

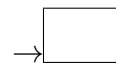
## Epreuve d'applications des mathématiques - 6.11.2017 - Corrigé

Nom:

Prénom:

Cours 3AMOS01

note =  $\frac{\text{total}}{45} \cdot 4.5 + 1.5 =$



### 1. Courbes 2D. ( / 7 pts.)

Il suffit d'effectuer les modifications suivantes:

```
1 t=0:2*pi/500:2*pi;  
2 x=2*cos(t);  
3 y=sin(t);  
4 plot(x,y)  
5 grid('on')  
6 xlabel('x')  
7 ylabel('y')  
8 axis([-2.5,2.5,-1.5,1.5], "equal")
```

et

```
1 t=0:2*pi/500:2*pi;  
2 x=(2+0.1*cos(20*t)).*cos(t);  
3 y=(1+0.1*cos(20*t)).*sin(t);  
4 plot(x,y)  
5 grid('on')  
6 xlabel('x')  
7 ylabel('y')  
8 axis([-2.5,2.5,-1.5,1.5], "equal")
```

### 2. Courbes 2D. ( / 7 pts.)

Il suffit d'effectuer les modifications suivantes:

```
1 t=0:2*pi/500:2*pi;  
2 x=(0.5+3*t/(4*pi)).*cos(5*t);  
3 y=(0.5+3*t/(4*pi)).*sin(5*t);  
4 plot(x,y)  
5 grid('on')  
6 xlabel('x')  
7 ylabel('y')  
8 axis([-2.5,2.5,-2.5,2.5], "equal")
```

et

```
1 t=0:2*pi/1000:2*pi;  
2 x=(0.5+3*t/(4*pi)+0.1*cos(100*t)).*cos(5*t);  
3 y=(0.5+3*t/(4*pi)+0.1*cos(100*t)).*sin(5*t);  
4 plot(x,y)  
5 grid('on')  
6 xlabel('x')  
7 ylabel('y')  
8 axis([-2.5,2.5,-2.5,2.5], "equal")
```

**3. Courbes 3D. ( / 10 pts.)**

Il suffit d'effectuer les modifications suivantes:

---

```

1 t=0:2*pi/1000:2*pi;
2 x=1+t/(2*pi);
3 y=sin(5*t);
4 z=cos(5*t);
5 plot3(x,y,z)
6 grid('on')
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 axis([0,2,-1,1,-1,1], "equal")

```

---

et

---

```

1 t=0:2*pi/5000:2*pi;
2 x=4*t;
3 y=cos(x).*sin(200*t);
4 z=cos(x).*cos(200*t);
5 plot3(x,y,z)
6 grid('on')
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 axis([0,4*pi,-1,1,-1,1], "equal")

```

---

**4. Courbes 3D. ( / 10 pts.)**

Il suffit d'effectuer les modifications suivantes:

---

```

1 t=0:2*pi/1000:2*pi;
2 x=2*cos(3*t);
3 y=sin(3*t);
4 z=t/(2*pi);
5 plot3(x,y,z)
6 grid('on')
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 axis([-2.5,2.5,-1.5,1.5,-0.5,1.5], "equal")

```

---

et

---

```

1 t=0:2*pi/1000:2*pi;
2 x=2*cos(3*t);
3 y=sin(3*t);
4 z=t/(2*pi)+0.1*sin(100*t);
5 plot3(x,y,z)
6 grid('on')
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 axis([-2.5,2.5,-1.5,1.5,-0.5,1.5], "equal")

```

---

**5. Cercle osculateur. ( / 11 pts.)**

(1) En dérivant, on trouve

$$\dot{q}(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{q}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cos(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$R(t) = \frac{(\dot{q}_1(t)^2 + \dot{q}_2(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{q}_1(t) \cdot \ddot{q}_2(t) - \ddot{q}_1(t) \cdot \dot{q}_2(t)|} = \frac{(4 \sin(2t)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{|4 \cos(2t)|}$$

$$\vec{X}(t) = \vec{q}(t) + \frac{\dot{q}_1(t)^2 + \dot{q}_2(t)^2}{\dot{q}_1(t) \cdot \ddot{q}_2(t) - \ddot{q}_1(t) \cdot \dot{q}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ t \end{pmatrix} + \frac{4 \sin(2t)^2 + 1}{4 \cos(2t)} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

(2) Il suffit de compléter le script comme suit

---

```

1 clear
2 nmax=200;
3 cmax=200;
4 tmax=4*pi;
5 %%Coordonnees parametriques de la courbe
6 function y=f(t)
7     y(1)=cos(2*t);
8     y(2)=t;
9 end
10 %%Formule pour le rayon de courbure
11 function y=h(t)
12     y=(4*sin(2*t)^2+1)^(3/2)/abs(4*cos(2*t));
13 end
14 %%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
15 function y=g(t)
16     y(1)=cos(2*t)+(4*sin(2*t)^2+1)/(4*cos(2*t))*(-1);
17     y(2)=t+(4*sin(2*t)^2+1)/(4*cos(2*t))*(-2*sin(2*t));
18 end
19 clf
20 for n=1:nmax
21     x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
22     y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
23 end
24 for m=1:cmax
25     n=round(m*nmax/cmax);
26     x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
27     x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
28     r(n)=h(n/nmax*tmax);
29     h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
30     h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
31     for k=1:200
32         c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
33         c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
34     end
35     plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
36     title('Courbes du plan et rayon de courbure')
37     xlabel('x')
38     ylabel('y')
39     axis([-5,5,-2,15],'equal')
40     pause(40/1000)
41 end

```

---

### 6. Rayon de courbure. ( / Bonus 5 pts.)

La courbe correspond à un cercle de rayon  $\pi$  centré en  $(-3; 2)$ . Par conséquent,  $\vec{X}(t) = (-3; 2)$  et  $R(t) = \pi$ .