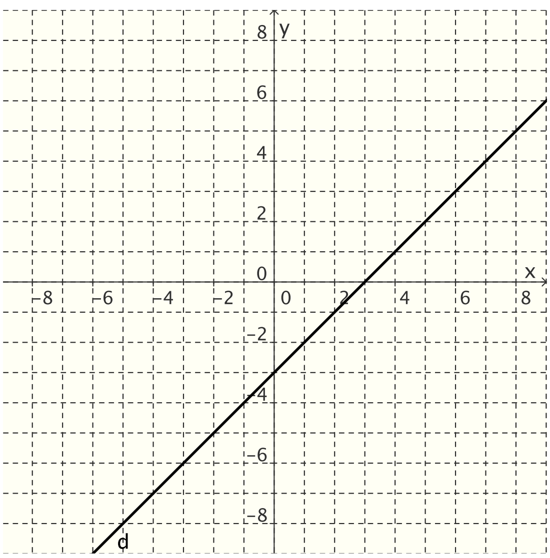
Soit f définie par $f(x) = x + 2$ ou autrement dit soit l'équation $y = x + 2$.

Représentation graphique des points $(x; y)$ qui satisfont cette équation :



Le terme 2 correspond à :

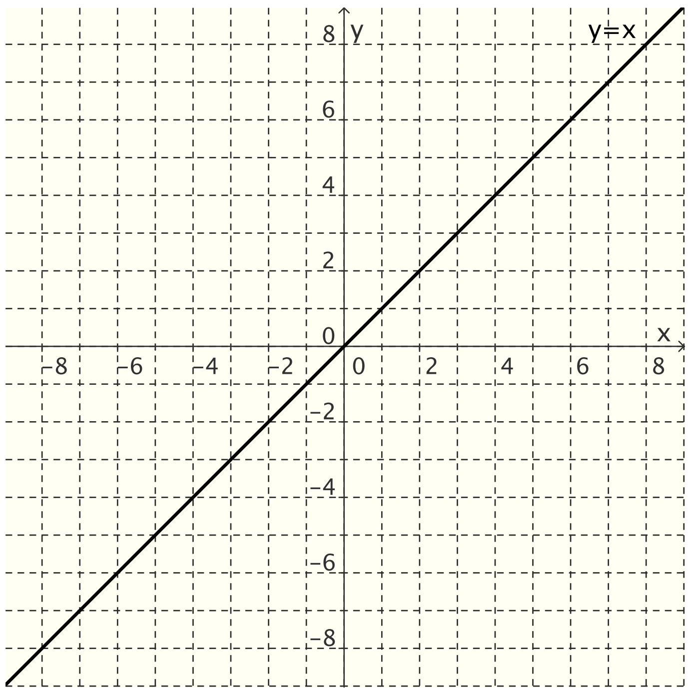
Soit la droite d représentée graphiquement. Quelle est son équation $d : y = ?$



2.3 $f(x) = mx + h$ ou $y = mx + h$

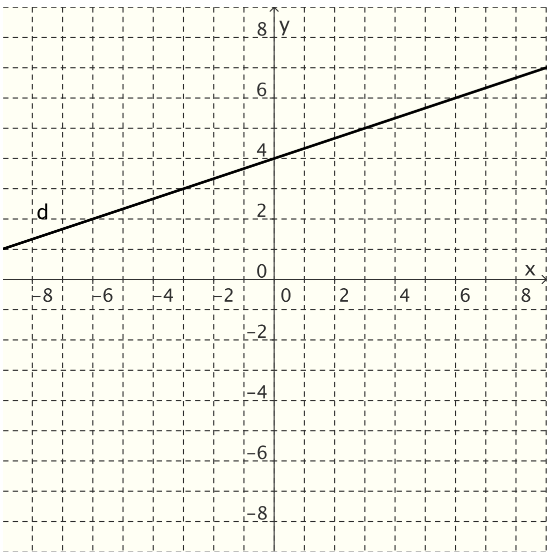
Soit f définie par $f(x) = 3x + 2$ ou autrement dit soit l'équation $y = 3x + 2$.

Représentation graphique des points $(x; y)$ qui satisfont cette équation :



Le facteur 3 et le terme 2 correspondent à :

Soit la droite d représentée graphiquement. Quelle est son équation $d : y =$?



2.4 Définitions

La **pente** d'une droite est le rapport $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx est un accroissement selon l'axe $\mathcal{O}x$ et Δy l'accroissement correspondant selon l'axe $\mathcal{O}y$.

Pour trouver la pente d'une droite il suffit de connaître deux points distincts $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$ situés sur la droite.

La pente est alors donnée par $\qquad m =$

Remarque : Ce rapport est indépendant du choix des points A et B sur la droite.

Si $m \neq 0$ la fonction f définie par $f(x) = mx + h$ est appelée **fonction (polynômiale) du premier degré**.

Si $m = 0$ la fonction f alors définie par $f(x) = h$ est appelée **fonction constante**.

Dans les deux cas le graphe de f est une droite qui passe par le point $(0; h)$ (h est appelé l'**ordonnée à l'origine**) et dont la pente vaut m.

La fonction est dite **linéaire** si $h = 0$ (la droite passe par l'origine) et **affine** sinon (la droite ne passe pas par l'origine).

Au lieu de décrire les droites à l'aide de l'écriture fonctionnelle $f(x) = mx+h$, on parle souvent de **droite d'équation** $y = mx + h$:

Les points de coordonnées $(x; y)$ situés sur la droite doivent satisfaire $y = f(x)$ et donc $y = mx + h$.

2.5 Exercices :

1. Représenter graphiquement les droites d'équation

   (a) $y = -2x + 6$ (b) $y = \frac{1}{2}x - 3$

2. (a) Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(7;-2)$ et $B(-3;1)$. Représenter graphiquement.

   (b) Déterminer l'équation de la droite qui coupe l'axe $\mathcal{O}x$ en $I(-5;0)$ et dont la pente vaut $-\frac{5}{8}$. Représenter graphiquement.

   (c) Déterminer la fonction affine ou linéaire f telle que $f(2) = 5$ et dont le graphe passe par $A(5;5)$. Représenter graphiquement.

   (d) Trouver l'abscisse du point $C(x;10)$ sachant que les points $A(1;1)$, $B(3;-2)$ et $C(x;10)$ sont alignés.

3. Sans calculs : Dessiner la fonction affine ou linéaire f telle que

   (a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2

   (b) $f(0) = -1$ et la pente du graphe de f vaut $\frac{3}{2}$

   (c) $f(2) = 0$ et la pente du graphe de f vaut $-\frac{3}{5}$

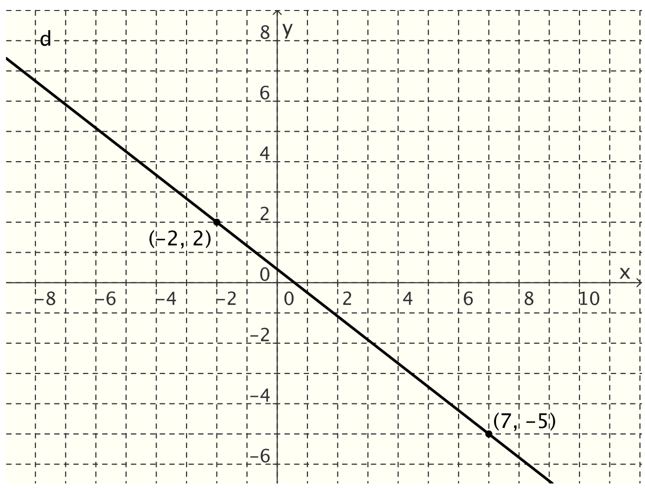
   (d) $f(3) = 1$ et la pente du graphe de f vaut 1

   (e) $f(4) = 5$ et la pente du graphe de f vaut 0

4. Existe-t-il une fonction affine ou linéaire dont le graphe est une droite verticale ?

5. Représenter graphiquement une droite verticale. Peut-on décrire les points de coordonnées $(x;y)$ situés sur cette droite à l'aide d'une équation ?

6. Déterminer l'équation de la droite d représentée :



7. Déterminer, si elle existe, l'intersection des droites suivantes. Représenter la situation graphiquement.

   (a) $d_1 : \; y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}$ et $d_2 : \; y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{4}$

   (b) $d_1 : \; y = 2x + 5$ et $d_2 : \; y = \frac{1}{2}(7 - 4x)$

   (c) $d_1 : \; y = -\frac{1}{3}x - 1$ et $d_2 : \; y = -\frac{1}{6}(2x + 1)$

   (d) $d_1 : \; y = x$ et $d_2 : \; y = 5$

8. Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$.

   (a) Déterminer graphiquement les x tels que $\frac{3}{4}x - 2 > 1$

   (b) Déterminer algébriquement les x tels que $\frac{3}{4}x - 2 > 1$

9. Peut-on interpréter graphiquement le système d'équations suivant comme l'intersection de deux droites ? Si oui lesquelles ?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

10. Soit l'inéquation $4 - x < \frac{1}{3}x$. Résoudre algébriquement. Peut-on donner une interprétation graphique ?

11. Laura décide d'aller à Lausanne à pied. Elle marche à une vitesse de 4km par heure. Cinq heures après son départ, son petit frère décide de la rejoindre. Il enfourche donc son vélo et roule à une vitesse de 14 km par heure sur les traces de Laura. Après combien de temps se rejoindront-ils ? Combien de kilomètres auront-ils parcourus ?

12. Christelle réduit un document A4 de 80% à l'aide d'une photocopieuse. Agnès qui le reçoit, désirerait travailler en taille originale, mais Christelle n'est pas atteignable pour récuperer le document de départ. Sur quel facteur d'agrandissement Agnès doit-elle régler la photocopieuse pour retrouver la situation originale ?

13. Stemar et Robin se donnent rendez-vous pour un concours de rapidité : à qui mangera le plus rapidement 20 plaques de chocolat. Stemar est à l'heure au rendez-vous et commence à manger à raison de trois plaques entières en 7 minutes. Robin essaie de combler son retard de 4 minutes en mangeant à une vitesse de 5 plaques en 8 minutes.

    (a) Arriveront-ils à atteindre leur but de 20 plaques chacun s'ils n'ont que 30 minutes avant leur prochain cours ?

    (b) Sinon qui est gagnant à ce moment-là ?

    (c) A mi-temps (15 minutes), combien de plaques ont-ils consommé chacun ?

3 Fonctions polynômiales du deuxième degré

Définition :

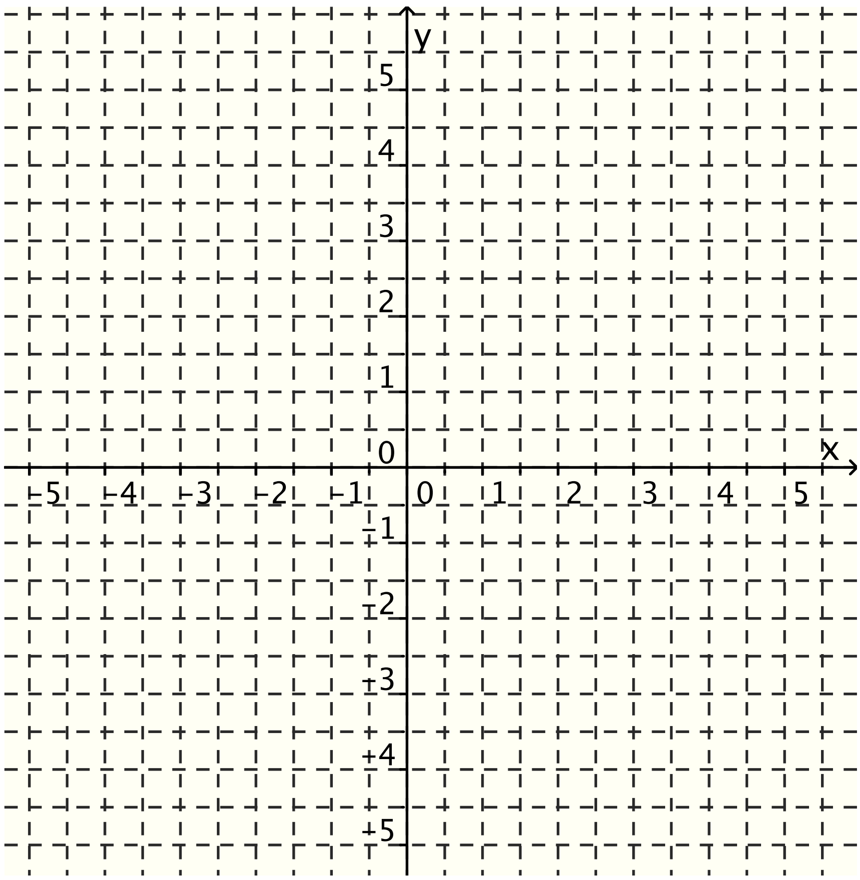
Une **fonction polynômiale du deuxième degré** est une fonction f donnée par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Le graphe d'une fonction polynômiale du deuxième degré est appelé **parabole**.

Vous savez déjà reconnaître et représenter graphiquement la plus simple des fonctions polynômiales du deuxième degré, définie par $f(x) = x^2$



Représenter sur le même graphique les fonctions définies comme suit :

$g(x) = -x^2$ $\qquad h(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ $\qquad i(x) = x^2 - 4$ $\qquad j(x) = (x+3)^2$ $\qquad k(x) = (x-4)^2 + 1$

Plus complexe : représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous.
– Choisir la graduation des axes de manière appropriée.
– Essayer de donner une méthode qui permette de dessiner le graphe d'une fonction du deuxième degré (et qui soit moins fastidieuse que la traditionnelle "calculer des coordonnées de points à la pelle et les relier").

1. $f_1(x) = x^2 + 2x - 63$
2. $f_2(x) = 4x^2 - 12x + 5$
3. $f_3(x) = 4x^2 - 36x + 81$
4. $f_4(x) = -x^2 - x + 6$
5. $f_5(x) = x^2 - 2x - 1$
6. $f_6(x) = x^2 - 8x + 23$

Méthode :

3.1 Position d'une parabole

Soit f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

Zéros :

Pour trouver les zéros de f il faut résoudre

La fonction possède deux zéros distincts si

La fonction possède un seul zéro si

La fonction ne possède pas de zéro si

Sommet :

Les coordonnées du sommet du graphe de la fonction f s'obtiennent en complétant le carré :

Position du sommet par rapport aux zéros de la fonction (si elle en possède) :

Vers le haut ou vers le bas ?

La question a déjà été traitée pour les fonctions données par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2$.

Dans le cas général la même forme que celle utilisée pour la lecture des coordonnées du sommet, permet également d'étudier si la parabole s'ouvre vers le haut ou le bas.

Exercices :

1. Dans le tableau ci-dessous esquisser le graphe d'une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ qui satisfait aux deux conditions indiqués sur les bords :

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	
			$a > 0$
			$a < 0$

2. Déterminer les zéros (s'ils existent) et le sommet pour chacune des fonctions définies ci-dessous. Représenter graphiquement (croquis éventuel, puis représentation soignée).

   (a) $f(x) = x^2 - 6x + 11$
   (b) $f(x) = x^2 + 5x$
   (c) $f(x) = x^2 + 6x + 5$
   (d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$
   (e) $f(x) = 4 - x^2$
   (f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

3. Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x + 1 \qquad g(x) = -x^2 + 3$$

   (a) Représenter les deux fonctions sur le même graphique.
   (b) Déterminer **graphiquement** les coordonnées des points d'intersection.
   (c) Déterminer **algébriquement** les coordonnées des points d'intersetion.

4. Déterminer **algébriquement** les coordonnées des points d'intersection (s'ils existent) des fonctions f et g définies ci-dessous. Il n'est pas obligatoire de faire une représenation graphique, mais un croquis peut aider.

   (a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$

   (b) $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 3x$

   (c) $f(x) = 5$ et $g(x) = x^2 - 1$

   (d) $f(x) = -x^2 + 13x - 48$ et $g(x) = x^2 - 11x + 24$

5. Dessiner les graphes des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - x - 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 2x - 2$$

   Résoudre ensuite **graphiquement** les équations et inéquations ci-dessous. (Càd. trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles elles sont vraies.)

   (a) $f(x) = 0$

   (b) $g(x) = 0$

   (c) $f(x) = g(x)$

   (d) $f(x) > 0$

   (e) $f(x) < 0$

   (f) $g(x) \geq 0$

   (g) $g(x) \leq 0$

   (h) $f(x) < g(x)$

   (i) $g(x) \leq -2$

6. Déterminer l'expression $f(x) = \ldots$ d'une fonction du deuxième degré pour laquelle les zéros se situent en $x = 2$ et $x = 8$ et le sommet a les coordonnées $S(5; 9)$.

7. Déterminer l'expression $f(x) = \ldots$ d'une fonction du deuxième degré, si l'on sait que la fonction satisfait $f(0) = 3$, $f(1) = 2$ et$f(-1) = 6$.

4 Fonction valeur absolue

Définition :

La fonction **valeur absolue** est définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$$

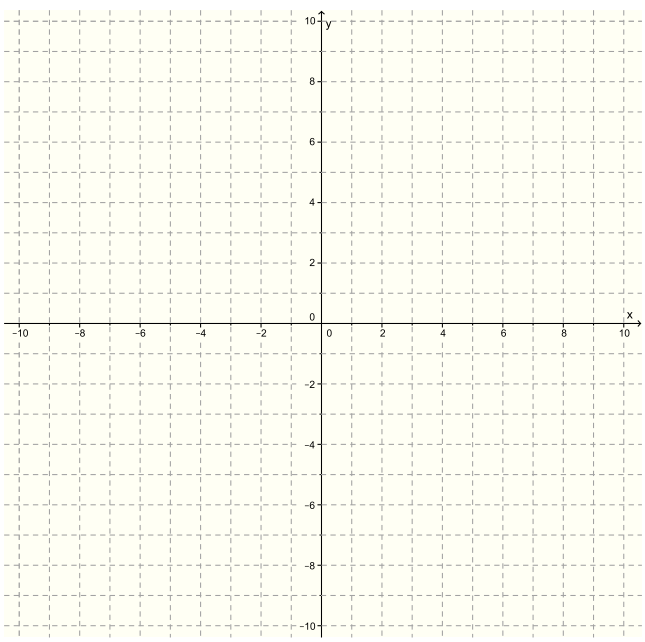
où la notation $|x|$ indique qu'il faut prendre la "valeur absolue" du nombre x, à savoir

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples : $|0| =$ $\quad |-3| =$ $\quad |5| =$ $\quad |-(-17)| =$ $\quad \left|-\frac{11\sqrt[3]{\pi}}{17}\right| =$

Représentation graphique :

Soit f définie par $f(x) = |x|$. Sa représentation graphique est :



Exercices :

1. Soit la fonction f donnée par $f(x) = |2x - 3|$. Ecrire cette fonction "par morceaux", càd sans utiliser le symbole de la valeur absolue.

   Représenter graphiquement la fonction f.

2. Même question pour la fonction g donnée par $g(x) = |7 - 3x|$

3. Même question pour la fonction h donnée par $h(x) = |x^2 - 1|$

5 Fonction racine carrée

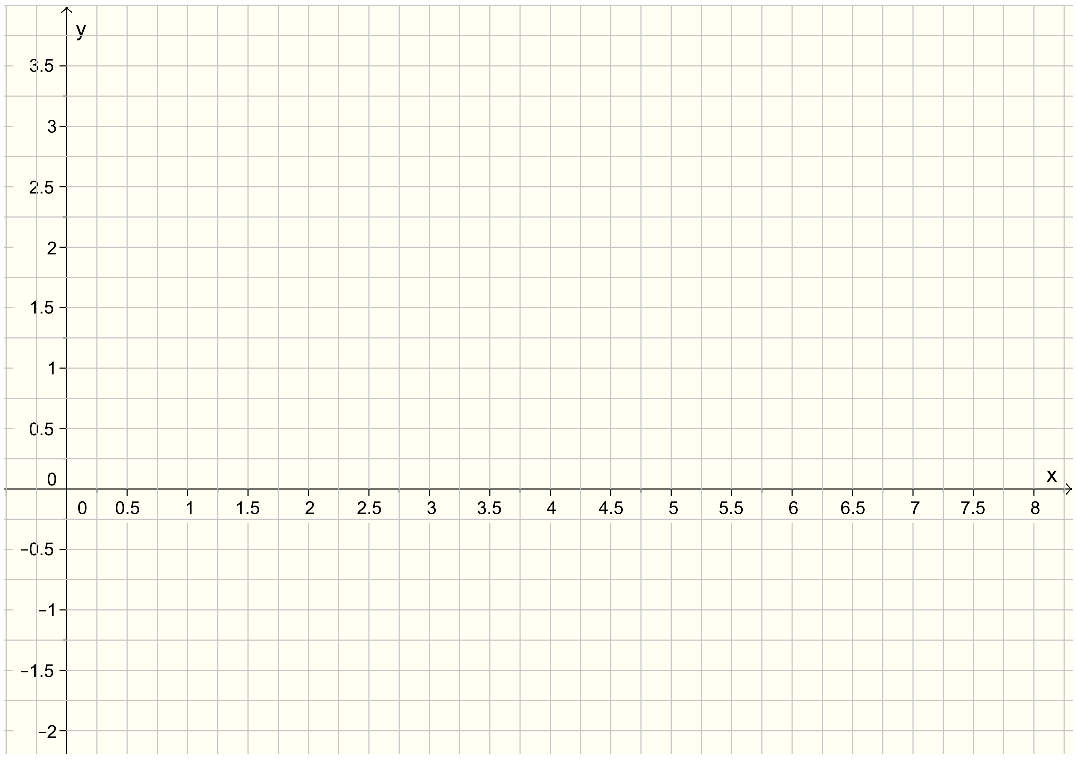
Définition :

La fonction **racine carrée** est définie par

$$\begin{array}{rcl} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Représentation graphique :

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Sa représentation graphique est :



Exercices :

Représenter graphiquement les fonctions définies comme suit :

1. $f_1(x) = \sqrt{x} - 7$
2. $f_2(x) = \sqrt{x - 3}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x + 1} - 1$
4. $f_4(x) = 3\sqrt{x}$

6 Fonction inverse

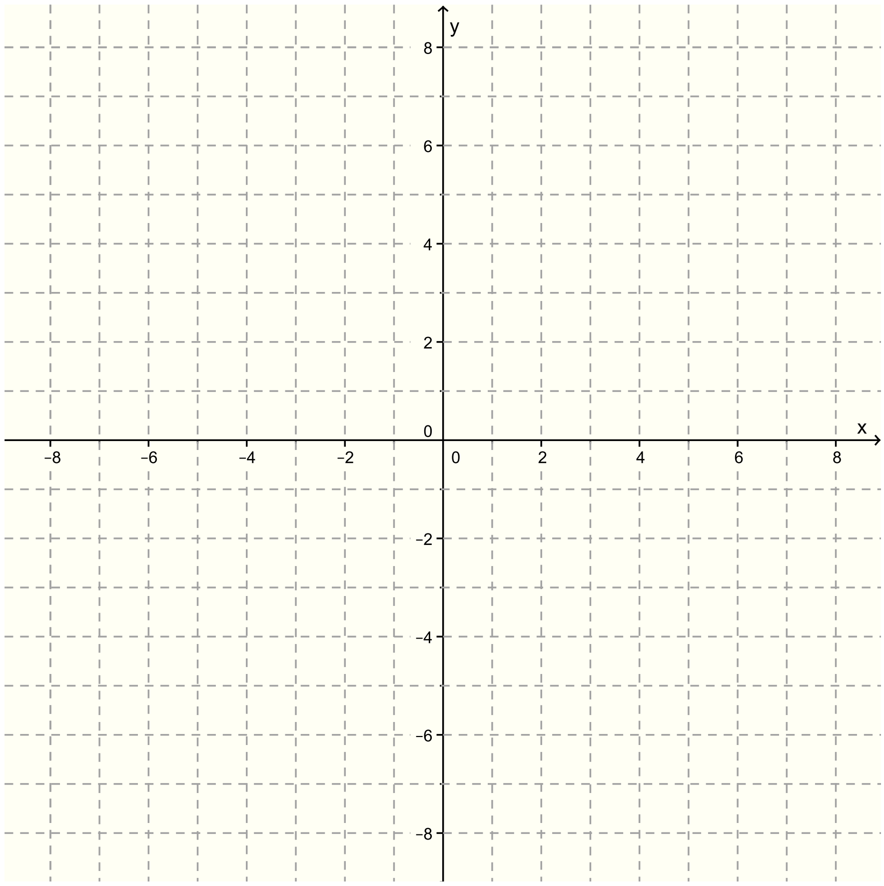
Définition :

La fonction **inverse** est définie par

$$\begin{array}{rcl} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Représentation graphique :

Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Sa représentation graphique est :



7 Fonctions bijectives : approche graphique

Définition :

On dit d'une fonction qu'elle est **bijective de** $\mathbb{R}$ **vers** $\mathbb{R}$ si chaque y dans l'ensemble d'arrivé $\mathbb{R}$ possède une unique préimage x dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}$.

Exemples :

Exercices :

1. Dans le formulaire CRM sont représentées sur les pages 69-71 (ou avoisinantes dans d'autres éditions) certaines fonctions particulières. Déterminer graphiquement lesquelles des ces fonctions sont bijectives de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Pour les fonctions de l'exercice 1. qui ne sont pas bijectives, essayer de trouver un intervalle de départ A et/ou un intervalle d'arrivée B de manière à ce que ces fonctions soient bijectives de A vers B.

8 Mélange d'exercices

1. Soit la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + 5x + 7$.
   (a) Calculer l'image de -3.
   (b) Existe-t-il une préimage de 1 ?
   (c) Existe-t-il une valeur qui ne possède pas de préimage ?

2. (a) Soient les droites d_1 de pente m_1, et d_2 de pente m_2. Que peut-on affirmer au sujet de m_1 et m_2 si les deux droites sont perpendiculaires ?
   (b) Soit d_1 d'équation $y = \frac{1}{3}x + 4$. Déterminer l'équation de la droite d_2 qui est perpendiculaire à d_1 et passe par le point $A(-3; 3)$.
   (c) Représenter graphiquement les deux droites et le point A.

3. (a) Déterminer l'équation de la droite d_1 passant par les points $A(540; -3776)$ et $B(-1001; 7011)$.
   (b) Représenter graphiquement d_1 en prenant une largeur de carré par unité.
   (c) Déterminer l'équation de la droite d_2 qui est parallèle à d_1 et passe par $C(200; -1402)$.
   (d) Représenter d_2 sur le même graphique que d_1.
   (e) Déterminer l'équation de la droite d_3 qui est perpendiculaire à d_1 et passe par l'origine.
   (f) Représenter d_3 sur le même graphique que d_1 et d_2.
   (g) Quel est l'angle formé par les droites d_2 et d_3 ?
   (h) Déterminer les points d'intersection des différentes droites entre elles.

4. (a) Représenter graphiquement la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$ en déterminant les points caractéristiques habituels s'ils existent (zéros, sommet, intersection avec l'axe des ordonnées) ainsi que d'autres points calculés "à la main" si nécessaire.
   (b) Représenter sur le même graphique la fonction g donnée par $g(x) = x^2 + x + 1$.
   (c) Calculer les coordonnées des points d'intersection (arrondi raisonnable). Comparer avec le graphique pour vérification.

5. Soit la fonction f donnée par $f(x) = 2 - 4x$.
   (a) Représenter graphiquement.
   (b) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.
   (c) Soit maintenant la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$. Construire sa représentation graphique à partir de celle de f.
   (d) Résoudre graphiquement $g(x) \geq 2$.

6. Faire le croquis d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bijective, mais telle que $f : [-4; 3] \to [-5; 7]$ soit bijective.

Table des matières

Sources

– *Formulaires et tables, Mathématiques, Physique, Chimie*
Commission Romande de Mathématique, Editions du Tricorne, Genève, 2000
– *Monographies de la Commission Romande de Mathématique 27, Notions élémentaires*
Commission Romande de Mathématique, Editions du Tricorne, Genève, 2005
– *Kusch Mathematik, Arithmetik und Algebra*
Cornelsen Verlag, Berlin, 2004
– Cours de M. Ducommun