

Epreuve d'applications des mathématiques - 6.11.2017

Nom:

Prénom:

Cours 3AMOS01

note = $\frac{\text{total}}{45} \cdot 4.5 + 1.5 =$

Matériel autorisé: Table numérique (“Formulaires et tables”) CRM personnelle non annotée
Calculatrice personnelle non programmable, non symbolique et non graphique-
Ordinateurs de la salle 1.50 au CdC

Attention: Tous vos calculs doivent figurer sur la feuille que vous rendez. Pour chaque exercice, veuillez justifier votre réponse et donner un résultat exact et simplifié au maximum, puis une approximation.

Durée: 95 minutes.

1. Courbes 2D. (/ 7 pts.)

Modifier le script *Octave* donné ci-dessous de manière à obtenir successivement les deux courbes de la figure 1 (recopier scrupuleusement les modifications directement sur le script à la place des ?).

```
1 t = ? : ? : ? ;
2 x = ? ;
3 y = ? ;
4 plot(x, y)
5 grid('on')
6 xlabel('x')
7 ylabel('y')
8 axis([-2.5, 2.5, -1.5, 1.5], "equal")
```

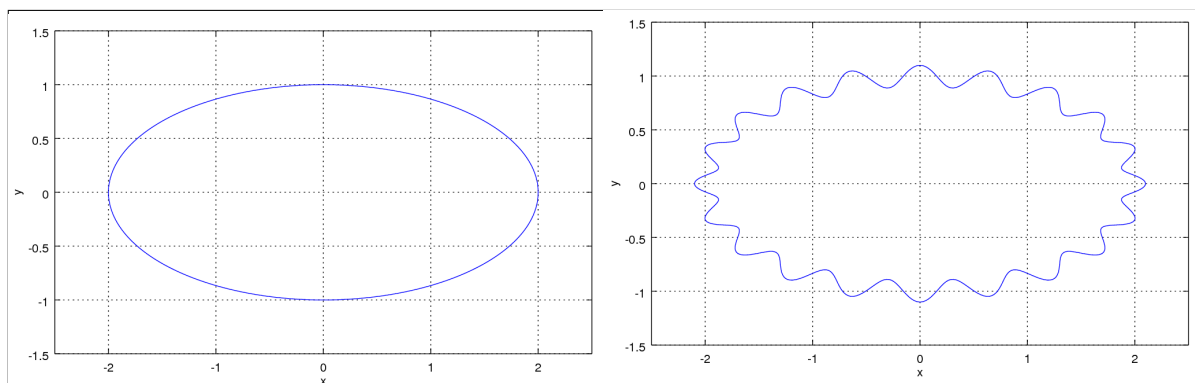


FIGURE 1. Exercice 1

2. Courbes 2D. (/ 7 pts.)

Modifier le script *Octave* donné ci-dessous de manière à obtenir successivement les deux courbes de la figure 2 (recopier scrupuleusement les modifications directement sur le script à la place des ?).

```

1 t=?:?:?;
2 x=?;
3 y=?;
4 plot(x,y)
5 grid('on')
6 xlabel('x')
7 ylabel('y')
8 axis([-2.5,2.5,-2.5,2.5],"equal")

```

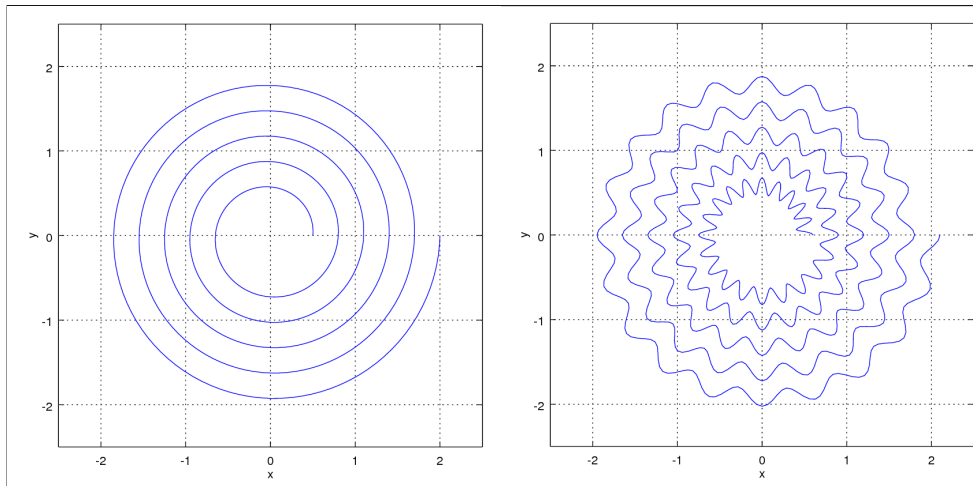


FIGURE 2. Exercice 2

3. Courbes 3D. (/ 10 pts.)

Modifier le script *Octave* donné ci-dessous de manière à obtenir successivement les deux courbes de la figure 3 (recopier scrupuleusement les modifications directement sur le script à la place des ?).

```

1 t=?:?:?;
2 x=?;
3 y=?;
4 z=?;
5 plot3(x,y,z)
6 grid('on')
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 axis([0,?, -1,1, -1,1], "equal")

```

4. Courbes 3D. (/ 10 pts.)

Modifier le script *Octave* donné ci-dessous de manière à obtenir successivement les deux courbes de la figure 4 (recopier scrupuleusement les modifications directement sur le script à la place des ?).

```

1 t=?:?:?;
2 x=?;
3 y=?;
4 z=?;
5 plot3(x,y,z)
6 grid('on')
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')

```

- 9 `zlabel('z')`
 10 `axis([-2.5,2.5,-1.5,1.5,-0.5,1.5], "equal")`

5. Cercle osculateur. (/ 11 pts.)

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ t \end{pmatrix}$$

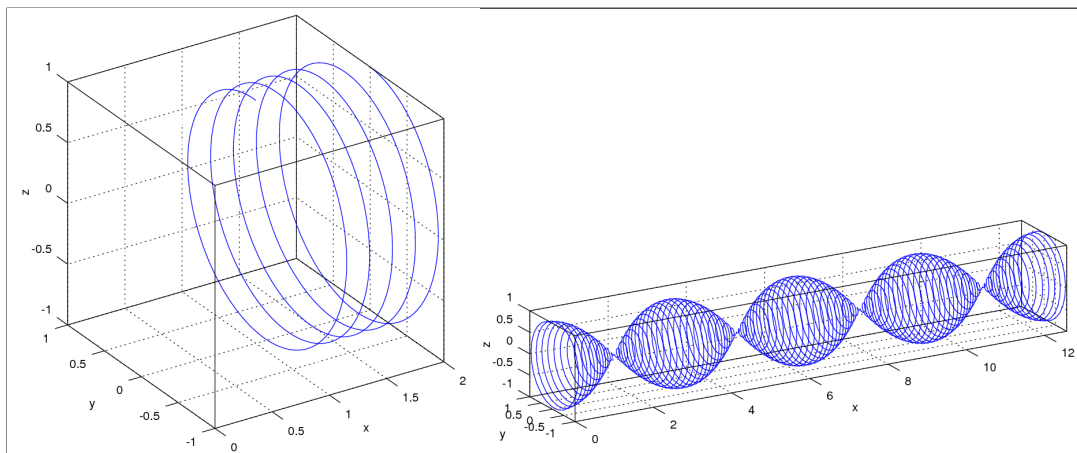


FIGURE 3. Exercice 3

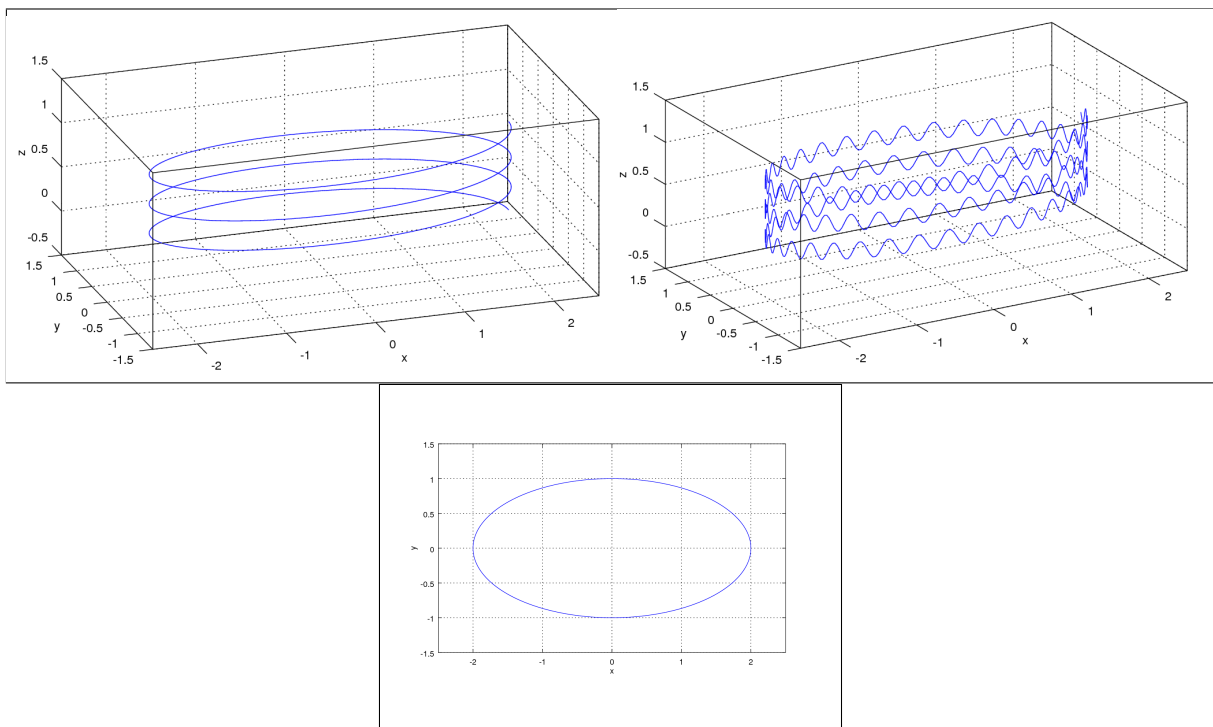


FIGURE 4. Exercice 4

Pour chaque valeur de t , on définit le cercle osculateur. Le rayon est donné par

$$R(t) = \frac{\left(\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)|}$$

et le centre par

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \frac{\dot{f}_1(t)^2 + \dot{f}_2(t)^2}{\dot{f}_1(t)\ddot{f}_2(t) - \ddot{f}_1(t)\dot{f}_2(t)} \begin{pmatrix} -\dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_1(t) \end{pmatrix}$$

- (1) Calculer le rayon et le centre du cercle osculateur.
- (2) Vérifier les calculs en exécutant avec Octave le script suivant (noter les modifications)

```

1 clear
2 nmax=200;
3 cmax=200;
4 tmax=4*pi;
5 %%Coordonnees parametriques de la courbe
6 function y=f(t)
7     y(1)=?;
8     y(2)=?;
9 end
10 %%Formule pour le rayon de courbure
11 function y=h(t)
12     y=?;
13 end
14 %%Formule pour la position du centre du cercle osculateur
15 function y=g(t)
16     y(1)=?;
17     y(2)=?;
18 end
19 clf
20 for n=1:nmax
21     x(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
22     y(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
23 end
24 for m=1:cmax
25     n=round(m*nmax/cmax);
26     x1(n)=g(n/nmax*tmax)(1);
27     x2(n)=g(n/nmax*tmax)(2);
28     r(n)=h(n/nmax*tmax);
29     h1(n)=f(n/nmax*tmax)(1);
30     h2(n)=f(n/nmax*tmax)(2);
31     for k=1:200
32         c1(k)=x1(n)+r(n)*cos((k/200)*2*pi);
33         c2(k)=x2(n)+r(n)*sin((k/200)*2*pi);
34     end
35     plot(x,y,'3',c1,c2,'2',h1(n),h2(n),'@13',x1(n),x2(n),'@31')
36     title('Courbes du plan et rayon de courbure')
37     xlabel('x')
38     ylabel('y')
39     axis([-5,5,-2,15],'equal')
40     pause(40/1000)
41 end

```

6. Rayon de courbure. (/ Bonus 5 pts.)

Calculer le rayon de courbure $R(t)$ ainsi que le centre du cercle osculateur $\vec{X}(t)$ de la courbe

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \pi \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

