Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen : Wiederholung und Vokabular

Da wir in den kommenden zwei Jahren in der Analysis mit (reellen) Funktionen arbeiten werden, scheint es nützlich einige Definitionen zu diesem Thema in Erinnerung zu rufen.

Definitionen : Bei einer **Abbildung** f von A nach B (schreibe $f : A \to B$) wird jedem Element $a \in A$ eindeutig ein Element (das **Bild**) $f(a) \in B$ zugeordnet.

Wir bezeichnen als **(reelle) Funktion** eine Abbildung $f : D_f \to \mathbb{R}$, deren Anfangs- und Bildmengen Untermengen von $\mathbb{R}$ sind.

Die Menge D_f heisst **Definitionsbereich** von f.

Der Ausdruck $x \mapsto f(x)$ ist die **Zuordnungsvorschrift** : dem **Argument** x wird der **Funktionswert** oder das **Bild** $f(x)$ zugeordnet.

Die **Bildmenge** oder das **Bild** der Funktion ist die Menge $f(D_f)$ aller Bilder $f(x)$ für die gilt : $x \in D_f$. (schreibe : $f(D_f) = \{f(x) \mid x \in D_f\}$)

Graphische Darstellung : Jedes Paar $(x; y)$ mit $y = f(x)$ kann als Koordinatenpaar eines Punktes $P(x; y)$ der Ebene in einem kartesischen Koordinatensystem gesehen werden. Der x-Wert heisst auch **Abzisse**, der y-Wert auch **Ordinate**. Die Menge aller Punkte $(x; f(x))$ mit $x \in D_f$ bildet die zu f gehörende **Kurve**.

Ein x-Wert ist eine **Nullstelle** von f, wenn gilt : $f(x) = 0$.

Beispiel : $f : x \mapsto \sqrt{x-1} - 1$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L1)

1. Eine Figur zeichnen, die nicht die Kurve einer Funktion sein kann.
2. Den Definitionsbereich und die Nullstellen der folgenden Funktionen bestimmen.
   (a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$
   (b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$
   (c) $f(x) = \sin(2x)$
   (d) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
3. Eine mögliche graphische Darstellung einer Funktion skizzieren, die folgende Bedingungen (a) - (c) **gleichzeitig** erfüllt.

   (Bemerkung : es gibt unendlich viele mögliche Darstellungen also unendlich viele Lösungen zu dieser Aufgabe.)

   (a) $D_f =]-\infty; -3[\cup [-1; 4[\cup \{6\} \cup]10; +\infty[$
   (b) $f(D_f) = \{-2; 0; 1\}$
   (c) die Menge der Nullstellen von f ist : $[-7; -3[\cup \{\pi\}$
4. Für die in Aufgabe 3 skizzierte Funktion die Zuordnungsvorschrift bestimmen (die „Formel" für $f(x)$ geben : $f(x) = \ \dots\ ?$)

   (Bemerkung : die Lösung zu dieser Frage ist abhängig von der graphischen Darstellung aus Aufgabe 3.)

2 Grenzwerte

2.1 Grenzwerte von Funktionen für $x \to \pm\infty$

2.1.1 Definition

Wir wollen untersuchen wie sich Funktionen verhalten, wenn x „sehr gross positiv wird" ($x \to (+)\infty$, sprich „x gegen (Plus) Unendlich") oder „sehr gross negativ wird" ($x \to -\infty$, sprich „x gegen Minus Unendlich").

Beispiel : Sei ein weisses Quadrat mit Seitenlänge 1 m. In einem ersten Schritt malt man genau die Hälfte der Fläche des Quadrates schwarz an. In einem zweiten Schritt malt man genau die Hälfte der nach dem ersten Schritt übriggebliebenen weissen Fläche auch schwarz an. In einem dritten Schritt malt man genau die Hälfte der nach dem zweiten Schritt übriggebliebenen weissen Fläche auch schwarz an. Und so weiter.

Sei $f(1)$ die Grösse der schwarzen Fläche nach dem ersten Schritt :

$$f(1) =$$

Sei $f(2)$ die Grösse der schwarzen Fläche nach dem zweiten Schritt :

$$f(2) =$$

Sei $f(3)$ die Grösse der schwarzen Fläche nach dem dritten Schritt :

$$f(3) =$$

Sei $f(n)$ die Grösse der schwarzen Fläche nach dem n-ten Schritt :

$$f(n) =$$

Was passiert mit $f(n)$, wenn n immer grösser wird ?

Bemerkung : Solche Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{N}$ nennt man **Zahlenfolgen** oder auch einfach nur **Folgen**.

Man kann sie separat von anderen Funktionen genauer und detaillierter behandeln, wir werden dies nicht tun, sondern allgemein reelle Funktionen untersuchen.

Beispiele : Rein intuitiv : was passiert für die folgenden Funktionen mit dem Funktionswert $f(x)$ für $x \to +\infty$? (Und für $x \to -\infty$?)

- $f(x) = 1$
- $f(x) = x$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x}$
- $f(x) = \sin(x)$

Für das Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x \to \infty$ errät man, dass $f(x)$ gegen 0 geht.

Wie kann man aber sicher sein, dass $f(x)$ immer näher an 0 geht und nicht an 0.0003 ? Oder an 0.000000007 ? Oder an 10^{-1000}?

Oder an einen klitzekleinen Wert $\varepsilon > 0$?

Für das Beispiel $f(x) = \frac{x+1}{x}$ und $x \to \infty$ errät man, dass $f(x)$ gegen 1 geht.

Warum nicht gegen 1.0003 ? Oder gegen 0.999 ?

Oder gegen $1 + \varepsilon$ oder $1 - \varepsilon$ für einen klitzekleinen Wert $\varepsilon > 0$?

Definition : Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heisst **Grenzwert** der Funktion f für $x \to \infty$, wenn alle Funktionswerte $f(x)$ in einem vorgegebenen Intervall um L liegen, sobald x grösser ist als eine geeignet gewählte Zahl.

Mathematisch ausgedrückt :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R}, \text{ so dass } x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Schreibe : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ (sprich : „Limes von $f(x)$ für x gegen ∞ gleich L")

Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heisst **Grenzwert** der Funktion f für $x \to -\infty$, wenn alle Funktionswerte $f(x)$ in einem vorgegebenen Intervall um L liegen, sobald x kleiner ist als eine geeignet gewählte Zahl.

Mathematisch ausgedrückt :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{R}, \text{ so dass } x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Schreibe : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ (sprich : „Limes von $f(x)$ für x gegen $-\infty$ gleich L")

Beispiel : Sei $f(x) = \frac{2x-7}{x+3}$.

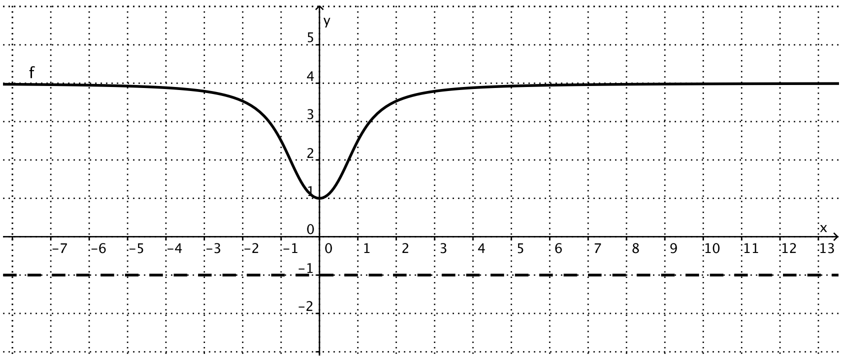
Intuitiv : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-7}{x+3} =$

Mit Hilfe der Definition können wir dies beweisen :

Und für $x \to -\infty$?

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L1)

1. Sei folgende graphische Darstellung einer Funktion f : (ohne weitere Angaben wird in diesem Kurs für solche Darstellungen angenommen, dass sich die Funktion ausserhalb des sichtbaren Bereichs nicht anders verhält als aufgrund des sichtbaren Teils anzunehmen ist)



   (a) Mit Hilfe der Definition und der graphischen Darstellung erklären warum die Aussage $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$ falsch ist.

   (b) Für welche ε-Werte in (a) existiert ein M wie in der Definition ?

2. Sei $f(x) = \frac{5x-3}{x+1}$

   (a) Intuitiv : was ist der Grenzwert für $x \to +\infty$? (Falls die Intuition nicht kommen will : mit dem Taschenrechner $f(x)$ für ein grosses x berechnen.)

   (b) Die Definition benutzen, um zu zeigen, dass diese Intuition richtig ist.

3. Dieselbe Aufgabe wie 2 für $x \to -\infty$.

4. Sei $f(x) = \frac{x+4}{1-2x}$

   (a) Intuitiv : was ist der Grenzwert für $x \to +\infty$?

   (b) Die Definition benutzen, um zu zeigen, dass diese Intuition richtig ist.

5. Dieselbe Aufgabe wie 4 für $x \to -\infty$.

6. Mit Hilfe der Definition zeigen, dass die Aussage $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 0$ falsch ist.

7. Mit Hilfe der Definition beweisen :

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-7}{1-x} = -3$

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-5x}{7x+3} = -\frac{5}{7}$

8. Mit Hilfe der Definition zeigen, dass die Aussage $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-4}{2x+1} = 0$ falsch ist.

2.1.2 Grenzwertsätze

Satz :

Wenn er in $\mathbb{R}$ existiert, ist der Grenzwert einer Funktion f für $x \to \infty$ eindeutig bestimmt.

(D.h. es ist unmöglich, dass zwei reelle Zahlen $L_1 \neq L_2$ existieren, die beide Grenzwert der Funktion f für $x \to \infty$ sind.)

Dieselbe Aussage gilt für $x \to -\infty$.

Beweis :

Dieser Beweis wird „ad absurdum" geführt : wir nehmen an (absurde Annahme), dass es zwei verschiedene Grenzwerte gibt und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt und wir unsere absurde Annahme daher verwerfen müssen.

Absurde Annahme : $L_1 < L_2$ sind beide Grenzwert von $f(x)$ für $x \to +\infty$.

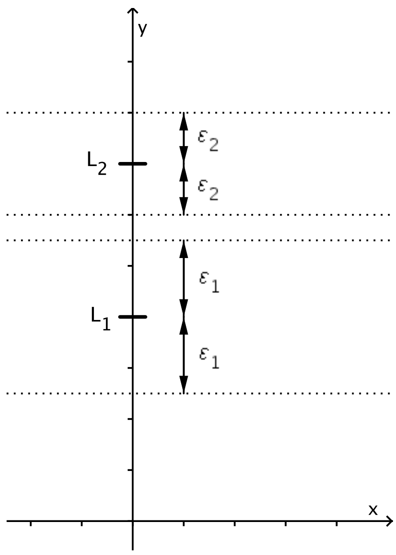
Dies bedeutet :

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists M_1 \in \mathbb{R},\ \text{so dass } x > M_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon_1 \quad (L_1\text{Grenzwert von } f)$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists M_2 \in \mathbb{R},\ \text{so dass } x > M_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon_2 \quad (L_2\text{Grenzwert von } f)$$

Für $x > max\,\{M_1; M_2\}$ (also für $x > M_1$ und $x > M_2$) hat man dann :

$$f(x) \in \left]L_1 - \varepsilon_1; L_1 + \varepsilon_1\right[\qquad \text{und} \qquad f(x) \in \left]L_2 - \varepsilon_2; L_2 + \varepsilon_2\right[$$



Graphisch kann man intuitiv schon erkennen, dass dies für „grosse" ε_1 und ε_2 zwar möglich ist, weil sich die beiden Intervalle dann überschneiden, aber für „zu kleine" ε_1 und ε_2 nicht mehr möglich ist, weil die beiden Intervalle dann keine gemeinsamen Elemente mehr besitzen (z.B. für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{L_2 - L_1}{2}$, also die Hälfte des Abstands zwischen den beiden Grenzwerten).

Formell : nimmt man $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{L_2 - L_1}{2}$, dann folgt :

$$f(x) \in \left]L_1 - \tfrac{L_2-L_1}{2} ; L_1 + \tfrac{L_2-L_1}{2}\right[\quad \text{und} \quad f(x) \in \left]L_2 - \tfrac{L_2-L_1}{2} ; L_2 + \tfrac{L_2-L_1}{2}\right[$$

Also :

$$f(x) \in \left]\tfrac{3L_1-L_2}{2} ; \tfrac{L_1+L_2}{2}\right[\quad \text{und} \quad f(x) \in \left]\tfrac{L_1+L_2}{2} ; \tfrac{3L_2-L_1}{2}\right[$$

Hieraus folgt aber, dass $f(x)$ gleichzeitig folgende Ungleichungen erfüllen muss :

$$f(x) < \tfrac{L_1+L_2}{2} \qquad \text{und} \qquad f(x) > \tfrac{L_1+L_2}{2}$$

was einen Widerspruch darstellt.

Wir müssen also unsere absurde Annahme verwerfen.

(Der Beweis für $x \to -\infty$ ist analog zu führen.)

Satz : (ohne Beweis)

Wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren, dann existieren die folgenden Grenzwerte und es gilt :

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to\infty} (\lambda f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x)$$

für $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \neq 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}$

Die Aussagen gelten ebenfalls für $x \to -\infty$

2.1.3 Rechnen mit $\pm\infty$

Die Rechenregeln mit reellen Zahlen sind klar. Beim Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen kann es aber auch vorkommen, dass man Ergebnisse mit $\pm\infty$ erhält.

Versuchen wir deshalb auch für das Rechnen mit $\pm\infty$ einige Regeln aufzustellen, d.h. versuchen wir die Definitionen und Grenzwertsätze aus dem vorgehenden Paragraphen auf $\pm\infty$ auszuweiten.

Achtung : Dies machen wir bloss intuitiv und ohne formelle Definition oder Beweise !

für $\lambda \in \mathbb{R}$: „$\lambda \pm \infty$" bzw. „$\pm\infty + \lambda$"

für $\lambda \in \mathbb{R}^*$: „$\lambda \cdot (\pm\infty)$" bzw. „$(\pm\infty) \cdot \lambda$"

für $\lambda \in \mathbb{R}$: „$\frac{\lambda}{\pm\infty}$"

„$\infty + \infty$" bzw. „$-\infty - \infty$"

„$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty)$"

In diesen Fällen kann man die Grenzwertsätze für Summen, Produkte, usw. direkt anwenden und erhält ein klares Ergebnis. Dies sind die „klaren Fälle", die Grenzwerte der Funktionen sind direkt bestimmbar.

„$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$"

„$\infty - \infty$" bzw. „$-\infty + \infty$"

„$0 \cdot (\pm\infty)$"

Dies sind **„unklare Fälle"**, man kann die Grenzwertsätze nicht direkt anwenden, es ist ein wenig mehr Arbeit nötig, um die Grenzwerte zu bestimmen (falls sie existieren).

2.1.4 Grenzwerte von ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen für $x \to \pm\infty$

Definition :

Eine Funktion f heisst **ganzrationale** Funktion n-ten Grades, wenn die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ folgende Form hat

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.

Beispiel :

$\lim\limits_{x\to\infty} (-3x^3 + 5x^2 - 6) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3 + 5x^2 - 6) =$

Definition :

Eine Funktion f heisst **gebrochenrationale** Funktion, wenn die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ folgende Form hat

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

mit $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ und $b_0, \ldots, b_m$ nicht alle gleich 0.

Beispiel :

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-6x^3+5x^2-7x+2}{2x^3-1} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x^3+5x^2-7x+2}{2x^3-1} =$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L4)

1. Folgende Grenzwerte berechnen, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+x}{x^7+3x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^{13}}{x^5-x^2+1254}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x^2-1)^3}{4x^6-5x^2+16}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x+3}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{-3x^3+1}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{1-x}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(5x+3)^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x+2}{4x+4}$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{(-2x+1)^3}$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+2}$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x}$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2}$

(q) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3}$

(r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left((x-7)^3(x-5)^4\right)^{12}}{(1-x^{12})^7}$

2. Dieselbe Aufgabe wie 1, bloss für $x \to -\infty$.

3. Sei $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$.

Folgende Aussagen beweisen :

(a) $n < m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

(b) $n = m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

(c) $n > m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$

und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ und } n-m \text{ ungerade} \\ +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ und } n-m \text{ gerade} \\ +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ und } n-m \text{ ungerade} \\ -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ und } n-m \text{ gerade} \end{cases}$

2.1.5 Grenzwerte mit Wurzelfunktionen für $x \to \pm\infty$

Satz : (ohne Beweis)

Wenn $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert und grösser oder gleich Null ist (auch $+\infty$ ist erlaubt), dann gilt :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$$

Eine analoge Aussage gilt für $x \to -\infty$, sowie für andere Wurzeln (z.B. $\sqrt[3]{f(x)}$).

„Satz" : (ohne Beweis)

„$\sqrt{+\infty} = +\infty$" (analoge Aussagen gelten für andere Wurzeln)

Beispiel :

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3} =$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3} =$

Wie können wir mit unklaren Fällen, in denen eine Wurzelfunktion vorkommt, umgehen ?

Versuchen wir folgende Grenzwerte zu berechnen :

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-2x+3} =$

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^4-6x^3+1}}{5x^2-12x+3} =$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^4-x^2+1}-3x^2+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x-7}-2x^2+3\right)=$$

Wenn eine Wurzel in einer Addition oder Subtraktion vorkommt und dies zu einem unklaren Fall („$\infty - \infty$") führt, ohne dass einfaches Ausklammern genügt, benutzt man die Formeln zum Faktorisieren aus dem ersten Jahr. Mit ihrer Hilfe erweitert man den Ausdruck, um den unklaren Fall verschwinden zu lassen.

Frage : Wie erkennt man bei einem unklaren Fall „$\infty - \infty$" mit Wurzeln, ob einfaches Ausklammern genügt ?

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L7)

1. Folgende Grenzwerte berechnen, falls sie existieren.

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 5} - 2x - 1\right)$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x - 7} + x}{2x + \sqrt{4x^2 + x + 7}}$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x + 4 - \sqrt{9x^2 + 8x - 7}\right)$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 17} - 3x}{5x + \sqrt{5x^2 - 12}}$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 5}\right)$

(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}{x + 1}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5x - \sqrt{3x^2 + 1}\right)$

(h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}\right)$

(k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x + 1}$

(l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - \sqrt{9x^2 - 7x}}{\sqrt{x^2 + x} + x}$

(m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 5}}{x + 3}$

(n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$

(o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}\right)$

(p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt[3]{8x^3 + 9x^2 + 13x - 7}\right)$

2. Dieselben Aufgaben wie in 1 für $x \to -\infty$.

2.2 Grenzwerte von Funktionen für $x \to a \in \mathbb{R}$, Stetigkeit

2.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \to a \in \mathbb{R}$

Definitionen :

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei f eine Funktion die in einem Intervall um a definiert ist, aber nicht unbedingt in a selbst.

Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heisst **linksseitiger Grenzwert** der Funktion f für $x \to a$, wenn alle Funktionswerte $f(x)$ in einem vorgegebenen Intervall um L liegen, sobald $x < a$ nah genug an a ist.

(Mathematisch : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $a - \delta < x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$)

Schreibe : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = L$ oder $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ oder $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = L$

Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heisst **rechtsseitiger Grenzwert** der Funktion f für $x \to a$, wenn alle Funktionswerte $f(x)$ in einem vorgegebenen Intervall um L liegen, sobald $x > a$ nah genug an a ist.

(Mathematisch : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $a < x < a + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$)

Schreibe : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = L$ oder $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ oder $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = L$

Der **Grenzwert** der Funktion f für $x \to a$ existiert, falls der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f für $x \to a$ existieren und gleich sind.

$$\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = L \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

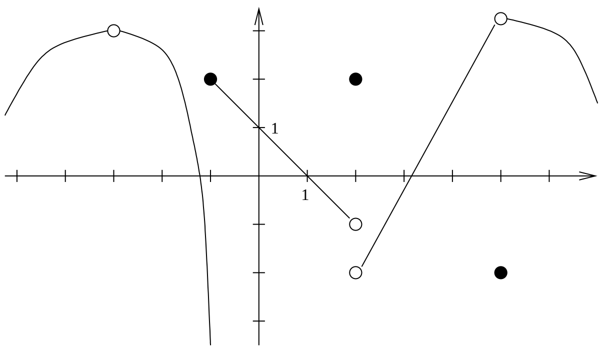
(Mathematisch : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$)

Bermerkungen : (ohne Beweise)

1. Wie bei Grenzwerten für $x \to \pm\infty$, weitet man auch für $x \to a$ die Schreibweise auf unendliche Ergebnisse aus.
2. Die Grenzwertsätze und Rechenregeln mit Unendlich, die wir für $x \to \pm\infty$ benutzt haben, sind auch für Grenzwerte mit $x \to a$ gültig.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L11)

Gegeben ist folgende graphische Darstellung einer Funktion f.



1. An welchen Stellen ist f nicht definiert ?
2. Für welche Stellen a existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nicht ?
3. Für die Stellen a, wo der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nicht existiert, die links- und rechtsseitigen Grenzwerte angeben, falls sie existieren.
4. Für welche Stellen a ist die Aussage $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ falsch ? Und warum ?

2.2.2 Stetigkeit

Definition :

Gegeben sei eine Funktion f, die in einem Intervall um die Stelle a definiert ist und auch in a definiert ist. Die Funktion heisst an der Stelle a **stetig**, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{existiert} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{erfüllt ist,}$$

das heisst an der Stelle a der Grenzwert gleich dem Funktionswert ist.

Eine Funktion f heisst auf der Menge A stetig, wenn f an jeder Stelle $a \in A$ stetig ist.

Graphische Beispiele :

Satz : (ohne Beweis)

Die folgenden Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

$$f(x) = c \qquad (c \in \mathbb{R}) \qquad\qquad f(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = x \qquad\qquad\qquad\qquad f(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Satz : (ohne Beweis)

Wenn f und g an der Stelle a stetig sind, dann ist

$f + g$ an der Stelle a stetig,

$\lambda \cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ an der Stelle a stetig,

$f \cdot g$ an der Stelle a stetig,

$\frac{f}{g}$ an der Stelle a stetig, wenn $g(a) \neq 0$ ist.

Wenn f an der Stelle a stetig ist und g an der Stelle $b = f(a)$ stetig ist, dann ist

$g \circ f$ an der Stelle a stetig

Korollar :

Ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

„Beweis" :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L11)

1. Genau erklären warum folgende Funktion f auf $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$ stetig ist :

$$f(x) = \frac{\sin(3x-7)+12x}{x+7}$$

2. Den Stetigkeitsbereich der Funktion f bestimmen.

   Genau begründen.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$$

3. Eine Funktion f graphisch darstellen, welche die Bedingungen (a) - (h) **gleichzeitig** erfüllt und den Bereich bestimmen auf dem f stetig ist.

   (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

   (b) f ist in 0 nicht stetig

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$

   (d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = f(1)$

   (e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht

   (f) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = +\infty$

   (g) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ existiert

   (h) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -\infty$

4. Eine Funktion f graphisch darstellen, welche die Bedingungen (a) - (h) **gleichzeitig** erfüllt und den Bereich bestimmen auf dem f stetig ist.

   (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0; 7\}$

   (b) f ist in -2 nicht stetig

   (c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ existiert

   (d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) + 1$

   (e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -\infty$

   (f) $\lim\limits_{\substack{x \to 8 \\ >}} f(x) = f(8)$

   (g) f ist in 8 stetig

   (h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

5. Gegeben ist die Funktion f mit Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x-7 & ,\text{ für } x<4 \\ 1 & ,\text{ für } x=4 \\ x^2-15 & ,\text{ für } x>4 \end{cases}$$

Den Bereich auf dem f stetig ist bestimmen.

6. Gegeben ist die Funktion f mit Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} a & ,\text{ für } x<3 \\ 2 & ,\text{ für } x=3 \\ x+b & ,\text{ für } x>3 \end{cases}$$

Die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass f in 3 stetig ist.

7. Gegeben ist die Funktion f mit Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} x^2-a & ,\text{ für } x<1 \\ -\sqrt{x+8} & ,\text{ für } x\geq 1 \end{cases}$$

   (a) Den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass f in 1 stetig ist.

   (b) Dann den Stetigkeitsbereich von f bestimmen.

8. Den Stetigkeitsbereich folgender Funktionen bestimmen.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{ für } x=0 \\ \frac{x}{|x|} & ,\text{ für } x\neq 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = x + |x|$

9. (a) Wie könnte sich eine Funktion verhalten, die an keiner Stelle stetig ist ?

   (b) Welche Zuordnungsvorschrift könnte sie haben ? ($f(x) = \ldots$?)

2.2.3 Stetigkeitssätze

Folgende Sätze werden wir nicht beweisen, sondern nur illustrieren.

Satz von der Beschränktheit : (ohne Beweis)

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall $[a;b]$ stetig ist, dann ist f dort beschränkt, d.h. es gibt Schranken s und S mit der Eigenschaft

$$s \leq f(x) \leq S \qquad \text{für alle } x \in [a;b]$$

und „noch besser" :

Satz vom Minimum und Maximum : (ohne Beweis)

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall $[a;b]$ stetig ist, dann existieren eine Minimalstelle $x_m \in [a;b]$ und eine Maximalstelle $x_M \in [a;b]$ mit der Eigenschaft

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \text{für alle } x \in [a;b]$$

Zwischenwertsatz : (ohne Beweis)

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall $[a;b]$ stetig ist, dann nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

Nullstellensatz : (Korollar des vorherigen Satzes)

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall $[a;b]$ stetig ist und $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben, dann gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in [a;b]$, die eine Nullstelle ist, d.h. für die gilt $f(x_0) = 0$.

Was kann man für Funktionen sagen, welche die Annahmen der Sätze nicht erfüllen ?

2.2.4 Berechnung von Grenzwerten für $x \to a$ (ganz- und gebrochenrationale Funktionen, Funktionen mit Wurzeln, Funktionen mit Absolutwerten)

Beispiele :

1. $\lim\limits_{x \to -1} \left(3x^2 - 5x + 13\right)$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-5}{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

Es gibt also neue Fälle :

„$\frac{0}{0}$" : unklarer Fall

- Bei gebrochenrationalen Funktionen behandelt man diesen Fall mit faktorisieren und kürzen.
- Ist eine Wurzel vorhanden die Probleme macht, behandelt man sie mit dem Trick „a^2-b^2" und faktorisiert und kürzt danach eventuell noch.

„$\frac{\lambda}{0}$" mit $\lambda \neq 0$: kein unklarer Fall **aber** es ist nötig zwischen „0^+" und „0^-" zu unterscheiden.

- „$\frac{\lambda}{0^+}$"
- „$\frac{\lambda}{0^-}$"

Dies muss im allgemeinen mit links- und rechtsseitigen Grenzwerten untersucht werden.

Bemerkung :

Ein anfangs unklarer Fall „$\frac{0}{0}$" kann nach entsprechender Behandlung zu einem klaren Fall führen, erneut zu einem Fall „$\frac{0}{0}$" oder auch zu einem Fall „$\frac{\lambda}{0}$" (mit $\lambda \neq 0$). Diese neuen Fälle behandelt man wie ein neues Problem, wie eine neue Aufgabe.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L13)

1. Folgende Grenzwerte berechnen, falls sie existieren. In den Fällen wo der Grenzwert nicht existiert die links- und rechtsseitigen Grenzwerte angeben.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{2x^2+x-3}$

(i) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

(j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

(l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x}{x+2}$

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$

(n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3-2}{x^3+x^2-2}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^4-\frac{3}{x}}{x^5-x+\frac{1}{x}}$

(q) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

(r) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

(s) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2-4}$

(t) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(u) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$

2. Folgende Grenzwerte berechnen, falls sie existieren. In den Fällen wo der Grenzwert nicht existiert die links- und rechtsseitigen Grenzwerte angeben.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-x-1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$

(c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-x+2}{x-4}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$

(h) $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$

(i) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-2x+7}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}$

(o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x}}$

3. Folgende Grenzwerte berechnen, falls sie existieren. In den Fällen wo der Grenzwert nicht existiert die links- und rechtsseitigen Grenzwerte angeben.

   In den Fällen (a) - (d) die Funktion, von der der Grenzwert berechnet wird, graphisch darstellen.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{|x|}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{|x|}$

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+19x-7}{|3x-1|}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-3|-|2x+3|}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x^2-1|}{x^2-2x+1}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x|-1}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{|x-1|}$

2.2.5 Grenzwerte mit trigonometrischen Funktionen für $x \to a$

Bemerkung : (zur Erinnerung)

Die Sinus- und Cosinusfunktionen sind auf $\mathbb{R}$ stetig. Also gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$$

Beispiele :

In klaren Fällen ist die Berechnung von Grenzwerten auch mit trigonometrischen Funktionen nicht schwierig :

1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \sin(x) =$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{4\pi}{111}} \cos(x) =$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \sin(3x)$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} =$

Bemerkung :

Vorsicht beim Rechnen mit dem Taschenrechner : die Ergebnisse sind nicht dieselben, wenn die trigonometrischen Funktionen mit „°" oder mit „*rad*" rechnen. Wenn in den Aufgaben nichts weiter gesagt wird, ist „*rad*" der Standard!

Die meisten unklaren Fälle lassen sich auf den Fall

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

zurückführen :

Beispiele :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}=\frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}}$

   $\displaystyle=\frac{2}{5}\cdot\lim_{a\to 0}\frac{\sin(a)}{a}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{b\to 0}\frac{\sin(b)}{b}}=\ ?$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}=\ ?$

Wenn wir den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ bestimmen können, lösen wir also mehr als nur ein Problem.

Mit dem Taschenrechner erhält man :

x	$\dfrac{\sin(x)}{x}$
$0.1=10^{-1}$	
$0.01=10^{-2}$	
$0.001=10^{-3}$	
$0.0001=10^{-4}$	
$0.00001=10^{-5}$	
$0.000001=10^{-6}$	

Vermutung :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=$$

Um unsere Vermutung $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ zu beweisen, werden wir folgenden Satz benutzen :

Satz : (Satz der zwei Gendarmen oder **Sandwichsatz**) (ohne Beweis)

Gegeben sind drei Funktionen f, g, h definiert in einem Intervall um eine Stelle a (aber nicht unbedingt in a selbst).

Wenn in diesem Intervall um a folgende Ungleichung gilt :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

und wenn gilt :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ ebenfalls und es gilt auch :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

Bemerkungen :

- Ein „ähnlicher" Satz besagt : wenn in einem Intervall um a gilt : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ und wenn alle drei Grenzwerte existieren, dann gilt :

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x) \leq \lim_{x \to a} h(x)$$

- Diese Sätze gelten auch für einseitige Grenzwerte.

Satz : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

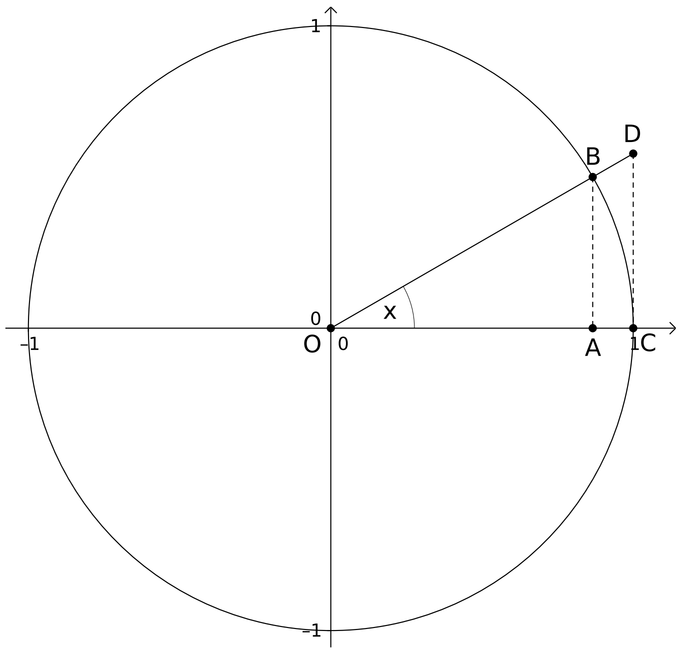
Beweis :

Die Funktion gegeben durch $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ ist gerade : d.h. $f(-x) = f(x)$.

Graphisch bedeutet dies :

Es reicht deshalb zu beweisen, dass $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ ist.

Dafür vergleicht man Flächeninhalte im trigonometrischen Einheitskreis :



Für $x > 0$ aber nah bei 0 gilt :

Fläche $\Delta OAB <$ Fläche des Kreissektors $OCB <$ Fläche ΔOCD

$$\frac{OA \cdot AB}{2} < \frac{x}{2} < \frac{OC \cdot CD}{2}$$

$$OA \cdot AB < x < OC \cdot CD$$

$$\cos(x) \cdot \sin(x) < x < 1 \cdot \tan(x)$$

$$\cos(x) \cdot \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\frac{1}{\cos(x)} > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Es gilt auch :

$$\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

Daraus folgt :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L19)

1. Folgende Grenzwerte berechnen, falls sie existieren. In den Fällen wo der Grenzwert nicht existiert, die links- und rechtsseitigen Grenzwerte angeben.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(7x)}{\sin(3x)}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x^2+x}$

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \big((1+\sin(x))\cdot\tan^2(x)\big)$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x}$ $\qquad a\neq 0$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

(o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(x)}{x\cdot\tan(x)}$

(q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(2x)}{1-\cos(3x)}$

(s) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)}$

(t) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(x)}{x}$

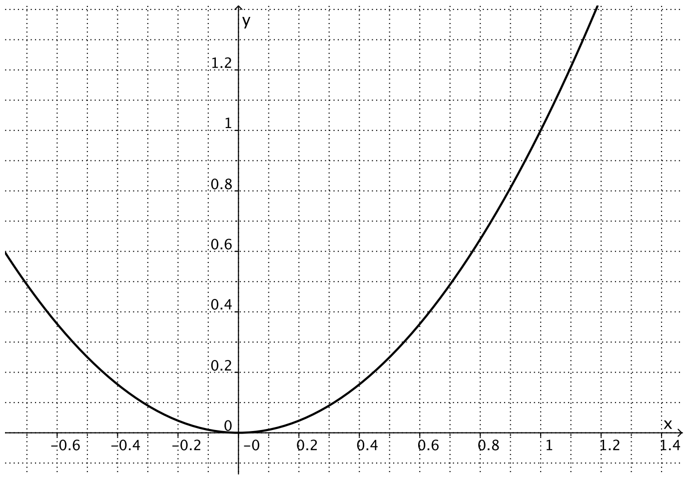
2. Vergisst man beim Taschenrechner *rad* statt *deg* einzustellen, d.h. wenn man mit *deg* rechnet, erhält man für annähernde Ergebnisse von $\dfrac{\sin(x)}{x}$ für x nah bei 0 nicht 1 sondern ungefähr (!) 0.017453293

   Welchen genauen Wert stellt diese Annäherung dar ? Warum ?

3 Differentialrechnung

3.1 Erste Ableitung

Sei die Funktion f gegeben durch $f(x) = x^2$. Gegeben ist auch folgendes Schaubild der Funktion f :



Liegen die Punkte $(0;0)$ und $(1;1)$ auf dem Graphen der Funktion ?

Die Gerade durch die Punkte $(0;0)$ und $(1;1)$ zeichnen und ihre Steigung berechnen.

Liegt der Punkt $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ ebenfalls auf dem Graphen der Funktion ?

Die Gerade durch die Punkte $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ und $(1;1)$ zeichnen und ihre Steigung berechnen.

Liegt der der Punkt $\left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right)$ ebenfalls auf dem Graphen der Funktion ?

Die Gerade durch die Punkte $\left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right)$ und $(1;1)$ zeichnen und ihre Steigung berechnen.

Liegt der Punkt $\left(\frac{7}{8};\frac{49}{64}\right)$ ebenfalls auf dem Graphen der Funktion ?

Die Gerade durch die Punkte $\left(\frac{7}{8};\frac{49}{64}\right)$ und $(1;1)$ zeichnen und ihre Steigung berechnen.

Versuchen die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $(1;1)$ zu erraten und diese Antwort intuitiv begründen.

3.2 Ableitung an einer Stelle

Definition :

Sei $a \in \mathbb{R}$ und f eine Funktion, die in einem Intervall um a und auch in a selbst definiert ist. Die Funktion f heisst an der Stelle a **ableitbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

Wenn ja schreibt man

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

und nennt $f'(a)$ (sprich : „f Strich von a ...") die **(erste) Ableitung** von f **an der Stelle** a.

Eine andere Schreibweise für den Grenzwert ist

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Bemerkung :

Eine weitere Schreibweise für die Ableitung einer Funktion f an der Stelle a ist $\dfrac{df}{dx}(a)$. Diese Schreibweise hat den Vorteil daran zu erinnern, dass es sich bei der Ableitung um eine Änderungsrate handelt : wie verändert sich f im Verhältnis zu x ?

In der Physik wird diese Schreibweise häufig benutzt. Wenn die Position als Funktion der Zeit gegeben ist durch $x(t)$, dann ist die Momentangeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t_0 gegeben durch $\dfrac{dx}{dt}(t_0)$.

Beispiel :

Sei $f(x) = x^2$. Existiert $f'(1)$?

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L20)

1. Die Ableitung von f an der Stelle a bestimmen, falls sie existiert.

   (a) $f(x) = x + 3$, $a = 2$

   (b) $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $a = -3$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, $a = 1$

   (d) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$

   (e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $a = 0$

   (f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 9$

2. Sind folgende Funktionen in a ableitbar ?

   Die Antwort mit Hilfe der Definition bestimmen.

   Die Funktion dann graphisch darstellen und mit dem rechnerischen Ergebnis vergleichen.

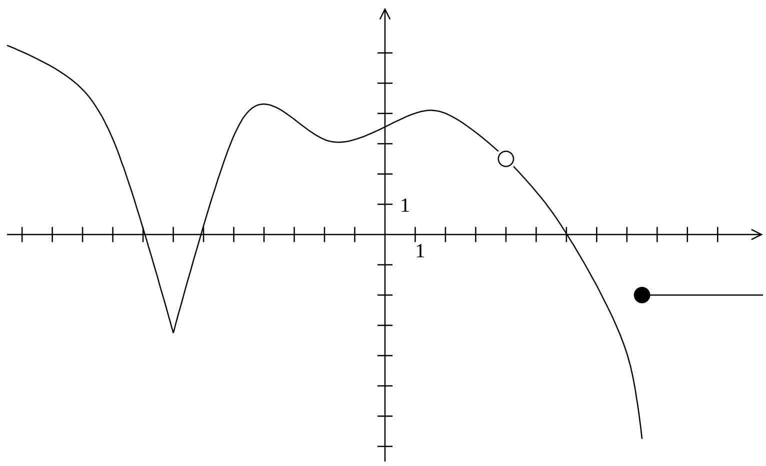
   (a) $f(x) = |x|$, $a = 0$

   (b) $f(x) = |x - 2|$, $a = 2$

   (c) $f(x) = x \cdot |x|$, $a = 0$

   (d) $f(x) = |x^2 - 1|$, $a = -1$

3. An welchen Stellen a die auf dem Schaubild sichtbar sind, ist die dargestellte Funktion nicht ableitbar ? Begründen.



3.2.1 Ableitungsfunktion

Für die Funktion f, gegeben durch $f(x) = x^2$, kennen wir bereits $f'(1)$.

Existiert $f'(2)$? $f'(0)$? $f'(-13.5)$? usw.

Wir können nicht für alle Stellen einzeln die Ableitung berechnen, aber wir können untersuchen für welche Stellen $a \in \mathbb{R}$ f ableitbar ist, und welche Form $f'(a)$ annimmt :

Definition :

Sei f eine Funktion und eine Menge A auf der f ableitbar ist (d.h. $f'(a)$ existiert für alle $a \in A$). Die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f': & A & \to & \mathbb{R} \\ & a & \mapsto & f'(a) \end{array}$$

heisst **(erste) Ableitung** der Funktion f.

Um die gewöhnliche Funktionsschreibweise zu benutzen, ersetzt man a durch x :

$$x \mapsto f'(x)$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L22)

Die Menge auf der f ableitbar ist bestimmen und die Ableitung $f'(x)$ angeben.

1. $f(x) = x + 3$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = 4x^2 + 5x + 6$
4. $f(x) = x^3 + 3x$
5. $f(x) = x^4$
6. $f(x) = \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
8. $f(x) = \sqrt{x}$

3.3 Ableitungen elementarer Funktionen

Satz :

Sei $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f'(x) =$

Beweis :

Satz :

Sei $f(x) = x$. Dann ist $f'(x) =$

Beweis :

Satz :

Sei $f(x) = \sin(x)$. Dann ist $f'(x) =$

Beweis :

Satz :

Sei $f(x) = \cos(x)$. Dann ist $f'(x) =$

Beweis :

3.4 Stetigkeit und Ableitbarkeit

Satz :

Wenn eine Funktion f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ ableitbar ist, dann ist sie auch in a stetig.

Beweis :

Wir müssen beweisen, dass $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und gleich $f(a)$ ist.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) + \lim_{x \to a} f(a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + \lim_{x \to a} f(a) \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Frage :

Gilt ebenfalls die umgekehrte Aussage : „wenn eine Funktion f an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist sie auch in a ableitbar" ?

3.5 Rechenregeln

Die folgenden Rechenregeln werden uns das bestimmen von Ableitungen erleichtern.

3.5.1 Faktorregel

Satz : (Faktorregel)

Gegeben sind die Funktion f, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann ist die Funktion $\lambda \cdot f$ in a ableitbar und es gilt :

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$$

Beweis :

Wir müssen beweisen, dass $(\lambda \cdot f)'(a)$ existiert und gleich $\lambda \cdot f'(a)$ ist.

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(\lambda \cdot f)(x) - (\lambda \cdot f)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \\
&= \lambda \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\
&= \lambda \cdot f'(a)
\end{aligned}$$

Beispiel :

$f(x) = 7x^2 \Rightarrow f'(x) = ?$

3.5.2 Summenregel

Satz : (Summenregel)

Gegeben sind f und g, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$.

Dann ist die Funktion $f+g$ in a ableitbar und es gilt

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Beweis :

Wir müssen beweisen, dass $(f+g)'(a)$ existiert und gleich $f'(a)+g'(a)$ ist.

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-(f(a)+g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)+g'(a)
\end{aligned}$$

Beispiel :

$f(x) = \sin(x) + x \Rightarrow f'(x) = ?$

3.5.3 Produktregel

Satz :

Gegeben sind f und g, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$.

Dann ist die Funktion $f \cdot g$ in a ableitbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Beweis :

Wir müssen beweisen, dass $(f \cdot g)'(a)$ existiert und gleich $f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ ist.

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) \right) + \lim_{x \to a} \left(f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)
\end{aligned}$$

Beispiel :

$f(x) = \cos(x) \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) =$

3.5.4 Ableitung von x^n

Satz :

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $f(x) = x^n$. Dann gilt : $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Beweis : (Induktionsbeweis)

Bemerkung :

Wieso haben wir im Fall $n = 1$ etwas „geschummelt" ?

Beispiel :

$f(x) = \dfrac{x^{12}}{6} \Rightarrow f'(x) =$

3.5.5 Quotientenregeln

Satz : (Ableitung von $\frac{1}{g}$)

Gegeben ist g, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$, $g(a) \neq 0$ und $g \neq 0$ in einem Intervall um a. Dann ist die Funktion $\frac{1}{g}$ in a ableitbar und es gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$$

Beweis :

Wir müssen beweisen, dass $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$ existiert und gleich $-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$ ist.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{g(a)-g(x)}{(x-a)g(a)g(x)} \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{-1}{g(a)} \cdot \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{-1}{g(a)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} \\
&= g'(a) \cdot \frac{-1}{g(a)} \cdot \frac{1}{g(a)} \\
&= -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

Beispiel :

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = ?$

Satz : (Quotientenregel)

Gegeben sind f und g, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$, $g(a) \neq 0$ und $g \neq 0$ in einem Intervall um a. Dann ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in a ableitbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

Beweis :

Wir müssen beweisen, dass $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$ existiert und gleich $\frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$ ist.

$\frac{1}{g}$ ist in a ableitbar

$\Rightarrow \frac{f}{g}$ ist in a ableitbar

Und es gilt :

$$\begin{aligned}
\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) &= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}\right) \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} \\
&= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}
\end{aligned}$$

Beispiel :

$f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1} \Rightarrow f'(x) = ?$

3.5.6 Kettenregel

Satz : (Kettenregel)

Gegeben sind f ableitbar in $a \in \mathbb{R}$ und g ableitbar in $f(a)$. Dann ist die Funktion $g \circ f$ in a ableitbar und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Versuch eines Beweises : (wir versuchen es erst einmal mit der Methode die wir bisher benutzt haben)

Wir müssen beweisen, dass $(g \circ f)'(a)$ existiert und gleich $g'(f(a)) \cdot f'(a)$ ist.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \tfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \tfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \left(\tfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \cdot \tfrac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\tfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \tfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \tfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot f'(a) \\
&= \lim_{y \to f(a)} \tfrac{g(y) - g(f(a))}{y-f(a)} \cdot f'(a) \\
&= g'(f(a)) \cdot f'(a)
\end{aligned}$$

Wieso funktioniert dieser Beweis nicht mit allen Funktionen f, die den Annahmen entsprechen ?

Skizze einer solchen Funktion :

Beweis : (diesmal wirklich)

Beispiele :

$f(x) = \cos\left(x^2 + 2x - 1\right) \Rightarrow f'(x) = ?$

$g(x) = \left(x^3 - x^2\right)^{7000} \Rightarrow g'(x) = ?$

3.5.7 Aufgaben

(Lösungen : Anhang II, Seite L22)

1. $f'(x)$ mit Hilfe der verschiedenen Rechenregeln berechnen.

   (a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$
   (b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 4$
   (c) $f(x) = 3x^5 - \frac{7x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} - x + 17$
   (d) $f(x) = \frac{4-3x}{2x-1}$
   (e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
   (f) $f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{5x^2-8x-10}$
   (g) $f(x) = \frac{3x+5}{x^3+2x^2+x-10}$
   (h) $f(x) = \frac{5}{2x^2-1}$
   (i) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
   (j) $f(x) = \tan(x)$
   (k) $f(x) = \tan(x) \cdot \cos(x)$
   (l) $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$
   (m) $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{2\sin(x)+1}$
   (n) $f(x) = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}$
   (o) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)\cdot\sin(x)}$
   (p) $f(x) = (2\cos(x) - 3) \cdot (4\sin(x) - 1)$

2. $f'(x)$ mit Hilfe der verschiedenen Rechenregeln berechnen.

   (a) $f(x) = (3 - x)^5$
   (b) $f(x) = \left(2x^2 - 3\right)^2$
   (c) $f(x) = \left(x^2 + a^2\right)^5$
   (d) $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 4\right)^2$
   (e) $f(x) = \sin^2(x)$
   (f) $f(x) = \sin(2x)$
   (g) $f(x) = 2\sin(x) + \cos(3x)$
   (h) $f(x) = \tan(ax + b)$
   (i) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x)$
   (j) $f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(3x)$
   (k) $f(x) = \sin^3(4x)$
   (l) $f(x) = \tan^2(5x)$
   (m) $f(x) = \frac{(3x-2)^2-1}{3x-2}$
   (n) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
   (o) $f(x) = (x + 5)^2(x - 1)(2x + 3)^3$
   (p) $f(x) = (2x + 1)^2(1 - 3x)^3$
   (q) $f(x) = \left(3x^2 + 4\right)^5\left(2x^2 - 3x\right)^6$
   (r) $f(x) = \frac{\cos^2(2x)}{\tan(x)}$
   (s) $f(x) = \sin\left(\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2\right)$
   (t) $f(x) = \cos(x)\left(\sin^2(x) + 2\right)$

3. Unter der Annahme dass die jeweiligen Ableitungen existieren beweisen, dass die Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$ auch gilt für :

   (a) $n \in \mathbb{Z}_-$
   (b) $n = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$
   (c) $n \in \mathbb{Q}$

   (Wir werden danach akzeptieren, dass sie auch für $n \in \mathbb{R}$ gilt.)

4. $f'(x)$ mit Hilfe der verschiedenen Rechenregeln berechnen.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

(c) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

(g) $f(x) = \sqrt{8x^2 - 2x + 3}$

(h) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$

(i) $f(x) = \sqrt{(4x^2 - 2x)^3}$

(j) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$

(k) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$

(l) $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^3$

(m) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{x+1}}$

(n) $f(x) = (a + x)\sqrt{a - x}$

(o) $f(x) = \sqrt{4\sin(x) \cdot \cos(x)}$

(p) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

(q) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(r) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

5. (a) Wir akzeptieren ohne Beweis folgendes Ergebnis für die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(x) = e^x$ (siehe Formelsammlung) : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
$(\exp(x))' =?$ Diese Ableitung mit Hilfe der Definition und dem akzeptierten Grenzwert berechnen.

(b) Die Funktion $x \mapsto \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Daraus folgt : $\exp(\ln(x)) = x$

Die Ableitung von beiden Seiten dieser Gleichung berechnen und somit eine Formel für $(\ln(x))'$ finden.

(c) Auf die gleiche Art die Ableitungen der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen berechnen, d.h. $(\arcsin(x))' =?$ $(\arccos(x))' =?$ $(\arctan(x))' =?$

(d) Angenommen wir kennen die Ableitung $f'(x)$ von einer Funktion f und ihre Umkehrfunktion $f^r(x)$. Unter der Annahme dass f^r ableitbar ist und $f'(f^r(x)) \neq 0$ ist, beweisen dass gilt : $(f^r(x))' = \dfrac{1}{f'(f^r(x))}$

6. $f'(x)$ mit Hilfe der verschiedenen Rechenregeln berechnen.

(a) $f(x) = \ln(5x)$

(b) $f(x) = \ln(1 - x)$

(c) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

(d) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$

(e) $f(x) = \ln\left(\sqrt{3 - x^2}\right)$

(f) $f(x) = \ln(3x^5)$

(g) $f(x) = \ln\left(\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2+3}\right)$

(h) $f(x) = x\ln(x) - x$

(i) $f(x) = \ln(\tan(2x))$

(j) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

(k) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

7. $f'(x)$ mit Hilfe der verschiedenen Rechenregeln berechnen.

   (a) $f(x) = e^{5x}$

   (b) $f(x) = e^{x^3}$

   (c) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

   (d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

   (e) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

   (f) $f(x) = e^{\sin(x)}$

   (g) $f(x) = x^2 e^x$

   (h) $f(x) = e^{-x} \cdot \cos(x)$

8. Die Formelsammlung gibt uns folgende Ableitung :

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

   Dieses Ergebnis beweisen.

3.6 Tangente an das Schaubild einer Funktion

Sei $f(x) = x^2$.

Die Gleichung $y = mx + h$ der Tangente an das Schaubild der Funktion f an der Stelle $x = 2$ bestimmen.

Sei wieder $f(x) = x^2$.

Die Gleichung $y = mx + h$ der Tangente an das Schaubild der Funktion f an der Stelle $x = a$ bestimmen.

Sei eine Funktion f, ableitbar in $a \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f an der Stelle $x = a$ bestimmen.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L27)

1. Die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f an der Stelle a bestimmen.

   (a) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$, $a = 1$ (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$

2. Für welche Werte des Parameters $b \in \mathbb{R}$ besitzt das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + x$ an der Stelle $x = 1$ eine horizontale Tangente ?

3. Für welche Werte der Parameter $b, c \in \mathbb{R}$ besitzt das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ an der Stelle $x = -1$ die Tangente $y = x + 4$?

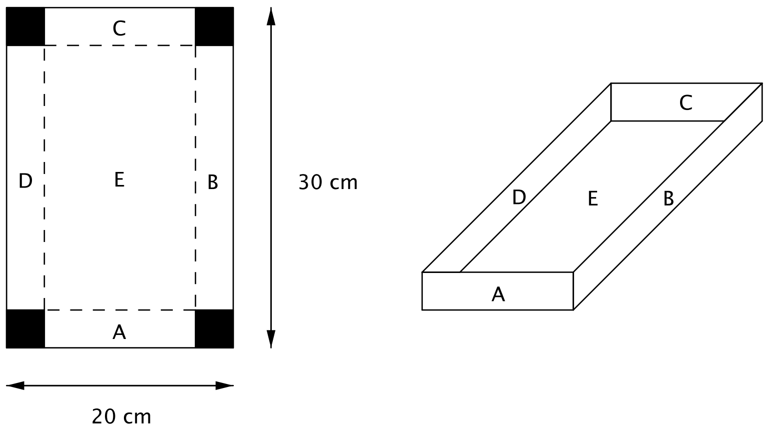
4. An welchen Stellen geht die Tangente an das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ durch den Ursprung ?

5. An welchen Stellen geht die Tangente an das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ durch den Punkt $(-3; 1)$?

6. Für welche Werte des Parametes $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{x^2+mx-10}{x^2-2x-3}$, an der Stelle wo es die y-Achse schneidet, eine Tangente, die parallel zu der Geraden mit Gleichung $20x + 9y = 0$ liegt ?

3.7 Monotonie, Extrempunkte

Aus einem 30 cm langen und 20 cm breiten Blatt Papier soll eine Schachtel hergestellt werden, indem in den vier Ecken gleich grosse Quadrate herausgeschnitten werden und die entstandenen Ränder hochgefaltet werden (siehe Skizze).



Die Seitenlänge der Quadrate bestimmen, damit das Volumen der Schachtel so gross wie möglich ist.

Definitionen :

Eine Stelle x_m heisst **Minimalstelle** einer Funktion f, wenn es ein Intervall um x_m gibt, so dass für alle Stellen $x \in D_f$ in diesem Intervall gilt

Der Funktionswert $f(x_m)$ heisst **relatives** oder **lokales Minimum**.

Der Punkt $T(x_m; f(x_m))$ heisst **Tiefpunkt** des Schaubildes von f.

Eine Stelle x_M heisst **Maximalstelle** einer Funktion f, wenn es ein Intervall um x_M gibt, so dass für alle Stellen $x \in D_f$ in diesem Intervall gilt

Der Funktionswert $f(x_M)$ heisst **relatives** oder **lokales Maximum**.

Der Punkt $H(x_M; f(x_M))$ heisst **Hochpunkt** des Schaubildes von f.

Minimalstellen und Maximalstellen heissen **Extremstellen** von f.

Ein Funktionswert $f(x_0)$ heisst **absolutes Minimum**, wenn für alle Stellen x im Definitionsbereich der Funktion gilt

Ein Funktionswert $f(x_0)$ heisst **absolutes Maximum**, wenn für alle Stellen x im Definitionsbereich der Funktion gilt

Satz :

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine Extremstelle einer Funktion f und sei f ableitbar in a.

Dann ist $f'(a) = 0$.

Beweis :

Eine Extremstelle ist eine Minimal- oder Maximalstelle. Der Beweis ist in beiden Fällen ähnlich. Hier wird der Fall der Minimalstelle behandelt. (Der Fall der Maximalstelle muss selbstständig ausgearbeitet werden.)

Da f in a ableitbar ist, weiss man, dass folgende Grenzwerte alle in $\mathbb{R}$ existieren :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Für $x < a$, nah genug bei a gilt :

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^-} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \leq 0$$

Für $x > a$, nah genug bei a gilt :

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \geq 0$$

Aus der anfängliche Gleichungskette folgt daher $f'(a) = 0$.

Frage :

Ist die umgekehrte Aussage ebenfalls wahr ?

3.7.1 Satz von Rolle

Um Minimal- und Maximalstellen auseinanderhalten zu können, möchten wir gerne eine Aussage beweisen, die so ähnlich klingt wie :

Wenn $f'(x)$ positiv ist, dann „geht f hoch".

Für den Beweis solch einer Aussage bennötigen wir den Mittelwertsatz, den wir mit Hilfe des Satzes von Rolle beweisen :

Satz von Rolle :

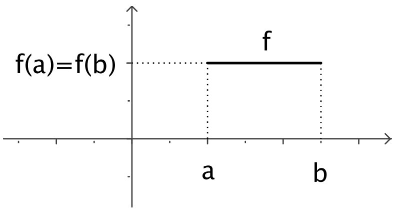
Wenn f auf $[a;b]$ stetig ist, auf $]a;b[$ ableitbar ist und $f(a) = f(b)$ ist, dann gibt es mindestens eine Stelle $c \in]a;b[$ für die gilt

$$f'(c) = 0$$

Beweis :

Da die Funktion f auf dem geschlossenen Intervall $[a;b]$ stetig ist, existieren in einer Stelle $x_m \in [a;b]$ ein absolutes Minimum und in einer Stelle $x_M \in [a;b]$ ein absolutes Maximum für die Funktion f auf $[a;b]$.

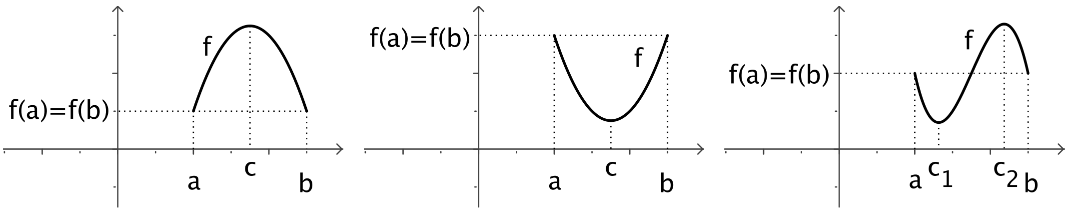
Wenn $f(x_m) = f(x_M)$ ist, dann ist $f(a) = f(b) = f(x_m) = f(x_M)$ und f ist auf $[a;b]$ konstant :



In diesem Fall ist $f'(c) = 0$ für alle $c \in]a;b[$.

Wenn $f(x_m) \neq f(x_M)$ ist, dann liegt mindestens eine der beiden Stellen x_m oder x_M im Inneren des Intervalls.

Sei c je nach Situation eine dieser Extremstellen in $]a;b[$:



Die Funktion f ist in c ableitbar. Die Stelle c ist eine Extremstelle der Funktion.

Aus dem vorhergehenden Satz folgt : $f'(c) = 0$.

Diskussion der Annahmen :

Die folgenden Beispiele zeigen uns, dass die Annahmen des Satzes von Rolle **hinreichend** (wenn sie erfüllt sind, dann gibt es ein c) sind, aber **nicht nötig** (wenn sie nicht erfüllt sind, kann es ein c geben oder nicht).

Für jeden der folgenden Fälle eine Funktion f zeichnen, welche die jeweiligen Bedingungen erfüllt.

1. f erfüllt die ersten beiden Annahmen des Satzes von Rolle, aber nicht die dritte und es existiert kein c wie im Satz von Rolle

2. f erfüllt die ersten beiden Annahmen des Satzes von Rolle, aber nicht die dritte und es existiert ein c wie im Satz von Rolle

3. f erfüllt die erste und dritte Annahme des Satzes von Rolle, aber nicht die zweite und es existiert kein c wie im Satz von Rolle

4. f erfüllt die erste und dritte Annahme des Satzes von Rolle, aber nicht die zweite und es existiert ein c wie im Satz von Rolle

5. f erfüllt die zweite und dritte Annahme des Satzes von Rolle, aber nicht die erste und es existiert kein c wie im Satz von Rolle

6. f erfüllt die zweite und dritte Annahme des Satzes von Rolle, aber nicht die erste und es existiert ein c wie im Satz von Rolle

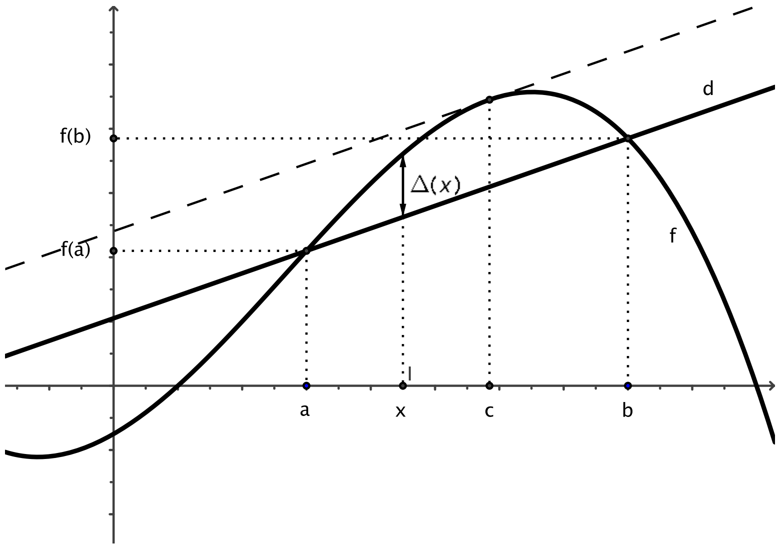
3.7.2 Mittelwertsatz

Mittelwertsatz :

Wenn f auf $[a;b]$ stetig und auf $]a;b[$ ableitbar ist, dann gibt es mindestens eine Stelle $c \in]a;b[$ für die gilt

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Beweis :



Sei $d(x) = mx + h$ die ganzrationale Funktion ersten Gerades deren Schaubild die Gerade durch die Punkte $(a; f(a))$ und $(b; f(b))$ ist.

Die Steigung dieser Geraden ist also : $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Sei für jedes $x \in [a;b]$: $\Delta(x) = f(x) - d(x)$

Die Funktion Δ ist

auf $[a;b]$ stetig

auf $]a;b[$ ableitbar

und erfüllt $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$

Die Funktion Δ erfüllt also die Annahmen des Satzes von Rolle.

Aus dem Satz von Rolle folgt :

es gibt mindestens eine Stelle $c \in]a;b[$ für die gilt : $\Delta'(c) = 0$.

Man berechnet :

$$\begin{aligned}
\Delta'(x) &= (f(x) - d(x))' \\
&= f'(x) - d'(x) \\
&= f'(x) - m \\
&= f'(x) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

und erhält schliesslich :

$$\begin{aligned}
&\Delta'(c) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & f'(c) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

Diskussion der Annahmen :

Ähnlich wie für den Satz von Rolle kann man die Annahmen des Mittelwertsatzes diskutieren.

3.7.3 Monotoniesätze

Definition :

Sei f definiert auf einem Intervall I.

f heisst auf I **monoton zunehmend** oder **wachsend** oder **steigend**, wenn für alle $x, y \in I$ gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f heisst auf I **monoton abnehmend** oder **fallend**, wenn für alle $x, y \in I$ gilt

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Sind $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$, so spricht man von **strenger** Monotonie.

Erster Monotoniesatz :

Gegeben sei f ableitbar auf einem Intervall $]a;b[$.

Wenn f auf $]a;b[$ monoton zunehmend ist, dann gilt für jedes $x \in]a;b[\, : f'(x) \geq 0$.

Wenn f auf $]a;b[$ monoton abnehmend ist, dann gilt für jedes $x \in]a;b[\, : f'(x) \leq 0$.

Beweis :

Beweis für f monoton zunehmend. (Der Beweis für monoton abnehmend ist analog und muss selbstständig geführt werden)

Für $x \in]a;b[$ und $h > 0$ gilt :

$$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \geq 0$$

Da f in x ableitbar ist, weiss man :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

(Der Beweis hätte auch mit $h \to 0^-$ geführt werden können.)

Zweiter Monotoniesatz :

Gegeben sei f ableitbar auf einem Intervall $]a;b[$.

Gilt für alle $x \in]a;b[$ $f'(x) > 0$, dann ist f auf $]a;b[$ streng monoton wachsend.

Gilt für alle $x \in]a;b[$ $f'(x) < 0$, dann ist f auf $]a;b[$ streng monoton fallend.

Beweis :

Hier wird der Fall $f'(x) > 0$ behandelt. (Der Beweis für $f'(x) < 0$ ist ähnlich und muss selbstständig geführt werden.)

Sei $x, y \in]a;b[$ mit $x < y$.

Die Funktion f ist

auf $[x;y]$ stetig

auf $]x;y[$ ableitbar

Die Funktion f erfüllt also die Annahmen des Mittelwertsatzes.

Aus dem Mittelwertsatz folgt :

es gibt mindestens eine Stelle $c \in]x;y[$ so dass gilt : $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Daraus folgt :

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f'(c) \cdot (y - x) \\ \Rightarrow f(y) - f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(y) &> f(x) \end{aligned}$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L27)

1. f' für folgende Funktionen f berechnen.

   Das Vorzeichen von f' untersuchen. (**Vorzeichentabelle**)

   Daraus auf das Wachstum von f schliessen. (**Wachstumstabelle**)

   Schliesslich die eventuellen Extremstellen bestimmen.

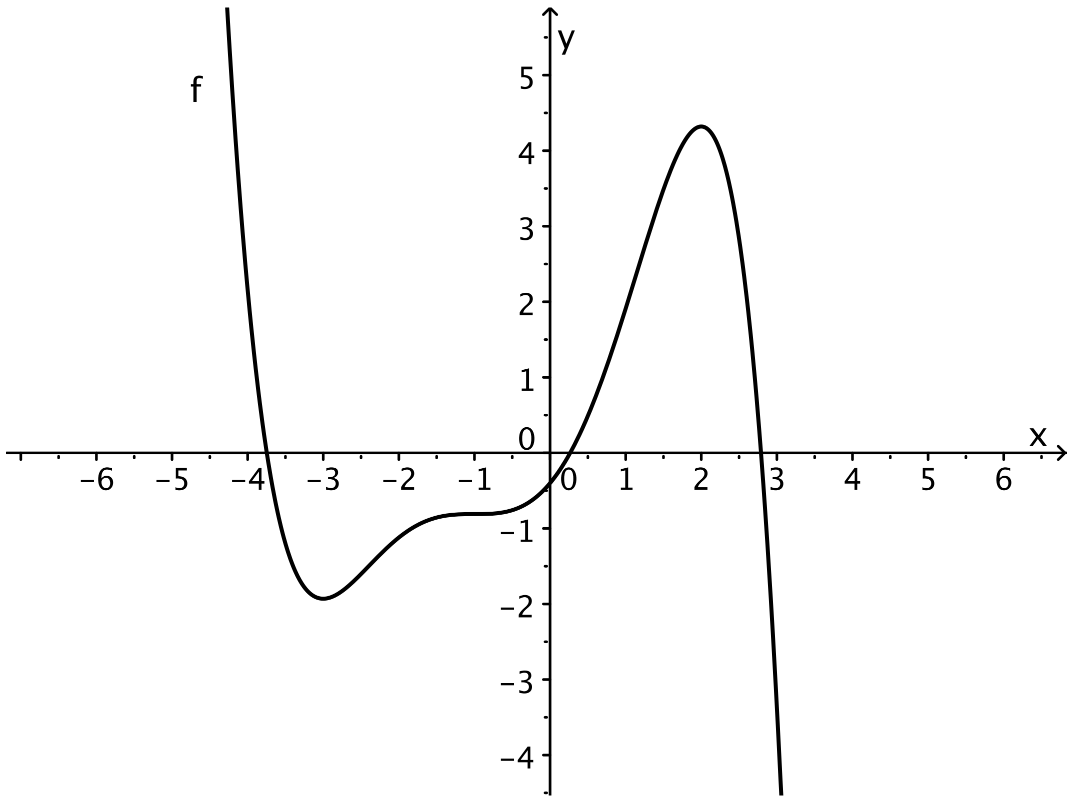
   (a) $f(x) = x^3 - 3x$

   (b) $f(x) = x^2 + 6x + 2$

   (c) $f(x) = x^3 + 3x$

   (d) $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$

2. Die Wachstumstabelle von f und die Vorzeichentabelle von f' bestimmen.



3. Das Schaubild einer Funktion f skizzieren, von der man weiss :

x		-7		-1		0		3		5	
$f'(x)$	$-$	X	$-$	0	$+$	0	$-$	X	$+$	0	$+$

3.8 Extremwertprobleme

Kleine Anleitung zum Lösen von Extremwertproblemen :

- die gegebenen Informationen mathematisch ausdrücken,
- die Funktion bestimmen, für die der Maximal- oder Minimalwert gesucht wird,
- diese Funktion mit Hilfe von nur einer Variablen beschreiben,
- bestimmen welche Werte diese Variable annehmen darf,
- die Ableitung der Funktion berechnen,
- die Vorzeichentabelle der Ableitung bestimmen,
- die Wachstumstabelle der Funktion bestimmen,
- die gesuchte(n) Extremstelle(n) bestimmen,
- eventuell den Extremwert der Funktion berechnen.

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L28)

1. 12 als Summe von zwei Zahlen a und b so schreiben, dass ihr Produkt ab maximal ist.
2. 12 als Summe von zwei Zahlen a und b so schreiben, dass die Summe ihrer Quadrate $a^2 + b^2$ minimal ist.
3. 12 als Summe von zwei Zahlen a und b so schreiben, dass das Produkt ab^2 minimal ist, wenn b in dem Intervall $[0; 13]$ enthalten sein muss.
4. Die Dimensionen des Rechtecks mit der grösstmöglichen Fläche bestimmen, dessen Umfang 24cm beträgt.
5. Welches Rechteck mit Umfang 30cm besitzt die kürzeste Diagonale ?
6. Die Dimensionen einer Schachtel mit kleinstmöglicher Oberfläche bestimmen, deren Volumen 32 Liter beträgt und die einen quadratischen Boden aber keinen Deckel besitzt.
7. Sei die Funktion mit der Gleichung $y = -x^2 + 4$. Es ist möglich verschiedene Rechtecke zu zeichnen, für die je zwei Eckpunkte auf der x-Achse und die anderen zwei Eckpunkte auf dem positiven Teil des Graphen der Funktion liegen. Die Dimensionen des Rechtecks mit der grösstmöglichen Fläche bestimmen.

8. Die Dimensionen des Rechtecks mit grösstmöglichem Umfang bestimmen, dessen Eckpunkte alle auf einem Kreis mit Radius 5cm liegen.

9. Welche Punkte auf dem Schaubild der Funktion $y = \frac{2}{x^2}$ liegen am nächsten beim Ursprung ?

10. Die Dimensionen einer Dose (kreisförmiger Boden) ohne Deckel mit kleinstmöglicher Oberfläche bestimmen, deren Volumen 32 Liter beträgt.

11. Sei $P(a; b)$ mit $a \in [0; 2]$ ein Punkt auf dem Graphen der Parabel mit Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. Gegeben sind auch $A(-2; 0)$ und $B(a; 0)$.

    (a) Die Koordinaten des Punktes P bestimmen, für die das Dreieck ABP die grösstmögliche Fläche besitzt. Diese Fläche berechnen.

    (b) Die Koordinaten des Punktes P bestimmen, für die die Summe der Längen der Kathethen des Dreiecks ABP maximal ist.

12. Sei $P(a; b)$ mit $a \in [0; 2]$ ein Punkt auf dem Graphen der Funktion gegeben durch $f(x) = 2x^2 - x^3$.

    (a) Die Gleichung der Tangente an f im Punkt P bestimmen.

    (b) Die Koordinaten des Schnittpunkts S dieser Tangente mit der y-Achse berechnen.

    (c) Die Koordinaten von P bestimmen, für die S am höchsten liegt.

    (d) Bestimme die Koordinaten von P, für die S am tiefsten liegt.

13. Den kleinstmöglichen Wert bestimmen, den man erhalten kann, wenn man eine positive Zahl und ihren Umkehrwert addiert.

14. Sei f_k gegeben durch $f_k(x) = x^2 - 4kx - k^2 - 2k$ ($k \in \mathbb{R}$ ist ein Parameter)

    (a) Die Koordinaten des Tiefpunktes von f_k bestimmen.

    (b) Den Wert von k bestimmen, für den dieser Tiefpunkt am höchsten liegt.

15. Sei das Dreieck ABC, gleichschenklig in B. Gegeben ist $BA = BC = 7$. Wie gross muss der Winkel α in A und C sein, damit die Fläche des Dreiecks maximal ist ?

16. Ein Lkw-Fahrer muss eine 150km lange Strecke fahren. Bei konstanter Geschwindigkeit v km/h verbraucht sein Lkw $6 + \frac{v^2}{300}$ Liter Benzin pro Stunde. Ein Liter Benzin kostet 2 SFR und der Fahrer erhält 25 SFR pro Stunde. Mit welcher Geschwindigkeit muss der Fahrer fahren, damit die Kosten für seine Firma minimal sind ? Wieviel betragen diese Kosten dann ?

3.9 Krümmung und Wendepunkte, zweite Ableitung

Definition :

Sei f ableitbar auf einem Intervall I.

f heisst auf I **konvex**, wenn für alle $x, a \in I$ gilt : $f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$

f heisst auf I **konkav**, wenn für alle $x, a \in I$ gilt : $f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a)$

Zusammenhang (intuitiv) : $f'(x)$ und Krümmung

Definition :

Sei eine ableitbare Funktion f und ihre (erste) Ableitung f'.

Falls die Ableitungen jeweils existieren definiert man :

die **zweite Ableitung** von f : $f'' = (f')'$

die **dritte Ableitung** von f : $f''' = (f'')'$

allgemein : die **n-te Ableitung** von f : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ (für $n \geq 2$)

Beispiel :

$f(x) = x^3$

Satz : (ohne Beweis)

Sei f auf einem Intervall I zweimal ableitbar.

$$\forall x \in I : f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ ist auf } I \text{ konvex}$$

$$\forall x \in I : f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ ist auf } I \text{ konkav}$$

Beispiel :

$f(x) = x^3 - 3x^2$

Definition :

Eine Stelle x in der eine Funktion f von konvex zu konkav wechselt (oder umgekehrt) heisst Wendestelle. Der dazugehörige Punkt heisst **Wendepunkt**.

3.10 Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion einer Funktion f, gegeben durch $f(x) = \dots$ soll es ermöglichen, das Schaubild dieser Funktion zu skizzieren. Dies mitsamt Nullstellen, Asymptoten, Extremstellen (Hoch- und Tiefpunkte) und Wendestellen (Wendepunkte).

Die verschiedenen Schritte, die dies ermöglichen, werden in den folgenden Abschnitten, nach „Funktionsarten" sortiert, behandelt.

3.10.1 Ganzrationale Funktionen

Beispiel :

$$f(x) = \frac{x^3}{4} - 2x^2 + 16x$$

Bemerkung :

Am Ende der Kurvendiskussion soll die gegebene Funktion graphisch dargestellt werden. Es ist jedoch wichtig **parallel** zu der Kurvendiskussion schon eine Skizze erstellen, die es erlaubt frühzeitig eventuelle Widersprüche zu erkennen.

f :

- Vorzeichen

- Definitionsbereich

- Schnittpunkte mit den Achsen

- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

f′ : • Berechnung

• Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

f″ : • Berechnung

• Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L32)

Für die folgenden Funktionen f eine Kurvendiskussion wie im vorangehenden Beispiel durchführen :

f : Vorzeichen, Definitionsbereich, Schnittpunkte mit den Achsen, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

f′ : Berechnung, Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

f″ : Berechnung, Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f

1. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{10}$
2. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{4}x^4$
3. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{8}{3}x^3 + 6x^2$
4. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$

   Hinweis :

   $f(-1) = 0 \; f(1) = 0 \; f'(-2) = 0$
5. $f(x) = 100(x-1)^3(x-2)^4$

3.10.2 Gebrochenrationale Funktionen

Bemerkung :

Die Kurvendiskussion einer gebrochenrationalen Funktion folgt demselben Schema wie bei einer ganzrationalen Funktion. Bei zwei Punkten der Kurvendiskussion gibt es aber mehr zu tun :

- Der Definitionsbereich einer ganzrationalen Funktion war immer $\mathbb{R}$, bei gebrochenrationalen Funktionen muss man die Werte von x ausschliessen, für die der Nenner der Funktion Null wird.
- Der „Rand" des Definitionsbereichs kann daher ausser $-\infty$ und $+\infty$ auch noch die x-Werte enthalten für welche die Funktion nicht definiert ist. Das Verhalten am Rand des Definitionsbereich bedeutet dann die Suche nach eventuellen vertikalen Asymptoten (an den Stellen wo die Funktion nicht definiert ist) und nach horizontalen Asymptoten oder asymptotischen Geraden (für $x \to \pm\infty$).

Beispiel einer vollständigen Kurvendiskussion :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$$

(wieder **parallel** zu der Kurvendiskussion schon eine Skizze erstellen)

f :

- Vorzeichen
- Definitionsbereich
- Schnittpunkte mit den Achsen

- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

$\mathbf{f'}$:

- Berechnung

- Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

$\mathbf{f''}$:

- Berechnung

- Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L34)

Für die folgenden Funktionen f eine Kurvendiskussion wie im vorangehenden Beispiel durchführen :

f : Vorzeichen, Definitionsbereich, Schnittpunkte mit den Achsen, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

f′ : Berechnung, Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

f″ : Berechnung, Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f

1. $f(x) = \dfrac{8}{4 - x^2}$

2. $f(x) = \dfrac{36}{x^2 + 9}$

3. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{4(x-1)^2}$

4. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

3.10.3 Funktionen mit Wurzeln, Berechnung der Asymptoten für $x \to \pm\infty$

Auch für eine Funktion f in der Wurzeln vorkommen bleibt das allgemeine Schema der Kurvendiskussion gleich. Bei der Bestimmung einer asymptotischen Geraden braucht man allerdings die „Formel-Technik" :

Satz : (ohne Beweis)

Dann und nur dann, wenn die Grenzwerte

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad h = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

in $\mathbb{R}$ existieren, ist die Gerade mit der Gleichung $y = mx + h$ eine asymptotische Gerade der Funktion f für $x \to +\infty$.

Analoge Aussage für $x \to -\infty$.

Beispiel :

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

Für $x \to +\infty$:

Für $x \to -\infty$:

Bemerkungen :

- Diesen Satz kann man natürlich, wenn man möchte, auch für gebrochenrationale Funktionen benutzen.
- Man erhält auch eventuelle horizontale Asymptoten : in deren Fall ist $m = 0$.

Beispiel einer vollständigen Kurvendiskussion :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-5}}$$

(wieder **parallel** zu der Kurvendiskussion schon eine Skizze erstellen)

f :

- Vorzeichen

- Definitionsbereich

- Schnittpunkte mit den Achsen

- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

$\mathbf{f'}$:

- Berechnung

- Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

f″ :

- Berechnung

- Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L35)

Für die folgenden Funktionen f eine Kurvendiskussion wie im vorangehenden Beispiel durchführen :

f : Vorzeichen, Definitionsbereich, Schnittpunkte mit den Achsen, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

f′ : Berechnung, Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

f″ : Berechnung, Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f

1. $f(x) = x \cdot \sqrt{x-1}$

2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

3. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

3.10.4 Funktionen mit ln und exp, Regel von L'Hospital

Für exp und ln sollte man sich ausser den wichtigen Eigenschaften :

$$e^{\ln(x)} = x \qquad \ln\left(e^x\right) = x$$

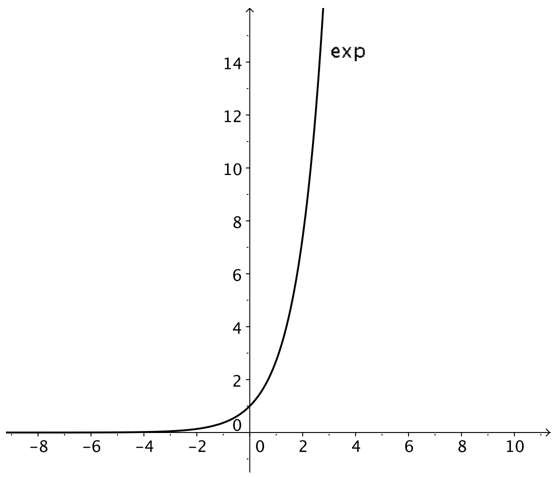
auch noch die Formen dieser Funktionen in Erinnerung rufen (man findet sie auch in der Formelsammlung), um einfache Fragen wie

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = ? \qquad e^x = 1 \Leftrightarrow x = ?$$

beantworten zu können.

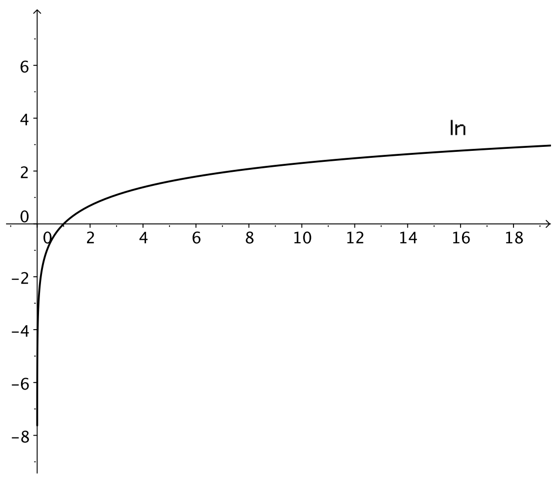
Auch bei Grenzwertberechnungen kann es nützlich sein eine Ahnung davon zu haben, wie sich diese Funktionen verhalten.

Wichtige Grenzwerte für exp und ln : (siehe auch Formelsammlung)



$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^{(+)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$



$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Für problematischere Grenzwerte, unklare Fälle, die nicht mit Hilfe von einem der klaren Fälle

$$\text{„} e^{-\infty} \text{"} = 0^+ \qquad \text{„} e^{+\infty} \text{"} = +\infty$$

$$\text{„} \ln(0^+) \text{"} = -\infty \qquad \text{„} \ln(+\infty) \text{"} = +\infty$$

berechnet werden können, hilft oft folgender Satz :

Satz : (Regel von L'Hospital) (ohne Beweis)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und f und g zwei Funktionen, die in einem offenen Intervall um a ableitbar sind und für die der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.
Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ist
oder $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ ist, dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dieser Satz gilt auch für Grenzwerte mit $x \to \pm\infty$.

Beispiele :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1} =$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1 - x} =$

Bemerkungen :

- Diesen Satz kann man ebenfalls für gebrochenrationale Funktionen oder Wurzelfunktionen anwenden, wenn sie die Annahmen erfüllen.

  Zum Beispiel (doppelte Anwendung der Regel) :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2 - 7x + 5}{x^3 + 12} = \text{„} \frac{+\infty}{+\infty} \text{"} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10x - 7}{3x^2} = \text{„} \frac{+\infty}{+\infty} \text{"} = \lim_{x\to +\infty} \frac{10}{6x} = 0$$

- Wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, bedeutet dies nicht unbedingt, dass $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert. Es bedeutet bloss, dass die Regel von L'Hospital in diesem Fall nicht angewendet werden kann.

Beispiel einer vollständigen Kurvendiskussion :

$$f(x) = x \cdot \ln(x)$$

(wieder **parallel** zu der Kurvendiskussion schon eine Skizze erstellen)

f :

- Vorzeichen

- Definitionsbereich

- Schnittpunkte mit den Achsen

- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

$\mathbf{f'}$:

- Berechnung

- Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

f″ :

- Berechnung

- Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

graphische Darstellung von f :

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L35)

1. Wenn möglich folgende Grenzwerte berechnen.

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 3}{e^x + 5}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 \cdot \ln(x)\right)$

   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^{-x}\right)$

2. Für die folgenden Funktionen f eine Kurvendiskussion wie im vorangehenden Beispiel durchführen :

   f : Vorzeichen, Definitionsbereich, Schnittpunkte mit den Achsen, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

   f′ : Berechnung, Vorzeichen von f', Wachstum von f, Extrempunkte (eventuell Wendepunkte)

   f″ : Berechnung, Vorzeichen von f'', Krümmung von f, Wendepunkte

   graphische Darstellung von f

   (a) $f(x) = (x-3)\cdot\ln(3-x)$

   (b) $f(x) = xe^{-x}$

   (c) $f(x) = (x-2)^2 e^x$

   (d) $f(x) = e^{-x^2}$

4 Stammfunktionen und Integrale

4.1 Stammfunktionen : Definition und Schreibweisen

Definition :

Sei f eine auf $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion. Eine ableitbare Funktion F heisst Stammfunktion von f auf I, wenn für alle $x \in I$ gilt :

$$F'(x) = f(x)$$

Beispiele :

1. $f(x) = 0$

2. $f(x) = 1$

3. $f(x) = a$

4. $f(x) = x$

5. $f(x) = \sin(x)$

6. $f(x) = \cos(x)$

7. $f(x) = e^x$

Satz :

Sei $g(x) = 0$. Dann haben alle Stammfunktionen von g die Form $G(x) = c$, mit $c \in \mathbb{R}$.

Beweis :

Satz :

Zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 einer Funktion f unterscheiden sich durch eine additive Konstante, d.h. ihre Differenz ist konstant.

Beweis :

Schreibweisen :

Möchte man **alle** Stammfunktionen einer Funktion f berechnen, dann sagt man dies entweder in Worten oder aber mit folgender Schreibweise : $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Es sind beispielsweise die zwei folgenden Aufgabenstellungen identisch :

- Alle Stammfunktionen der Funktion f gegeben durch $f(x) = -\sin(x)$ berechnen.
- Berechnen : $\displaystyle\int (-\sin(x))\,\mathrm{d}x$

Lösung :

- $f(x) = -\sin(x)$ Stammfunktionen :
- $\displaystyle\int (-\sin(x))\,\mathrm{d}x =$

4.2 Rechenregeln

1. $\displaystyle\int x^2 \, \mathrm{d}x =$

2. $\displaystyle\int x^3 \, \mathrm{d}x =$

3. $\displaystyle\int x^4 \, \mathrm{d}x =$

Rechenregel :

4. $\displaystyle\int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x =$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} \, \mathrm{d}x =$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x =$

7. $\int 3\cos(x)\ \mathrm{d}x =$

8. $\int 7x\,\mathrm{d}x =$

9. $\int -\frac{5}{x}\,\mathrm{d}x =$

Rechenregel :

10. $\int (\sin(x) + 1)\ \mathrm{d}x =$

11. $\int \left(x^2 + x^3\right)\ \mathrm{d}x =$

12. $\int \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right)\ \mathrm{d}x =$

Rechenregel :

13. $\displaystyle\int \cos(3x)\ \mathrm{d}x =$

14. $\displaystyle\int \cos\left(x^2\right) \cdot x \,\mathrm{d}x =$

15. $\displaystyle\int \left(x^2 + 2x + 5\right)^9 \cdot (x+1)\ \mathrm{d}x =$

16. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1}\,\mathrm{d}x =$

Rechenregel :

Gemischte Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L37)

Berechnen :

1. $\int 3\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int (x+3)^3\,\mathrm{d}x$
6. $\int 5x\,\mathrm{d}x$
7. $\int \left(1+\tan^2(x)\right)\,\mathrm{d}x$
8. $\int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$
9. $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{d}x$
11. $\int (2x-1)^2\,\mathrm{d}x$
12. $\int ax^2\,\mathrm{d}x$
13. $\int ax^2\,\mathrm{d}a$
14. $\int (2x+1)\,\mathrm{d}x$
15. $\int \frac{5x-4}{3}\,\mathrm{d}x$
16. $\int -\frac{7}{x^5}\,\mathrm{d}x$
17. $\int (7x-2)^5\,\mathrm{d}x$
18. $\int \left(3x^2+x\right)^3 \cdot (6x+1)\,\mathrm{d}x$
19. $\int \frac{5}{4\cdot\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
20. $\int \frac{-2x^2+4x-4}{\sqrt{x^3-3x^2+6x-5}}\,\mathrm{d}x$
21. $\int x\cdot\sin\left(x^2\right)\cdot e^{\cos\left(x^2\right)}\,\mathrm{d}x$
22. $\int \left(\frac{2x^2}{3}-\frac{3x}{2}+\frac{1}{7}\right)\,\mathrm{d}x$
23. $\int 4\cdot\left(3x^5+2x^4-1\right)\,\mathrm{d}x$
24. $\int \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$
25. $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$
26. $\int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$
27. $\int x\cdot\left(4x^2+3\right)^4\,\mathrm{d}x$
28. $\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$
29. $\int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$
30. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}}\,\mathrm{d}x$
31. $\int (2x-3)\cdot(7x+1)\,\mathrm{d}x$
32. $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

4.3 Integrale und Flächenberechnung

Mit Hilfe von Stammfunktionen ist es möglich Flächen zu berechnen :

Algebraische Fläche unter einer Funktion :

Sei f eine auf einem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion.

Dann ist die **algebraische Fläche** begrenzt durch f und die x-Achse auf dem Intervall $[a; b]$ gegeben durch :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d} = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Wieso ? Weshalb ? Warum ? $\longrightarrow$ 4. Jahr

Beispiele :

1. $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x =$ Illustration :

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x =$ Illustration :

Was unterscheidet eine algebraische Fläche von einer geometrischen Fläche ?

Wie berechnet man eine von einer Funktion und der x-Achse begrenzte geometrische Fläche ?

Beispiel :

$$f(x) = x^3 - x$$

Wie berechnet man eine von zwei Funktionen begrenzte geometrische Fläche ?

Beispiel :

$$f(x) = x^3 - x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = 6x$$

Aufgaben : (Lösungen : Anhang II, Seite L38)

1. Berechnen :

(a) $\displaystyle\int_1^3 \left(3x^2+4x\right)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(4x^3+6x\right)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(2x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+8x}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{3}{(4x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \frac{5}{2x+2}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{10x+3}{5x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin(4x)\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x)\cdot\sin(5x)\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2(x)\right)\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_{-3}^{3} e^x\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} e^{3x}\,\mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_0^{1} 4x\cdot e^{2x^2}\,\mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\,\mathrm{d}x$

(r) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$

2. Die geometrische Fläche begrenzt durch die jeweils gegebene Funktion f und die x-Achse berechnen.

(a) $f(x)=2x^3+x^2-x$

(b) $f(x)=x^4-5x^2+4$

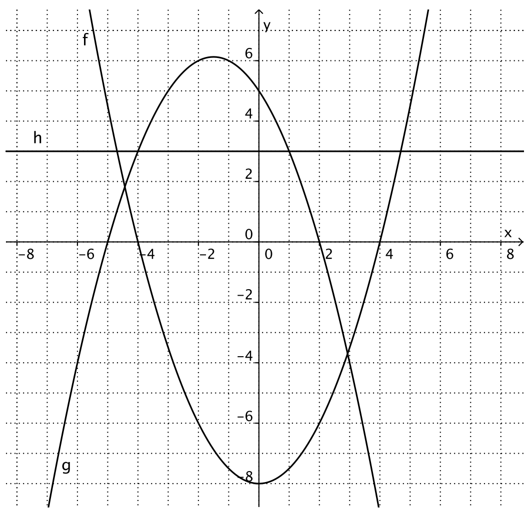
3. Die geometrische Fläche begrenzt durch die jeweils gegebenen Funktionen f und g berechnen.

(a) $f(x)=4x-x^3$, $g(x)=-9x+12$

Tipp : f und g besitzen in $x=1$ eine Schnittstelle

(b) $f(x)=\dfrac{16}{x^2}-6$, $g(x)=11-x^2$

4. (a) Gegeben sind f, g und h wie auf der graphischen Darstellung.



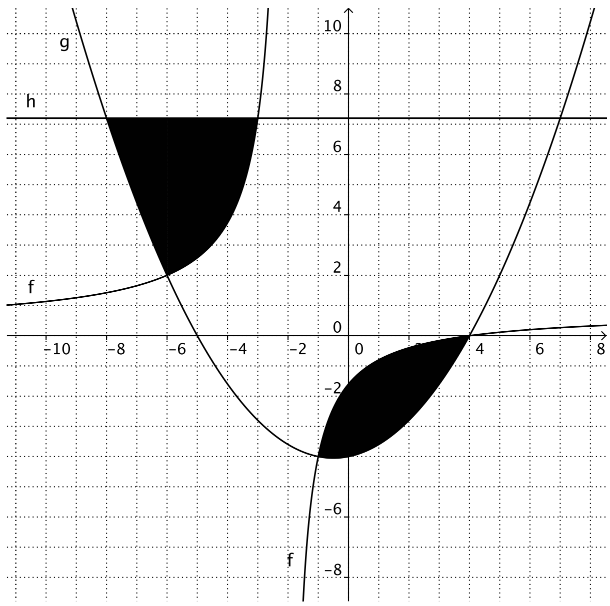
$$A = \int_{-4}^{0} (g(x) - f(x))\ \mathrm{d}x$$

$$B = \int_{0}^{1} (h(x) - f(x))\ \mathrm{d}x$$

$$C = -\int_{1}^{3} (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x$$

Für jedes der Integrale A, B und C die dazugehörige geometrische Fläche auf der graphischen Darstellung farbig schraffieren.

(b) Gegeben sind f, g und h wie auf der graphischen Darstellung.



Ohne Absolutwerte zu benutzen, das (oder die) Integral(e) zur Berechnung der **gesamten** geometrischen schwarzen Fläche geben. (Aber NICHT berechnen !).

Quellen

- *Formulaires et tables, Mathématiques, Physique, Chimie*

  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2000

- *Fundamentum de mathématique, Analyse*

  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 1997

- *Analysis Leistungskurs, Gesamtausgabe*

  Lambacher Schweizer, Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH, Stuttgart, 1990

- *Formelsammlung Mathematik,*

  Norbert Krank, Horst Sewerin, Verlag Konrad Wittwer GmbH, Stuttgart 2001

- *Cours et exercices de D. Bopp, M. Ducommun, J. Weger, B. Délez, J.-M. Bacchiocchi*

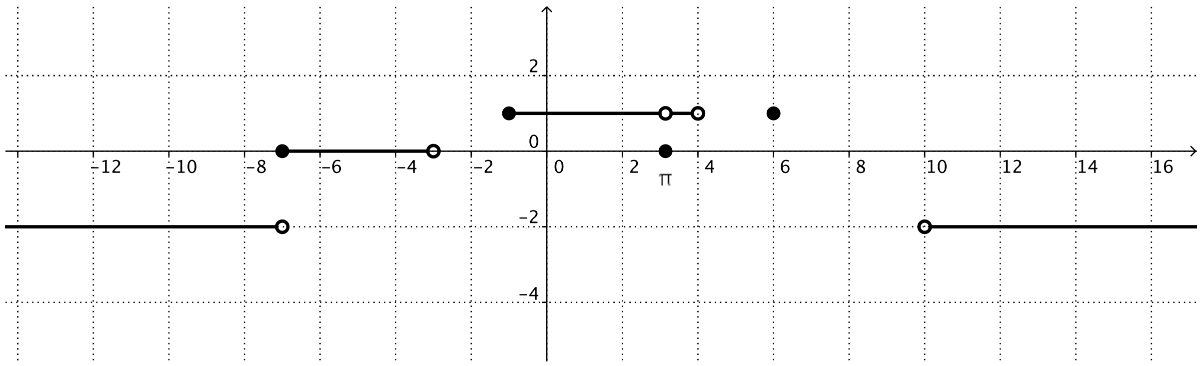
Lösungen

1 Funktionen : Wiederholung und Vokabular, Seite 2

1. Es gibt verschiedene mögliche Antworten auf diese Frage : jede Figur, die für mindestens einen x-Wert zwei oder mehr y-Werte besitzt ist eine Antwort.

2. (a) $D_f = \mathbb{R}$, Menge der Nullstellen : $\{2;3\}$
   (b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$, Menge der Nullstellen : $\{-2\}$
   (c) $D_f = \mathbb{R}$, Menge der Nullstellen : $\left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
   (d) $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, Menge der Nullstellen : $\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$

3. Eine mögliche graphische Darstellung :



4. Die zu der unter Aufgabe 3 gegebenen Darstellung gehörige Zuordnungsvorschrift ist :

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{, für } x \in]-\infty;-7[\cup]10;+\infty[\\ 0 & \text{, für } x \in [-7;-3[\cup\{\pi\} \\ 1 & \text{, für } x \in [-1;\pi[\cup]\pi;4[\cup\{6\} \end{cases}$$

2.1.1 Definition, Seite 10

1. (a) Es existiert für (z.B.) $\varepsilon = 0.5$ kein M, so dass für alle $x > M$, $|f(x) - (-1)| < 0.5$ wäre.
   (b) Für $\varepsilon \geq 5$ existieren für $L = -1$ Werte für M wie in der Definition (und man könnte in diesem Fall irgendein $M \in \mathbb{R}$ wählen.)

2. (a) Intuitiv : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$
   (b) Die Frage ist hier : existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für $x > M$ gilt : $|f(x) - 5| < \varepsilon$?
   Also nehmen wir die zu erfüllende Bedingung $|f(x) - 5| < \varepsilon$ und untersuchen ob wir M (in Abhängigkeit von ε) bestimmen können.

$$\begin{gathered} |f(x) - 5| < \varepsilon \\ \left|\frac{5x-3}{x+1} - 5\right| < \varepsilon \\ \left|\frac{5x-3-5(x+1)}{x+1}\right| < \varepsilon \\ \left|\frac{-8}{x+1}\right| < \varepsilon \\ \frac{8}{|x+1|} < \varepsilon \\ \frac{8}{\varepsilon} < |x+1| \\ \frac{8}{\varepsilon} < x+1 \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \geq -1 \text{, also } M \geq -1 \\ x > -1 + \frac{8}{\varepsilon} \end{gathered}$$

Also ist für ein gegebenes ε das zugehörige (kleinstmögliche) M gegeben durch : $M = -1 + \dfrac{8}{\varepsilon}$.

Bemerkung : wir brauchten im vorletzten Schritt $x \geq -1$. Dies ist mit $x > M = -1 + \dfrac{8}{\varepsilon} > -1$ in Ordnung.

3. (a) Intuitiv : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$

   (b) Die Frage ist hier : existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{R}$, so dass für $x < m$ gilt : $|f(x) - 5| < \varepsilon$?

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &< \varepsilon \\ &\vdots \\ \frac{8}{\varepsilon} &< |x+1| \\ \frac{8}{\varepsilon} &< -(x+1) \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \leq -1, \text{ also } m \leq -1 \\ x &< -1 - \frac{8}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Also ist für ein gegebenes ε das zugehörige (grösstmögliche) m gegeben durch : $m = -1 - \dfrac{8}{\varepsilon}$.

Bemerkung : wir brauchten im vorletzten Schritt $x \leq -1$. Dies ist mit $x < m = -1 - \dfrac{8}{\varepsilon} < -1$ in Ordnung.

4. (a) Intuitiv : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

   (b)

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{x+4}{1-2x} + \frac{1}{2} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{2(x+4) + 1 - 2x}{2(1-2x)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{9}{2(1-2x)} \right| &< \varepsilon \\ \frac{9}{2|1-2x|} &< \varepsilon \\ \frac{9}{2\varepsilon} &< |1-2x| \\ \frac{9}{2\varepsilon} &< -(1-2x) \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \geq \tfrac{1}{2}, \text{ also } M \geq \tfrac{1}{2} \\ x &> \frac{1}{2} + \frac{9}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

Also ist für ein gegebenes ε das zugehörige (kleinstmögliche) M gegeben durch : $M = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{4\varepsilon}$.

Bemerkung : wir brauchten im vorletzten Schritt $x \geq \frac{1}{2}$. Dies ist mit $x > M = \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{4\varepsilon} > \frac{1}{2}$ in Ordnung.

5. (a) Intuitiv : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

   (b)

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| &< \varepsilon \\ &\vdots \\ \frac{9}{2\varepsilon} &< |1-2x| \\ \frac{9}{2\varepsilon} &< 1-2x \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \leq \tfrac{1}{2}, \text{ also } m \leq \tfrac{1}{2} \\ x &< \frac{1}{2} - \frac{9}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

Also ist für ein gegebenes ε das zugehörige (grösstmögliche) m gegeben durch : $m = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{4\varepsilon}$.

Bemerkung : wir brauchten im vorletzten Schritt $x \leq \frac{1}{2}$. Dies ist mit $x < m = \dfrac{1}{2} - \dfrac{9}{4\varepsilon} < \frac{1}{2}$ in Ordnung.

6.
$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+1}{x}-0\right| &< \varepsilon \\
\frac{|x+1|}{|x|} &< \varepsilon \\
\frac{x+1}{x} &< \varepsilon \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x>0\text{, also } M \geq 0 \\
x+1 &< \varepsilon x \\
1 &< x(\varepsilon-1)
\end{aligned}$$

Versucht man dann x zu isolieren, muss man auf das Vorzeichen von $\varepsilon - 1$ achten :

- wenn $\varepsilon > 1$ und also $\varepsilon - 1 > 0$ ist, dann erhält man $x > \frac{1}{\varepsilon-1} = M$
- wenn $\varepsilon = 1$ und also $\varepsilon - 1 = 0$ ist, dann erhält man $1 < x \cdot 0$, dies ist falsch, es existiert kein M wie in der Definition.
- wenn $\varepsilon < 1$ und also $\varepsilon - 1 < 0$ ist, dann erhält man $x < \frac{1}{\varepsilon-1} < 0$ was im Widerspruch zu der Bedingung $x > 0$ steht, die wir in einem der letzten Schritte erhalten hatten. Es existiert also kein M wie in der Definition.

Bemerkung : Es reicht schon nur den zweiten oder dritten Fall aufzuzeigen, da in beiden Fällen kein M existiert.

7. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-7}{1-x} = -3$

$$\begin{aligned}
|f(x)-(-3)| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3x-7}{1-x}+3\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{3x-7+3-3x}{1-x}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{-4}{1-x}\right| &< \varepsilon \\
\frac{4}{|1-x|} &< \varepsilon \\
\frac{4}{\varepsilon} &< |1-x| \\
\frac{4}{\varepsilon} &< -(1-x) \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \geq 1\text{, also } M \geq 1 \\
x &> 1+\frac{4}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Also ist für ein gegebenes ε das zugehörige (kleinstmögliche) M gegeben durch : $M = 1 + \dfrac{4}{\varepsilon}$.

Bemerkung : wir brauchten im vorletzten Schritt $x \geq 1$. Dies ist mit $x > M = 1 + \dfrac{4}{\varepsilon} > 1$ in Ordnung.

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-5x}{7x+3} = -\frac{5}{7}$

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-\left(-\frac{5}{7}\right)\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{2-5x}{7x+3}+\frac{5}{7}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{14-35x+35x+15}{7(7x+3)}\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{29}{7(7x+3)}\right| &< \varepsilon \\
\frac{29}{7|7x+3|} &< \varepsilon \\
\frac{29}{7\varepsilon} &< |7x+3| \\
\frac{29}{7\varepsilon} &< -(7x+3) \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \leq -\tfrac{3}{7}\text{, also } m \leq -\tfrac{3}{7} \\
x &< -\frac{3}{7}-\frac{29}{49\varepsilon}
\end{aligned}$$

Also ist für ein gegebenes ε das zugehörige (grösstmögliche) m gegeben durch : $m = -\dfrac{3}{7} - \dfrac{29}{49\varepsilon}$.

Bemerkung : wir brauchten im vorletzten Schritt $x \leq -\frac{3}{7}$. Dies ist mit $x < m = -\dfrac{3}{7} - \dfrac{29}{29\varepsilon} < -\dfrac{3}{7}$ in Ordnung.

8.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3x-4}{2x+1}-0\right| &< \varepsilon \\
\frac{|3x-4|}{|2x+1|} &< \varepsilon \\
\frac{3x-4}{2x+1} &< \varepsilon \qquad \text{Problem ? wir bräuchten hier : } x \geq \tfrac{4}{3}\text{, also } M \geq \tfrac{4}{3} \\
3x-4 &< \varepsilon\,(2x+1) \\
-4-\varepsilon &< x\,(2\varepsilon-3)
\end{aligned}$$

Versucht man dann x zu isolieren, muss man auf das Vorzeichen von $2\varepsilon-3$ achten :

- wenn $\varepsilon > \frac{3}{2}$ und also $2\varepsilon - 3 > 0$ ist, dann erhält man $x > \frac{-4-\varepsilon}{2\varepsilon-3}$, dies ist eine negative Zahl. Da wir auch $x \geq \frac{4}{3}$ brauchen, ist also der kleinstmögliche Wert $M = \frac{4}{3}$.
- wenn $\varepsilon = \frac{3}{2}$ und also $2\varepsilon - 3 = 0$ ist, dann erhält man $-4-\varepsilon < x \cdot 0$, dies ist wahr für alle x. Da wir auch $x \geq \frac{4}{3}$ brauchen, ist also der kleinstmögliche Wert $M = \frac{4}{3}$.
- wenn $\varepsilon < \frac{3}{2}$ und also $2\varepsilon - 3 < 0$ ist, dann erhält man $x < \frac{-4-\varepsilon}{2\varepsilon-3}$. Es existiert also kein M wie in der Definition.

Bemerkung : Es reicht schon nur den dritten Fall aufzuzeigen, da in diesem Fall kein M existiert.

2.1.4 Grenzwerte von ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen für $x \to \pm\infty$, Seite 16

1. (a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^4-2x^3+x}{x^7+3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(7-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^7\left(1+\frac{3}{x^6}-\frac{1}{x^7}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{x^3\left(1+\frac{3}{x^6}-\frac{1}{x^7}\right)} = 0$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^{13}}{x^5-x^2+1254} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{13}\left(\frac{1}{x^{13}}-1\right)}{x^5\left(1-\frac{1}{x^3}+\frac{1254}{x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^8\left(\frac{1}{x^{13}}-1\right)}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1254}{x^5}} = -\infty$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x^2-1\right)^3}{4x^6-5x^2+16} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\right)^3}{x^6\left(4-\frac{5}{x^4}+\frac{16}{x^6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6\left(2-\frac{1}{x^2}\right)^3}{x^6\left(4-\frac{5}{x^4}+\frac{16}{x^6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)^3}{4-\frac{5}{x^4}+\frac{16}{x^6}} = \frac{2^3}{4} = 2$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}} = +\infty$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{-3x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(-3+\frac{1}{x^3}\right)} = 0$

(f) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+2}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}-1} = -\infty$

(g) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}} = -\frac{2}{3}$

(h) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2x-15}{(5x+3)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(x\left(5+\frac{3}{x}\right)\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{3}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{\left(5+\frac{3}{x}\right)^2} = \frac{2}{25}$

(i) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+2}{4x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(4+\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3+\frac{2}{x}}{4+\frac{4}{x}} = -\frac{3}{4}$

(j) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+1}{(-2x+1)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(x\left(-2+\frac{1}{x}\right)\right)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(-2+\frac{1}{x}\right)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\left(-2+\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

(k) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2$

(l) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right) = +\infty$

(m) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = 0$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}} = \dfrac{2}{3}$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = 2$

(q) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} = 0$

(r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left((x-7)^3(x-5)^4\right)^{12}}{(1-x^{12})^7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(x^3\left(1-\frac{7}{x}\right)^3 x^4\left(1-\frac{5}{x}\right)^4\right)^{12}}{\left(x^{12}\left(\frac{1}{x^{12}}-1\right)\right)^7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{84}\left(\left(1-\frac{7}{x}\right)^3\left(1-\frac{5}{x}\right)^4\right)^{12}}{x^{84}\left(\frac{1}{x^{12}}-1\right)^7}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\left(1-\frac{7}{x}\right)^3\left(1-\frac{5}{x}\right)^4\right)^{12}}{\left(\frac{1}{x^{12}}-1\right)^7} = -1$

2. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+x}{x^7+3x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4\left(7-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^7\left(1+\frac{3}{x^6}-\frac{1}{x^7}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{x^3\left(1+\frac{3}{x^6}-\frac{1}{x^7}\right)} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^{13}}{x^5-x^2+1254} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{13}\left(\frac{1}{x^{13}}-1\right)}{x^5\left(1-\frac{1}{x^3}+\frac{1254}{x^5}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^8\left(\frac{1}{x^{13}}-1\right)}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1254}{x^5}} = -\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(2x^2-1\right)^3}{4x^6-5x^2+16} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\right)^3}{x^6\left(4-\frac{5}{x^4}+\frac{16}{x^6}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^6\left(2-\frac{1}{x^2}\right)^3}{x^6\left(4-\frac{5}{x^4}+\frac{16}{x^6}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)^3}{4-\frac{5}{x^4}+\frac{16}{x^6}} = \dfrac{2^3}{4} = 2$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x}{x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{3}{x}} = -\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{-3x^3+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(-3+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(-3+\frac{1}{x^3}\right)} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}-1} = +\infty$

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(-2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}} = -\dfrac{2}{3}$

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(5x+3)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(x\left(5+\frac{3}{x}\right)\right)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{3}{x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{\left(5+\frac{3}{x}\right)^2} = \dfrac{2}{25}$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+2}{4x+4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(-3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(4+\frac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3+\frac{2}{x}}{4+\frac{4}{x}} = -\dfrac{3}{4}$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x+1}{(-2x+1)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(x\left(-2+\frac{1}{x}\right)\right)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(-2+\frac{1}{x}\right)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\left(-2+\frac{1}{x}\right)^3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$

(k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\right) = -\infty$

(m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = 0$

(n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$

(o) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{3+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}} = \dfrac{2}{3}$

(p) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = 2$

(q) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)^3} = 0$

(r) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left((x-7)^3(x-5)^4\right)^{12}}{(1-x^{12})^7} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(x^3\left(1-\frac{7}{x}\right)^3 x^4\left(1-\frac{5}{x}\right)^4\right)^{12}}{\left(x^{12}\left(\frac{1}{x^{12}}-1\right)\right)^7} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^{84}\left(\left(1-\frac{7}{x}\right)^3\left(1-\frac{5}{x}\right)^4\right)^{12}}{x^{84}\left(\frac{1}{x^{12}}-1\right)^7}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(\left(1-\frac{7}{x}\right)^3\left(1-\frac{5}{x}\right)^4\right)^{12}}{\left(\frac{1}{x^{12}}-1\right)^7} = -1$

3. $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$, mit $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$.

(a) $n < m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{x^{m-n}\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)} = 0$$

(b) $n = m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}$$

(c) $n > m \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-m}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}} = \begin{cases} +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$$

und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ und } n-m \text{ ungerade} \\ +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ und } n-m \text{ gerade} \\ +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ und } n-m \text{ ungerade} \\ -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ und } n-m \text{ gerade} \end{cases}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{n-m}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}} = \begin{cases} -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ und } n-m \text{ ungerade} \\ +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ und } n-m \text{ gerade} \\ +\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ und } n-m \text{ ungerade} \\ -\infty & \text{, für } \frac{a_n}{b_m} < 0 \text{ und } n-m \text{ gerade} \end{cases}$$

2.1.5 Grenzwerte mit Wurzelfunktionen für $x \to \pm\infty$, Seite 20

1. (a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+5}-2x-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3x+5-(2x+1)^2}{\sqrt{4x^2+3x+5}+(2x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+4}{\sqrt{4x^2+3x+5}+(2x+1)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{4}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+2+\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{4}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+2+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{4}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-7}+x}{2x+\sqrt{4x^2+x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}+x}{2x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+x}{2x+x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+1\right)}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+1}{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(3x+4-\sqrt{9x^2+8x-7}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+4)^2-\left(9x^2+8x-7\right)}{3x+4+\sqrt{9x^2+8x-7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16x+23}{3x+4+\sqrt{9x^2+8x-7}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(16+\frac{23}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)+\sqrt{x^2\left(9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(16+\frac{23}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)+x\sqrt{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(16+\frac{23}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}+\sqrt{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{16+\frac{23}{x}}{3+\frac{4}{x}+\sqrt{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+17}-3x}{5x+\sqrt{5x^2-12}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{17}{x^2}\right)}-3x}{5x+\sqrt{x^2\left(5-\frac{12}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{3+\frac{17}{x^2}}-3x}{5x+x\sqrt{5-\frac{12}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{3+\frac{17}{x^2}}-3\right)}{x\left(5+\sqrt{5-\frac{12}{x^2}}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{17}{x^2}}-3}{5+\sqrt{5-\frac{12}{x^2}}}=\frac{\sqrt{3}-3}{5+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}-3\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{20}$$

(e) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-\left(4x^2+5\right)}{2x+\sqrt{4x^2+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{2x+\sqrt{4x^2+5}}=0$$

(f) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

(g) $$\lim_{x\to+\infty}\left(5x+\sqrt{3x^2+1}\right)=+\infty$$

(h) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

(i) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$$

(j) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+2x\right)-\left(x^2+4\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{2}{1}=2$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-\sqrt{9x^2-7x}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-\sqrt{x^2\left(9-\frac{7}{x}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-x\sqrt{9-\frac{7}{x}}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(3-\sqrt{9-\frac{7}{x}}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\sqrt{9-\frac{7}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{0}{2}=0$

Es geht natürlich auch :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-\sqrt{9x^2-7x}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{9x^2-(9x^2-7x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}\cdot\dfrac{1}{3x+\sqrt{9x^2-7x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}\cdot\dfrac{1}{3x+\sqrt{x^2\left(9-\frac{7}{x}\right)}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\cdot\dfrac{1}{3x+x\sqrt{9-\frac{7}{x}}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\cdot\dfrac{1}{3x+x\sqrt{9-\frac{7}{x}}}\right)=0$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}=0$

Es geht natürlich auch :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-\left(4x^2+2x-5\right)}{(x+3)\left(2x+\sqrt{4x^2+2x-5}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+5}{(x+3)\left(2x+\sqrt{4x^2+2x-5}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-2+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+2x-5}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\frac{5}{x}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+2x-5}\right)}=0$

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y^2+y}-y\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2+y-y^2}{\sqrt{y^2+y}+y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{\sqrt{y^2\left(1+\frac{1}{y}\right)}+y}$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{y\sqrt{1+\frac{1}{y}}+y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y}{y\left(\sqrt{1+\frac{1}{y}}+1\right)}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(o) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-\left(x^3+x^2+1\right)}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3-\left(8x^3+9x^2+13x-7\right)}{4x^2+2x\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}+\left(\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-9x^2-13x+7}{4x^2+2x\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}+\left(\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}\right)^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{4x^2+2x\sqrt[3]{x^3\left(8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}+\left(\sqrt[3]{x^3\left(8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{4x^2+2x^2\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}+\left(x\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(4+2\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}\right)^2} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

2. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+5}-2x-1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-2x-1\right) = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-7}+x}{2x+\sqrt{4x^2+x+7}} == \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-7-x^2}{4x^2-(4x^2+x+7)}\cdot\frac{2x-\sqrt{4x^2+x+7}}{\sqrt{x^2+3x-7}-x}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-7}{-x-7}\cdot\frac{2x-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}-x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{x\left(-1-\frac{7}{x}\right)}\cdot\frac{2x-(-x)\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{7}{x}}{-1-\frac{7}{x}}\cdot\frac{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-1\right)}\right)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{7}{x}}{-1-\frac{7}{x}}\cdot\frac{2+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-1}\right) = \frac{3}{-1}\cdot\frac{4}{-2} = 6$$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4-\sqrt{9x^2+8x-7}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+4-\sqrt{x^2\left(9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(3x+4-(-x)\sqrt{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(3x+4+x\sqrt{9+\frac{8}{x}-\frac{7}{x^2}}\right) = -\infty$$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+17}-3x}{5x+\sqrt{5x^2-12}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{17}{x^2}\right)}-3x}{5x+\sqrt{x^2\left(5-\frac{12}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3+\frac{17}{x^2}}-3x}{5x+(-x)\sqrt{5-\frac{12}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{3+\frac{17}{x^2}}-3\right)}{x\left(5-\sqrt{5-\frac{12}{x^2}}\right)}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3+\frac{17}{x^2}}-3}{5-\sqrt{5-\frac{12}{x^2}}} = \frac{-\sqrt{3}-3}{5-\sqrt{5}} = \frac{\left(-\sqrt{3}-3\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}{20}$$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+5}\right) = -\infty$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -2$

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{3x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x+\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x+(-x)\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(5-\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}\right)\right) = -\infty$$

(h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+-\infty}\frac{x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = -\infty$

(j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+2x)-(x^2+4)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+4}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+(-x)\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=\dfrac{2}{-2}=-1$

(k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$

Es geht natürlich auch :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{x+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)=0$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sqrt{9x^2-7x}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-\sqrt{9x^2-7x}}{x^2+x-x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-\sqrt{x^2\left(9-\frac{7}{x}\right)}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}{1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-(-x)\sqrt{9-\frac{7}{x}}}{x}\cdot\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x\left(3+\sqrt{9-\frac{7}{x}}\right)}{x}\cdot\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\left(3+\sqrt{9-\frac{7}{x}}\right)}{1}\cdot\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{1}\right)=+\infty$

(m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-(-x)\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2+\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}=4$

(n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ existiert nicht

(o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-(x^3+x^2+1)}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2-1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+x\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+x^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\frac{1}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$

(p) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^3-(8x^3+9x^2+13x-7)}{4x^2+2x\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}+\left(\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-9x^2-13x+7}{4x^2+2x\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}+\left(\sqrt[3]{8x^3+9x^2+13x-7}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{4x^2+2x\sqrt[3]{x^3\left(8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}+\left(\sqrt[3]{x^3\left(8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}\right)^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{4x^2+2x^2\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}+\left(x\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}\right)^2}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(4+2\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-9-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\frac{9}{x}+\frac{13}{x^2}-\frac{7}{x^3}}\right)^2} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

2.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \to a \in \mathbb{R}$, Seite 22

1. f ist in -3 nicht definiert

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert für folgende Stellen nicht :

   - $a = -1$ (linksseitiger Grenzwert $\neq$ rechtsseitiger Grenzwert)
   - $a = 2$ (linksseitiger Grenzwert $\neq$ rechtsseitiger Grenzwert)

3. - $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 2$
   - $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -1$ und $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -2$

4. Die Aussage $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ist für folgende Stellen a falsch :

   - $a = -3$ ($f(-3)$ existiert nicht)
   - $a = -1$ ($\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ existiert nicht)
   - $a = 2$ ($\lim\limits_{x\to2} f(x)$ existiert nicht)
   - $a = 5$ ($f(5) = -2 \neq 3 = \lim\limits_{x\to5} f(x)$)

2.2.2 Stetigkeit, Seite 25

1. $f_1(x) = 3x - 7$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : ganzrationale Funktion (Satz)

   $f_2(x) = \sin(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (Satz)

   $\Rightarrow f_3(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = \sin(3x-7)$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : Verkettung von Funktionen (Satz)

   $f_4(x) = 12x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : ganzrationale Funktion (Satz)

   $\Rightarrow f_5(x) = (f_3 + f_4)(x) = \sin(3x-7) + 12x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : Summe von Funktionen (Satz)

   $f_6(x) = x + 7$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : ganzrationale Funktion (Satz)

   $\Rightarrow f(x) = \left(\frac{f_5}{f_6}\right)(x) = \frac{\sin(3x-7)+12x}{x+7}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{-7\}$ stetig : Division von Funktionen (Satz) und $x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$

2. $f_1(x) = x^2 - 4$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : ganzrationale Funktion (Satz)

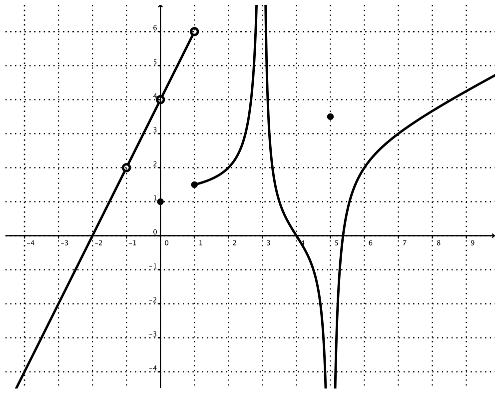
   $f_2(x) = \sqrt{x}$ ist auf $\mathbb{R}_+$ stetig (Satz)

   $\Rightarrow f_3(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = \sqrt{x^2-4}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\,]-2;2[$ stetig : Verkettung von Funktionen (Satz) und $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\setminus\,]-2;2[$

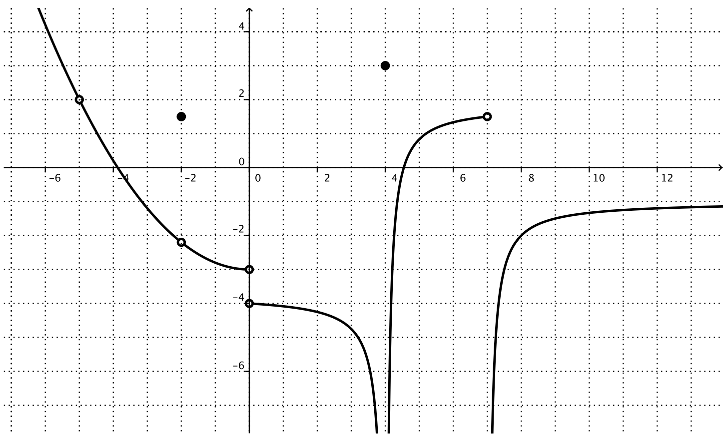
   $f_4(x) = x - 2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig : ganzrationale Funktion (Satz)

   $\Rightarrow f(x) = \left(\frac{f_3}{f_4}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\,]-2;2]$ stetig : Division von Funktionen (Satz) und $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

3. Eine mögliche Darstellung von f :



4. Eine mögliche Darstellung von f :



f so wie auf dieser Darstellung gegeben ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-5; -2; 0; 4; 7\}$ stetig

5. f ist stetig für $x < 4$ (ganzrationale Funktion)

   f ist stetig für $x > 4$ (ganzrationale Funktion)

   Es könnte in $x = 4$ eventuell ein Problem geben...

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 1 \\ \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (2x - 7) = 2 \cdot 4 - 7 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \left(x^2 - 15\right) = 4^2 - 15 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$$

   Daraus folgt, dass f auch in 4 stetig ist.

   Also ist f auf $\mathbb{R}$ stetig.

6. Damit f in 3 stetig ist braucht man : $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   $f(3) = 2$

   $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} a = a$

   $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x + b) = 3 + b$

   Damit der Grenzwert in 3 existiert braucht man : $a = 3 + b$

   Damit f in 3 stetig ist braucht man zusätzlich : $a = 3 + b = 2$

   Daraus folgt : $a = 2$ und $b = -1$

7. (a) Damit f in 1 stetig ist braucht man : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Da die Funktion gegeben durch $x \mapsto -\sqrt{x+8}$ auf dem gegebenen Stück $[1;+\infty[$ stetig ist, weiss man schon, dass f in 1 rechtsseitig stetig ist.

$$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\sqrt{1+8} = -3$$

Der linksseitige Grenzwert ist :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(x^2 - a\right) = 1^2 - a = 1 - a$$

Damit f in 1 stetig ist braucht man : $-3 = 1 - a$

Daraus folgt : $a = 4$

(b) f ist stetig für $x < 1$ (ganzrationale Funktion)

f ist stetig für $x > 1$ (ganzrationale Funktion)

für $a = 4$ ist f stetig in $x = 1$ (siehe (a))

Also ist f für $a = 4$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

8. (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{, für } x \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{-x} & \text{, für } x < 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0 \\ \frac{x}{x} & \text{, für } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{, für } x < 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0 \\ 1 & \text{, für } x > 0 \end{cases}$

f ist stetig für $x < 0$ (konstante Funktion)

f ist stetig für $x > 0$ (konstante Funktion)

f ist in 0 nicht stetig :

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{array}$$

$$-1 \neq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \text{ existiert nicht}$$

Also ist der Stetigkeitsbereich von f : $\mathbb{R}^*$

(b) $f(x) = x + |x| = \begin{cases} x + x & \text{, für } x \geq 0 \\ x - x & \text{, für } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{, für } x \geq 0 \\ 0 & \text{, für } x < 0 \end{cases}$

f ist stetig für $x < 0$ (konstante Funktion)

f ist stetig für $x > 0$ (ganzrationale Funktion)

f ist in 0 stetig :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2\cdot 0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Also ist der Stetigkeitsbereich von f : $\mathbb{R}$

9. (a) Eine Funktion, die „in jedem Punkt springt" wäre solch eine Funktion.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{, für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

2.2.4 Berechnung von Grenzwerten für $x \to a$
(ganz- und gebrochenrationale Funktionen, Funktionen mit Wurzeln, Funktionen mit Absolutwerten), Seite 32

1. (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1} = \dfrac{-3}{3} = -1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 2x + 2}{x + 1} = \dfrac{2}{1} = 2$

(c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 6}{(x+2)^2}$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2 + 3x + 6}{(x+2)^2} = +\infty \;(\text{„}\tfrac{4}{(0^-)^2}\text{"})$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+3x+6}{(x+2)^2} = +\infty \text{ („}\tfrac{4}{(0^+)^2}\text{“)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+6}{(x+2)^2} = +\infty$$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(x^2+2x+1\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \text{ („}\tfrac{3}{0^-}\text{“)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty \text{ („}\tfrac{3}{0^+}\text{“)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} \text{ existiert nicht}$$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x-2) = -2$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{2x^2+x-3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(2x+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{5}$

(i) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+3)} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{-8}{-2} = 4$

(j) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} = 0$

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$

(l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x}{x+2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+2) = 3$

(n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3-2}{x^3+x^2-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(x^3+2x^2+2x+2\right)}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2+2x+2}{x^2+2x+2} = \dfrac{7}{5}$

(o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^2-x-1}{x} = +\infty \text{ („}\tfrac{-1}{0^-}\text{“)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x^2-x-1}{x} = -\infty \text{ („}\tfrac{-1}{0^+}\text{“)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2-x-1}{x} \text{ existiert nicht}$$

(p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^4-\frac{3}{x}}{x^5-x+\frac{1}{x}} = \dfrac{32-\frac{3}{2}}{32-2+\frac{1}{2}} = 1$

(q) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{(x-2)(x+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2-4}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

(r) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)}$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)} = -\infty \text{ („}\tfrac{18}{0^-\cdot 2}\text{“)}$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)} = +\infty \text{ („}\tfrac{18}{0^+\cdot 2}\text{“)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15} \text{ existiert nicht}$$

(s) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}=-\infty$ („$\frac{3}{0^-\cdot 5}$")

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}=+\infty$ („$\frac{2}{0^+\cdot 5}$")

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^2-4}$ existiert nicht

(t) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{-(1+x+x^2)}=\dfrac{3}{-3}=-1$

(u) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-1}{x-2}=-\infty$ („$\frac{1}{0^-}$")

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{x-2}=+\infty$ („$\frac{1}{0^+}$")

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$ existiert nicht

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-(x+1)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2-x}{x\left(\sqrt{1+x}+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(-x-1)}{x\left(\sqrt{1+x}+x+1\right)}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x-1}{\sqrt{1+x}+x+1}=-\dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-(x+6)}{x+1-4}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{3+\sqrt{x+6}}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{-x+3}{x-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{3+\sqrt{x+6}}\right)$
$=\lim\limits_{x\to 3}\left(-\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{3+\sqrt{x+6}}\right)=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$

(c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-(x+6)}{x^2-(2-x)}\cdot\dfrac{x-\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{x+6}}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-1)}\cdot\dfrac{x-\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{x+6}}\right)$
$=\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x-3}{x-1}\cdot\dfrac{x-\sqrt{2-x}}{x-\sqrt{x+6}}\right)=\dfrac{-5}{-3}\cdot\dfrac{-4}{-4}=\dfrac{5}{3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$: es existiert bloss der rechtsseitige Grenzwert, da die Funktion $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ für $x\le 0$ nicht definiert ist

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

(e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-x+2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-(x-2)^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+x-2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+5x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+x-2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(-x+1)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+x-2\right)}$
$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x}+x-2}=\dfrac{-3}{4}=-\dfrac{3}{4}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-(3x-2)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3x-2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-9x^2+13x-4}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3x-2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(-9x+4)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3x-2\right)}$
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-9x+4}{\sqrt{x}+3x-2}=\dfrac{-5}{2}=-\dfrac{5}{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{2}}$
$=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

(h) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}=\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x^2-5}{(x^2-5)\left(x+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

oder auch : $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}=\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x-\sqrt{5}}{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{1}{x+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

(i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-2x+7}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+2x-7\right)}{2x-1-(2x-7)^2}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+2x-7\right)}{-4x^2+30x-50}$
$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+2x-7\right)}{(x-5)(-4x+10)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}+2x-7}{-4x+10}=\dfrac{6}{-10}=-\dfrac{3}{5}$

(j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2+1-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=2$

(k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{16+x-16}{x\left(\sqrt{16+x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{16+x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{16+x}+4}=\dfrac{1}{8}$

(l) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{x+1-(2x-1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{-x+2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-1}}{-1}=\dfrac{2\sqrt3}{-1}=-2\sqrt3$

(m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{4}}{x\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x}{4}}{\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}}=\dfrac{0}{2}=0$

(n) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}=\dfrac{0}{\sqrt7-\sqrt5}=0$

(o) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x}}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1-2x}{x+2-3x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{-x+1}{-2x+2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{-(x-1)}{-2(x-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{-1}{-2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}\right)=\dfrac12\cdot\dfrac{2\sqrt3}{2\sqrt2}=\dfrac{\sqrt6}{4}$

3. (a) $\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}=\begin{cases}\frac{-(x^2-4)}{x-2} & \text{, für } -2<x<2\\ \frac{x^2-4}{x-2} & \text{, für } x\in\,]-\infty;-2]\cup\,]2;\infty[\end{cases}=\begin{cases}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} & \text{, für } -2<x<2\\ \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} & \text{, für } x\in\,]-\infty;-2]\cup\,]2;\infty[\end{cases}$

$=\begin{cases}-(x+2) & \text{, für } -2<x<2\\ x+2 & \text{, für } x\in\,]-\infty;-2]\cup\,]2;\infty[\end{cases}=\begin{cases}-x-2 & \text{, für } -2<x<2\\ x+2 & \text{, für } x\in\,]-\infty;-2]\cup\,]2;\infty[\end{cases}$

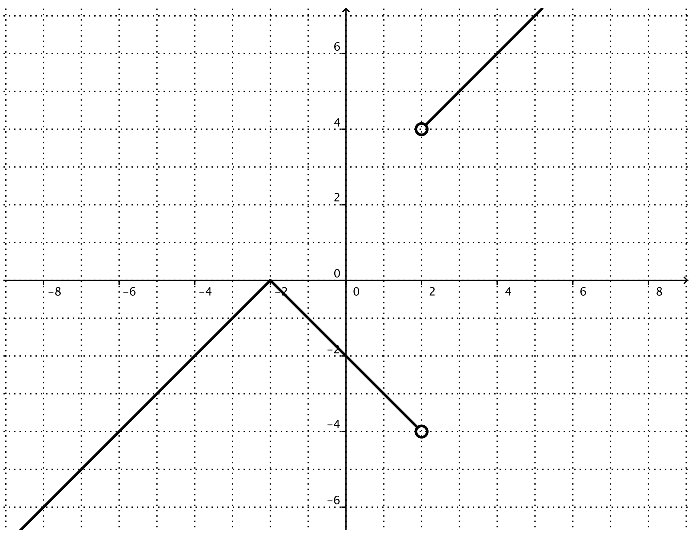
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}=\;?$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}(-x-2)=-4$

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}(x+2)=4$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}$ existiert nicht

Graphische Darstellung der Funktion $x\mapsto\dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}$



(b) $\dfrac{x^2+|x|}{|x|}=\begin{cases}\frac{x^2-x}{-x} & \text{, für } x<0\\ \frac{x^2+x}{x} & \text{, für } x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{x(x-1)}{-x} & \text{, für } x<0\\ \frac{x(x+1)}{x} & \text{, für } x>0\end{cases}=\begin{cases}-x+1 & \text{, für } x<0\\ x+1 & \text{, für } x>0\end{cases}$

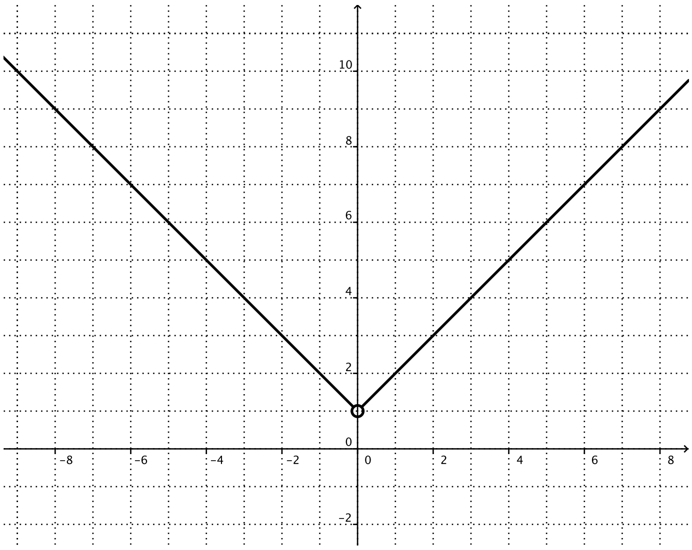
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|} = ?$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x + 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|} = 1$

Graphische Darstellung der Funktion $x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$



(c) $\dfrac{x^2 - 2x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{-x} & \text{, für } x < 0 \\ \frac{x^2-2x}{x} & \text{, für } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x(x-2)}{-x} & \text{, für } x < 0 \\ \frac{x(x-2)}{x} & \text{, für } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2 & \text{, für } x < 0 \\ x - 2 & \text{, für } x > 0 \end{cases}$

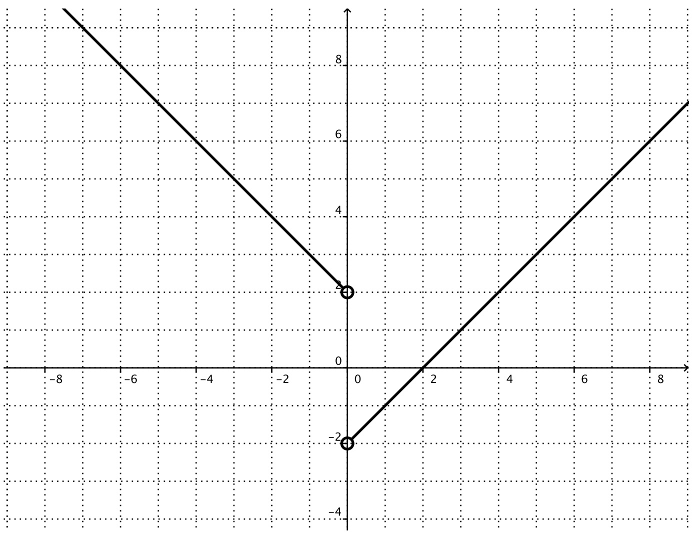
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} = ?$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x + 2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 2x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{|x|}$ existiert nicht

Graphische Darstellung der Funktion $x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x}{|x|}$



(d) $\dfrac{6x^2+19x-7}{|3x-1|} = \begin{cases} \frac{6x^2+19x-7}{-(3x-1)} & \text{, für } x < \frac{1}{3} \\ \frac{6x^2+19x-7}{3x-1} & \text{, für } x > \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} \frac{(3x-1)(2x+7)}{-(3x-1)} & \text{, für } x < \frac{1}{3} \\ \frac{(3x-1)(2x+7)}{3x-1} & \text{, für } x > \frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} -2x-7 & \text{, für } x < \frac{1}{3} \\ 2x+7 & \text{, für } x > \frac{1}{3} \end{cases}$

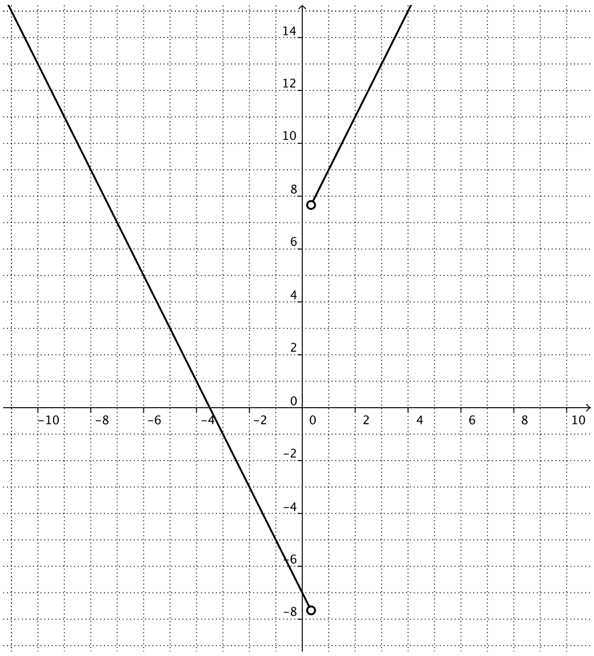
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+19x-7}{|3x-1|} = ?$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{6x^2+19x-7}{|3x-1|} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} (-2x-7) = -\frac{23}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} \frac{6x^2+19x-7}{|3x-1|} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^+} (2x+7) = \frac{23}{3}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+19x-7}{|3x-1|}$ existiert nicht

Graphische Darstellung der Funktion $x \mapsto \dfrac{6x^2+19x-7}{|3x-1|}$



(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}$ existiert nicht

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-3|-|2x+3|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(2x-3)-(2x+3)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (-4) = -4$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|x^2-1\right|}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|\cdot|x+1|}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|\cdot|x+1|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)\cdot|x+1|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-|x+1|}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|\cdot|x+1|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\cdot|x+1|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x+1|}{x-1} = +\infty$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left|x^2-1\right|}{x^2-2x+1} = +\infty$

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x|-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{|x-1|} = 0$

2.2.5 Grenzwerte mit trigonometrischen Funktionen für $x \to a$, Seite 39

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2\right) = 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \cdot \lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 2 \cdot 1 = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)}\right) = \frac{3}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x)}$

$= \frac{3}{2} \cdot \lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b}} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}\right) = \frac{1}{20} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} = \frac{1}{20} \cdot \lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{1}{20}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{1-\cos^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

oder auch :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)(1+\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)(1+\cos(x))}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(7x)}{\sin(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{\cos(7x)}}{\sin(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)\cos(7x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \cdot \frac{1}{\cos(7x)} \cdot \frac{7}{3}\right)$

$= \frac{7}{3} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(3x)} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(7x)} = \frac{7}{3} \cdot \lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}} \cdot \frac{1}{1} = \frac{7}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\lim\limits_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b}} \cdot \frac{1}{1}$

$= \frac{7}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{7}{3}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{a\to 0} \frac{\cos(a+\frac{\pi}{2})}{a} = \lim\limits_{a\to 0} \frac{-\sin(a)}{a} = -\lim\limits_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = -1$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x+1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

(i) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \tan^2(x)\right) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \frac{\sin^2(x)}{1-\sin^2(x)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \frac{\sin^2(x)}{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1-\sin(x)} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

oder auch :

$\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \tan^2(x)\right) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1+\sin(x)) \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \cdot \frac{1-\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left((1-\sin^2(x)) \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)(1-\sin(x))}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \left(\cos^2(x) \cdot \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)(1-\sin(x))}\right)$

$= \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1-\sin(x)} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos(x)}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}$ existiert nicht

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(ax)}{ax} \cdot a\right) = a \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \cdot \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = a \cdot 1 = a$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(x)}{x}\cdot\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}=1\cdot\dfrac{0}{1+1}=0$

(n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\cos(x)}\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos(x)}=1^2\cdot\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin(x)}{(1-\sin(x))\cdot(1+\sin(x))}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\sin(x)}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

oder auch :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}\cdot\dfrac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2(x)}{\cos^2(x)\cdot(1+\sin(x))}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)(1+\sin(x))}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\sin(x)}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(x)}{x\cdot\tan(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{x\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1\cdot 1=1$

(q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cdot\sin(x)}{1-\cos(x)}\cdot\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(x)(1+\cos(x))}{1-\cos^2(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(x)(1+\cos(x))}{\sin^2(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+\cos(x))}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos(x))=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos(x))=\dfrac{1}{1}\cdot(1+1)=2$

(r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2(2x)}{1-\cos(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)}}{1-\cos(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)(1-\cos(3x))}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)(1-\cos(3x))}\cdot\dfrac{1+\cos(3x)}{1+\cos(3x)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(2x)(1+\cos(3x))}{\cos^2(2x)(1-\cos^2(3x))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(2x)(1+\cos(3x))}{\cos^2(2x)\sin^2(3x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3x}{\sin(3x)}\right)^2\cdot\dfrac{1+\cos(3x)}{\cos^2(2x)}\cdot\dfrac{2^2}{3^2}\right)$

$=\dfrac{4}{9}\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin(3x)}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos(3x)}{\cos^2(2x)}=\dfrac{4}{9}\cdot\left(\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin(a)}{a}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}}\right)^2\cdot\dfrac{1+1}{1^2}$

$=\dfrac{4}{9}\cdot(1)^2\cdot\left(\dfrac{1}{\lim\limits_{b\to 0}\frac{\sin(b)}{b}}\right)^2\cdot\dfrac{1+1}{1^2}=\dfrac{4}{9}\cdot(1)^2\cdot\left(\dfrac{1}{1}\right)^2\cdot\dfrac{1+1}{1^2}=\dfrac{8}{9}$

(s) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{1-\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{1-\cos(a)}=\lim\limits_{a\to 0}\left(\dfrac{a}{1-\cos(a)}\cdot\dfrac{1+\cos(a)}{1+\cos(a)}\right)$

$=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a(1+\cos(a))}{1-\cos^2(a)}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a(1+\cos(a))}{\sin^2(a)}=\lim\limits_{a\to 0}\left(\dfrac{a}{\sin(a)}\cdot(1+\cos(a))\cdot\dfrac{1}{\sin(a)}\right)$

$=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{\sin(a)}\cdot\lim\limits_{a\to 0}(1+\cos(a))\cdot\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{\sin(a)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin(a)}{a}}\cdot 2\cdot\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{\sin(a)}=\dfrac{1}{1}\cdot 2\cdot\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{\sin(a)}$

$\lim\limits_{a\to 0^-}\dfrac{1}{\sin(a)}=-\infty$

$\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{\sin(a)}=+\infty$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{1-\sin(x)}$ existiert nicht

(t) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin(x)}{x}=0$

2. $\dfrac{\pi}{180}$, weil ...

3.2 Ableitung an einer Stelle, Seite 42

1. (a) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}1=1$

(b) $f'(-3) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x+1-1}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} x = -3$

(c) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{3-(2x+1)}{3(2x+1)}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x+2}{3(2x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2(x-1)}{3(2x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2}{3(2x+1)} = -\dfrac{2}{9}$

(d) $f'(4) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4}$

(e) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x-1}{x+1}+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x-1+x+1}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x+1} = 3$

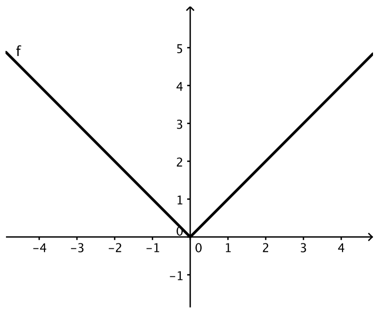
(f) $f'(9) = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{3}}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\frac{3-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}}{x-9} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{3\sqrt{x}(x-9)} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{9-x}{3\sqrt{x}(x-9)(3+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 9} \dfrac{-1}{3\sqrt{x}(3+\sqrt{x})} = -\dfrac{1}{54}$

2. (a) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$

Also existiert $f'(0)$ nicht.

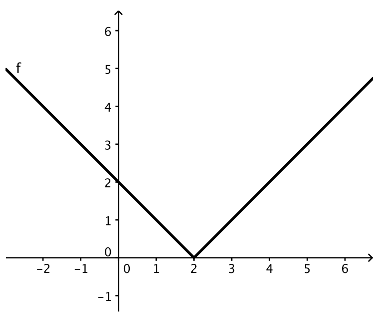


(b) $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1$

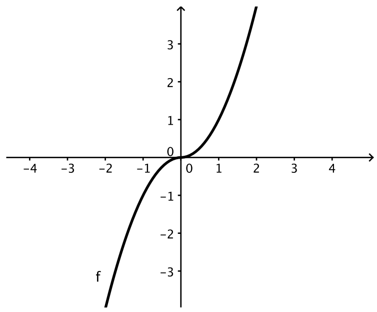
Also existiert $f'(2)$ nicht.



(c) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

für die graphische Darstellung :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{, für } x < 0 \\ x^2 & \text{, für } x \geq 0 \end{cases}$$



(d) $f'(-1) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\left|x^2-1\right|}{x+1}$

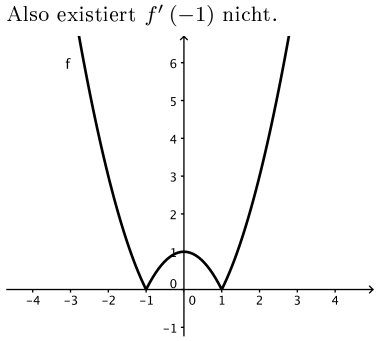
$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{\left|x^2-1\right|}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} (x-1) = -2$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\left|x^2-1\right|}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-\left(x^2-1\right)}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} -(x-1) = 2$

Also existiert $f'(-1)$ nicht.



3. $a = -7$ (Spitze : der Grenzwert zur Berechnung der Ableitung ist von links und rechts nicht derselbe)

$a = 4$ (die Funktion f ist an dieser Stelle nicht definiert)

$a \approx 8.5$ (die Funktion f ist an dieser Stelle nicht stetig)

3.2.1 Ableitungsfunktion, Seite 43

1. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x+3-(a+3)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$

   f ist auf $\mathbb{R}$ ableitbar, oder anders gesagt : $D_{f'} = \mathbb{R}$

2. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)\left(x^2+xa+a^2\right)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \left(x^2+xa+a^2\right) = 3a^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

   $D_{f'} = \mathbb{R}$

3. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{4x^2+5x+6-\left(4a^2+5a+6\right)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{4\left(x^2-a^2\right)+5(x-a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(4(x+a)+5)}{x-a}$

   $= \lim\limits_{x\to a} (4(x+a)+5) = 8a+5 \Rightarrow f'(x) = 8x+5$

   $D_{f'} = \mathbb{R}$

4. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3+3x-\left(a^3+3a\right)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3+3(x-a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)\left(x^2+xa+a^2+3\right)}{x-a}$

   $= \lim\limits_{x\to a} \left(x^2+xa+a^2+3\right) = 3a^2+2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+3$

   $D_{f'} = \mathbb{R}$

5. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^4-a^4}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)\left(x^3+x^2a+xa^2+a^3\right)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \left(x^3+x^2a+xa^2+a^3\right) = 4a^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

   $D_{f'} = \mathbb{R}$

6. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a-x}{ax(x-a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-1}{ax} = -\dfrac{1}{a^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

   $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

7. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(a-x)(a+x)}{a^2x^2(x-a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{-(a+x)}{a^2x^2} = -\dfrac{2a}{a^4} = -\dfrac{2}{a^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

   $D_{f'} = \mathbb{R}^*$

8. $f(x) = \sqrt{x} f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$

3.5.7 Aufgaben, Seite 55

1. (a) $f'(x) = 4x-4$

   (b) $f'(x) = 3x^2+10x-2$

   (c) $f'(x) = 15x^4 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1$

   (d) $f'(x) = \dfrac{-3\cdot(2x-1)-(4-3x)\cdot 2}{(2x-1)^2} = -\dfrac{5}{(2x-1)^2}$

   (e) $f'(x) = \dfrac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{(x-1)(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}$

   (f) $f'(x) = \dfrac{(4x-5)\left(5x^2-8x-10\right)-\left(2x^2-5x+4\right)(10x-8)}{\left(5x^2-8x-10\right)^2} = \dfrac{9x^2+80x+82}{\left(5x^2-8x-10\right)^2}$

   (g) $f'(x) = \dfrac{3\cdot\left(x^3+2x^2+x-10\right)-(3x+5)\left(3x^2+4x+1\right)}{\left(x^3+2x^2+x-10\right)^2} = \dfrac{-6x^3-21x^2-20x-35}{\left(x^3+2x^2+x-10\right)^2} = -\dfrac{6x^3+21x^2+20x+35}{\left(x^3+2x^2+x-10\right)^2}$

   (h) $f'(x) = \dfrac{-5\cdot 4x}{\left(2x^2-1\right)^2} = -\dfrac{20x}{\left(2x^2-1\right)^2}$

   (i) $f'(x) = \dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

(j) $f'(x) = (\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$
$= \frac{1}{\cos^2(x)}$ oder $= 1+\tan^2(x)$

(k) $f'(x) = (\tan(x)\cdot\cos(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\cos(x)\right)' = (\sin(x))' = \cos(x)$

(l) $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot(1+\cos(x)) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)+\cos^2(x)+\sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x)+1}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1}{1+\cos(x)}$

(m) $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot(2\sin(x)+1) - (\sin(x)-1)\cdot 2\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2} = \frac{3\cos(x)}{(2\sin(x)+1)^2}$

(n) $f'(x) = \frac{\left(\cos(x) - (x\cos(x))'\right)\cdot(\cos(x)+x\sin(x)) - (\sin(x)-x\cos(x))\cdot\left(-\sin(x)+(x\sin(x))'\right)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$
$= \frac{(\cos(x) - (\cos(x)+x\cdot(-\sin(x))))\cdot(\cos(x)+x\sin(x)) - (\sin(x)-x\cos(x))\cdot(-\sin(x)+\sin(x)+x\cos(x))}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$
$= \frac{x\sin(x)\cdot(\cos(x)+x\sin(x)) - (\sin(x)-x\cos(x))\cdot x\cos(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} = \frac{x^2\sin^2(x)+x^2\cos^2(x)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$
$= \frac{x^2\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)}{(\cos(x)+x\sin(x))^2} = \frac{x^2}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$

(o) $f'(x) = \frac{-(\cos(x)\sin(x))'}{\cos^2(x)\sin^2(x)} = \frac{-(-\sin(x)\sin(x)+\cos(x)\cos(x))}{\cos^2(x)\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$

(p) $f'(x) = -2\sin(x)\cdot(4\sin(x)-1) + (2\cos(x)-3)\cdot 4\cos(x) = -8\sin^2(x)+2\sin(x)+8\cos^2(x)-12\cos(x)$
$= -2\cdot\left(4\sin^2(x)-4\cos^2(x)-\sin(x)+6\cos(x)\right)$

2. (a) $f'(x) = 5\cdot(3-x)^4\cdot(-1) = -5\cdot(3-x)^4$

(b) $f'(x) = 2\cdot\left(2x^2-3\right)\cdot 4x = 8x\cdot\left(2x^2-3\right)$

(c) $f'(x) = 5\cdot\left(x^2+a^2\right)^4\cdot 2x = 10x\cdot\left(x^2+a^2\right)^4$

(d) $f'(x) = 2\cdot\left(2x^2+3x+4\right)\cdot(4x+3)$

(e) $f'(x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

(f) $f'(x) = \cos(2x)\cdot 2 = 2\cos(2x)$

(g) $f'(x) = 2\cos(x) - \sin(3x)\cdot 3 = 2\cos(x) - 3\sin(3x)$

(h) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\cdot a = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$

(i) $f'(x) = \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\cdot\cos(2x) + \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(-\sin(2x))\cdot 2$
$= 3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) - 2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)$

(j) $f'(x) = \cos(2x)\cdot 2\cdot\cos(3x) + \sin(2x)\cdot(-\sin(3x))\cdot 3 = 2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)$

(k) $f'(x) = 3\cdot\sin^2(4x)\cdot(\sin(4x))' = 3\sin^2(4x)\cdot\cos(4x)\cdot 4 = 12\sin^2(4x)\cos(4x)$

(l) $f'(x) = 2\cdot\tan(5x)\cdot(\tan(5x))' = 2\tan(5x)\cdot\frac{1}{\cos^2(5x)}\cdot 5 = 10\cdot\frac{\sin(5x)}{\cos(5x)}\cdot\frac{1}{\cos^2(5x)} = \frac{10\sin(5x)}{\cos^3(5x)}$

(m) $f'(x) = \frac{\left((3x-2)^2-1\right)'\cdot(3x-2) - \left((3x-2)^2-1\right)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{2\cdot(3x-2)\cdot 3\cdot(3x-2) - 3\cdot\left((3x-2)^2-1\right)}{(3x-2)^2}$
$= \frac{3\cdot\left(2\cdot(3x-2)^2-(3x-2)^2+1\right)}{(3x-2)^2} = \frac{3\cdot\left((3x-2)^2+1\right)}{(3x-2)^2} = \frac{3\cdot\left(9x^2-12x+5\right)}{(3x-2)^2}$

(n) $f'(x) = \frac{\left((x-1)^3\right)'\cdot(x+1)^2 - (x-1)^3\cdot\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4} = \frac{3\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2 - (x-1)^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$
$= \frac{(x-1)^2(x+1)(3(x+1)-2(x-1))}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

(o) $f'(x) = \left((x+5)^2\right)' \cdot (x-1)(2x+3)^3 + (x+5)^2 \cdot (x-1)' \cdot (2x+3)^3 + (x+5)^2(x-1) \cdot \left((2x+3)^3\right)'$
$= 2(x+5)(x-1)(2x+3)^3 + (x+5)^2(2x+3)^3 + (x+5)^2(x-1) \cdot 3(2x+3)^2 \cdot 2$
$= (x+5)(2x+3)^2(2(x-1)(2x+3) + (x+5)(2x+3) + 6(x+5)(x-1))$
$= (x+5)(2x+3)^2\left(4x^2+2x-6+2x^2+13x+15+6x^2+24x-30\right) = (x+5)(2x+3)^2\left(12x^2+39x-21\right)$
$= 3(x+5)(2x+3)^2\left(4x^2+13x-7\right)$

(p) $f'(x) = \left((2x+1)^2\right)' \cdot (1-3x)^3 + (2x+1)^2 \cdot \left((1-3x)^3\right)' = 2(2x+1) \cdot 2 \cdot (1-3x)^3 + (2x+1)^2 \cdot 3(1-3x)^2 \cdot (-3)$
$= (2x+1)(1-3x)^2(4(1-3x) - 9(2x+1)) = (2x+1)(1-3x)^2(-30x-5) = -5(2x+1)(1-3x)^2(6x+1)$

(q) $f'(x) = \left(\left(3x^2+4\right)^5\right)' \cdot \left(2x^2-3x\right)^6 + \left(3x^2+4\right)^5 \cdot \left(\left(2x^2-3x\right)^6\right)'$
$= 5\left(3x^2+4\right)^4 \cdot 6x \cdot \left(2x^2-3x\right)^6 + \left(3x^2+4\right)^5 \cdot 6\left(2x^2-3x\right)^5(4x-3)$
$= 6\left(3x^2+4\right)^4\left(2x^2-3x\right)^5\left(5x\left(2x^2-3x\right) + \left(3x^2+4\right)(4x-3)\right)$
$= 6\left(3x^2+4\right)^4 x^5 (2x-3)^5\left(10x^3-15x^2+12x^3-9x^2+16x-12\right)$
$= 6x^5\left(3x^2+4\right)^4(2x-3)^5\left(22x^3-24x^2+16x-12\right) = 12x^5\left(3x^2+4\right)^4(2x-3)^5\left(11x^3-12x^2+8x-6\right)$

(r) $f'(x) = \dfrac{\left(\cos^2(2x)\right)' \cdot \tan(x) - \cos^2(2x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)} = \dfrac{2\cos(2x)(\cos(2x))' \cdot \tan(x) - \cos^2(2x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)}$
$= \dfrac{2\cos(2x)(-\sin(2x)) \cdot 2 \cdot \tan(x) - \cos^2(2x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)} = \dfrac{\frac{-4\cos(2x)\sin(2x)\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}$
$= \dfrac{-4\cos(2x)\sin(2x)\sin(x)\cos(x) - \cos^2(2x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{-\cos(2x)(4\sin(2x)\sin(x)\cos(x) - \cos(2x))}{\sin^2(x)}$

(s) $f'(x) = \cos\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right)' = \cos\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \dfrac{2x-1}{x} \cdot \left(\dfrac{2x-1}{x}\right)'$
$= \cos\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \dfrac{2x-1}{x} \cdot \dfrac{2x-(2x-1)}{x^2} = \dfrac{2(2x-1)}{x^3} \cdot \cos\left(\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^2\right)$

(t) $f'(x) = -\sin(x)\left(\sin^2(x)+2\right) + \cos(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)\left(\sin^2(x)+2-2\cos^2(x)\right)$
$= -\sin(x)\left(\sin^2(x)+2\left(1-\cos^2(x)\right)\right) = -\sin(x)\left(\sin^2(x)+2\sin^2(x)\right) = -3\sin^3(x)$

3. ...

4. (a) $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(b) $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

(c) $f'(x) = \left(x^{\frac{4}{7}}\right)' = \dfrac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}} = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$

(d) $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

(e) $f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)' = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} = -\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}} = -\dfrac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

(f) $f'(x) = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

(g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{8x^2-2x+3}} \cdot (16x-2) = \dfrac{2(8x-1)}{2\sqrt{8x^2-2x+3}} = \dfrac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}$

(h) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(i) $f'(x) = \left(\left(4x^2-2x\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2} \cdot \left(4x^2-2x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (8x-2) = \dfrac{3}{2} \cdot 2(4x-1)\sqrt{4x^2-2x} = 3(4x-1)\sqrt{2x(2x-1)}$

(j) $f'(x) = \left(\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3} \cdot \left(x^2+x+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+1) = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$

(k) $f'(x) = \left(\left(1-x^2\right)^{\frac{2}{3}}\right)' = \dfrac{2}{3} \cdot \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-2x) = -\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$

(l) $f'(x) = 3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \left(1+\sqrt[3]{x}\right)' = 3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)' = 3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}$

(m) $f'(x) = \left(\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3x-2}{x+1}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{3x-2}} \cdot \frac{3(x+1)-(3x-2)}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3x-2}} \cdot \frac{5}{(x+1)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3x-2} \cdot \frac{1}{(x+1)^4}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3x-2} \cdot \frac{1}{(x+1)^3}} = \frac{5}{2\sqrt{(3x-2)(x+1)^3}}$

$= \frac{5}{2|x+1|\sqrt{(3x-2)(x+1)}}$

(n) $f'(x) = \sqrt{a-x} + (a+x) \cdot \left(\sqrt{a-x}\right)' = \sqrt{a-x} + (a+x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot (-1) = \frac{2\left(\sqrt{a-x}\right)^2 - (a+x)}{2\sqrt{a-x}}$

$= \frac{2(a-x)-(a+x)}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$

(o) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\sin(x)\cos(x)}} \cdot (4\sin(x)\cos(x))' = \frac{1}{2\sqrt{4\sin(x)\cos(x)}} \cdot 4(\cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)))$

$= \frac{4\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{\sin(x)\cos(x)}} = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sqrt{\sin(x)\cos(x)}}$

(p) $f'(x) = \frac{-\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x + 1}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} = -\frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}$

$= -\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$

(q) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1-x)^4}}$

$= \sqrt{\frac{1}{(1+x)(1-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} = \frac{1}{|1-x|\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{(1+x)(1-x)}}$

(r) $f'(x) = \frac{4x \cdot x\sqrt{1+x^2} - \left(2x^2-1\right)\left(x\sqrt{1+x^2}\right)'}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{4x^2\sqrt{1+x^2} - \left(2x^2-1\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}$

$= \frac{4x^2\sqrt{1+x^2} - \left(2x^2-1\right)\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{\frac{4x^2\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 - \left(2x^2-1\right)\left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 + x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2\left(1+x^2\right)}$

$= \frac{4x^2\left(1+x^2\right) - \left(2x^2-1\right)\left(1+x^2+x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x^2\left(1+x^2\right) - \left(2x^2-1\right)\left(1+2x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{4x^2 + 4x^4 - \left(4x^4-1\right)}{x^2\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x^2+1}{x^2\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$

5. (a) $\exp'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h - 1\right)}{h} = e^a \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^a \cdot 1 = e^a = \exp(a)$

$\Rightarrow \exp'(x) = \exp(x)$

(b) Unter der Annahme, dass die Ableitung der Funktion ln existiert erhält man :

$\exp(\ln(x)) = x \Rightarrow (\exp(\ln(x)))' = (x)' \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) \cdot (\ln(x))' = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$

(c) Unter der Annahme, dass die jeweils gesuchten Ableitungen existieren erhält man :

$\sin(\arcsin(x)) = x \Rightarrow (\sin(\arcsin(x)))' = (x)' \Leftrightarrow \cos(\arcsin(x)) \cdot (\arcsin(x))' = 1$

$\Leftrightarrow (\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cos(\arccos(x)) = x \Rightarrow (\cos(\arccos(x)))' = (x)' \Leftrightarrow -\sin(\arccos(x)) \cdot (\arccos(x))' = 1$

$\Leftrightarrow (\arccos(x))' = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\tan(\arctan(x)) = x \Rightarrow (\tan(\arctan(x)))' = (x)' \Leftrightarrow \left(1+\tan^2(\arctan(x))\right) \cdot (\arctan(x))' = 1$

$\Leftrightarrow (\arctan(x))' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

(d) Unter der Annahme dass f^r ableitbar ist und $f'(f^r(x)) \neq 0$ ist erhält man :

$f(f^r(x)) = x \Rightarrow (f(f^r(x)))' = (x)' \Leftrightarrow f'(f^r(x)) \cdot (f^r(x))' = 1 \Leftrightarrow (f^r(x))' = \frac{1}{f'(f^r(x))}$

6. (a) $f'(x) = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$

(b) $f'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1}$

(c) $f'(x) = \frac{1}{x^2-x} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{x(x-1)}$

(d) $f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{1-x}} \cdot \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x^2} \cdot \frac{2x \cdot (1-x) - x^2 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{x^2(1-x)} = \frac{x(2-x)}{x^2(1-x)} = \frac{2-x}{x(1-x)} = \frac{x-2}{x(x-1)}$

(e) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \left(\sqrt{3-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{3-x^2} = \frac{x}{x^2-3}$

(f) $f'(x) = \frac{1}{3x^5} \cdot 15x^4 = \frac{5}{x}$

(g) $f'(x) = \frac{1}{\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2+3}} \cdot \left(\frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2+3}\right)'$

$= \frac{x^2+3}{(x^2+2)(x^2-1)} \cdot \frac{\left((x^2+2)(x^2-1)\right)' \cdot (x^2+3) - (x^2+2)(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{1}{(x^2+2)(x^2-1)} \cdot \frac{\left(2x(x^2-1) + (x^2+2) \cdot 2x\right) \cdot (x^2+3) - (x^2+2)(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+3)}$

$= \frac{2x\left((x^2-1+x^2+2) \cdot (x^2+3) - (x^2+2)(x^2-1)\right)}{(x^2+2)(x^2-1)(x^2+3)} = \frac{2x\left((2x^2+1) \cdot (x^2+3) - (x^2+2)(x^2-1)\right)}{(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)}$

$= \frac{2x\left(2x^4+7x^2+3-(x^4+x^2-2)\right)}{(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{2x(x^4+6x^2+5)}{(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{2x(x^2+1)(x^2+5)}{(x+1)(x-1)(x^2+2)(x^2+3)}$

(h) $f'(x) = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

(i) $f'(x) = \frac{1}{\tan(2x)} \cdot (\tan(2x))' = \frac{1}{\tan(2x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(2x)} \cdot 2 = \frac{2}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \cos^2(2x)} = \frac{2}{\sin(2x) \cdot \cos(2x)}$

(j) $f'(x) = \frac{\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$

(k) $f'(x) = \frac{-(x\ln(x))'}{x^2\ln^2(x)} = -\frac{\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}}{x^2\ln^2(x)} = -\frac{\ln(x)+1}{x^2\ln^2(x)}$

7. (a) $f'(x) = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

(b) $f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}$

(c) $f'(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^{-1}\right)' = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)\,x^{-2} = -\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

(d) $f'(x) = e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(\sqrt{x^2+x}\right)' = e^{\sqrt{x^2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot e^{\sqrt{x^2+x}}$

(e) $f'(x) = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} \cdot \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'$

$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot 2x \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{(1+x^2)(1-x^2)^4}} = \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot 2x \cdot \sqrt{\frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)^3}}$

$= \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right) \cdot \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)^3}} = \frac{2x}{|1-x^2|\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

$= \frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} \cdot \exp\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

(f) $f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \cos(x)\, e^{\sin(x)}$

(g) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = x(x+2)\,e^x$

(h) $f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \cos(x) + e^{-x} \cdot (-\sin(x)) = -(\cos(x) + \sin(x))\,e^{-x}$

8. $(a^x)' = \left(e^{\ln(a^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$

3.6 Tangente an das Schaubild einer Funktion, Seite 59

1. (a) $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$, $f'(x) = 10x - 6$

   Tangente an der Stelle $a = 1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow y = 4(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 4x - 3$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   Tangente an der Stelle $a = 4 : y = f'(4)(x-4) + f(4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$

2. Horizontale Tangente an der Stelle $x = 1 \Leftrightarrow f'(1) = 0$

   $f'(x) = 3x^2 + 2bx + 1$ Also $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -2$

3. Tangente an der Stelle $x = -1$ mit Gleichung $y = x + 4 \Leftrightarrow f'(-1)(x+1) + f(-1) = x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

   $f'(-1)(x+1) + f(-1) = x + 4 \Leftrightarrow (3 - 2b + c)(x+1) + (-1 + b - c) = x + 4 \Leftrightarrow (3 - 2b + c)x + (2 - b) = x + 4$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2b + c = 1 \\ 2 - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -6 \\ b = -2 \end{cases}$

4. Tangente an der Stelle a geht durch den Ursprung $\Leftrightarrow 0 = f'(a)(0-a) + f(a)$

   $f'(x) = 3x^2 + 2x$

   $0 = f'(a)(0-a) + f(a) \Leftrightarrow 0 = \left(3a^2 + 2a\right)(-a) + \left(a^3 + a^2\right) \Leftrightarrow 2a^3 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(2a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ <u>oder</u> $a = -\frac{1}{2}$

5. Tangente an der Stelle a geht durch den Punkt $(-3;1) \Leftrightarrow 1 = f'(a)(-3-a) + f(a)$

   $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

   $1 = f'(a)(-3-a) + f(a) \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{a^2}(-3-a) + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = 3 + a + a$ <u>und</u> $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$ <u>und</u> $a \neq 0$

   $\Leftrightarrow (a-3)(a+1) = 0$ <u>und</u> $a \neq 0 \Leftrightarrow a = -1$ <u>oder</u> $a = 3$

6. $20x + 9y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{20}{9}x$, „die Stelle wo das Schaubild die y-Achse schneidet" $\Leftrightarrow a = 0$

   Tangente an der Stelle $a = 0$ parallel zu der Geraden mit Gleichung $y = -\frac{20}{9}x \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{20}{9}$

   $$f'(x) = \frac{(2x+m)\left(x^2 - 2x - 3\right) - \left(x^2 + mx - 10\right)(2x-2)}{\left(x^2 - 2x - 3\right)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{m(-3) - (-10)(-2)}{(-3)^2} = \frac{-3m - 20}{9}$$

   $$f'(0) = -\frac{20}{9} \Leftrightarrow \frac{-3m - 20}{9} = -\frac{20}{9} \Leftrightarrow m = 0$$

   Und die Tangente an der Stelle $a = 0$ ist für $m = 0$ „wirklich" parallel zu der gegebenen Geraden (und nicht identisch), da die Gerade durch den Ursprung geht $(0 = -\frac{20}{9} \cdot 0)$ aber die Tangente an f an der Stelle $a = 0$ durch den Punkt $(0; f(0))$ geht und dies nicht der Ursprung ist : $f(0) = \frac{-10}{-3} \neq 0$

3.7.3 Monotoniesätze, Seite 70

1. (a) $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$

x		-1		1	
$f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

   $H(-1;2) \qquad T(1;-2)$

   (b) $f(x) = x^2 + 6x + 2$, $f'(x) = 2x + 6 = 2(x+3)$

x		-3	
$f'(x) = 2(x+3)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

   $T(-3;-7)$

(c) $f(x)=x^3+3x,\ f'(x)=3x^2+3=3\left(x^2+1\right)$

x	
$f'(x)=3\left(x^2+1\right)$	$+$
f	$\nearrow$

keine Extremstellen

(d) $f(x)=\frac{1}{9-x^2},\ f'(x)=\frac{2x}{\left(9-x^2\right)^2}$

x		-3		0		3	
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\left(9-x^2\right)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)=\frac{2x}{\left(9-x^2\right)^2}$	$-$	X	$-$	0	$+$	X	$+$
f	$\searrow$	X	$\searrow$		$\nearrow$	X	$\nearrow$

$T\left(0;\frac{1}{9}\right)$

2.

x		-3		-1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

3. ... (es gibt unendlich viele verschiedene mögliche Antworten)

3.8 Extremwertprobleme, Seite 71

1. Wir wissen $a+b=12$.

   Wir wollen $P=a\cdot b$ maximieren.

   $P(a)=a\cdot(12-a)$ (mit $a\in\mathbb{R}$)

   $P'(a)=12-2a=2(6-a)$

a		6	
$P'(a)$	$+$	0	$-$
P	$\nearrow$		$\searrow$

   P ist für $a=6$ absolut maximal.

   Die gesuchten Zahlen sind : $a=b=6$

2. Wir wissen $a+b=12$.

   Wir wollen $S=a^2+b^2$ minimieren.

   $S(a)=a^2+(12-a)^2$ (mit $a\in\mathbb{R}$)

   $S'(a)=4a-24=4(a-6)$

a		6	
$S'(a)$	$-$	0	$+$
S	$\searrow$		$\nearrow$

   S ist für $a=6$ absolut minimal.

   Die gesuchten Zahlen sind : $a=b=6$

3. Wir wissen $a+b=12$.

   Wir wollen $P=ab^2$ minimieren.

   $P(b)=(12-b)\,b^2$ (mit $b\in[0;13]$)

   $P'(b)=24b-3b^2=3b(8-b)$

b	0		8		13
$P'(b)$	0	+	0	−	−
P		$\nearrow$		$\searrow$	

P ist entweder für $b = 0$ oder für $b = 13$ absolut minimal.

Aus $P(0) = 0$ und $P(13) = -169$ folgt, dass P für $b = 13$ absolut minimal ist.

Die gesuchten Zahlen sind : $a = -1$ und $b = 13$

4. Sei a die Breite und b die Höhe des Rechtecks.

   Wir wissen $2a + 2b = 24 \Leftrightarrow a + b = 12$.

   Wir wollen $F = a \cdot b$ maximieren.

   Dies ist dasselbe Problem wie in Aufgabe 1 (bloss gilt $a, b \in [0; 12]$).

   Die gesuchten Dimensionen sind : $a = b = 6$ cm.

5. Sei a die Breite und b die Höhe des Rechtecks.

   Wir wissen $2a + 2b = 30 \Leftrightarrow a + b = 15$.

   Wir wollen $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ minimieren.

   Äquivalent : wir wollen $D = a^2 + b^2$ minimieren.

   $D(a) = a^2 + (15 - a)^2$ (mit $a \in [0; 15]$)

   $D'(a) = 4a - 30 = 2(2a - 15)$

a	0		$\frac{15}{2}$		15
$D'(a)$	−	−	0	+	+
D		$\searrow$		$\nearrow$	

   D ist für $a = \frac{15}{2}$ absolut minimal.

   Die gesuchten Dimensionen sind : $a = b = \dfrac{15}{2} = 7.5$ cm

6. Sei a die Seitenlänge(in dm) des quadratischen Bodens und h die Höhe (in dm) der Schachtel.

   Wir wissen $a^2 h = 32$.

   Wir wollen $F = a^2 + 4ah$ minimieren.

   $F(a) = \ldots = a^2 + \dfrac{128}{a}$ (mit $a > 0$)

   $F'(a) = \ldots = 2a - \dfrac{128}{a^2} = \dfrac{2a^3 - 128}{a^2} = \dfrac{2\left(a^3 - 64\right)}{a^2}$

a	0		4	
$F'(a)$	X	−	0	+
F	X	$\searrow$		$\nearrow$

   F ist für $a = 4$ absolut minimal.

   Die gesuchten Dimensionen der Schachtel sind : $a = 4$ dm und $h = 2$ dm.

7. Sei a die halbe Breite und b die Höhe des Rechtecks.

   Wir wissen $b = -a^2 + 4$.

   Wir wollen $F = 2a \cdot b$ maximieren.

   $F(a) = 2a\left(-a^2 + 4\right)$ (mit $a \in [0; 2]$)

   $F'(a) = -6a^2 + 8 = 2\left(-3a^2 + 4\right)$

a	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$F'(a)$	+	+	0	−	−
F		$\nearrow$		$\searrow$	

   F ist für $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ absolut maximal.

   Die gesuchten Dimensionen des Rechtecks sind : $2a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ und $b = \frac{8}{3}$.

8. Sei a die Breite und b die Höhe des Rechtecks.

   Wir wissen $a^2 + b^2 = (2 \cdot 5)^2$.

   Wir wollen $U = 2a + 2b$ maximieren.

   $U(a) = 2a + 2\sqrt{100 - a^2}$ (mit $a \in [0; 10]$)

   $U'(a) = \ldots = 2 - \dfrac{2a}{\sqrt{100 - a^2}} = \dfrac{2\sqrt{100 - a^2} - 2a}{\sqrt{100 - a^2}}$

a	0		$5\sqrt{2}$		10
$U'(a)$	$+$	$+$	0	$-$	X
U		$\nearrow$		$\searrow$	

   U ist für $a = 5\sqrt{2}$ absolut maximal.

   Die gesuchten Dimensionen des Rechtecks sind : $a = b = 5\sqrt{2}$ $\quad (\approx 7.07$ cm)

9. Sei $P(x; y)$ ein Punkt auf dem Schaubild der Funktion.

   Wir wissen $y = \dfrac{2}{x^2}$.

   Wir wollen $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ minimieren.

   Äquivalent : wir wollen $D = x^2 + y^2$ minimieren.

   $D(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^4}$ (mit $x \in \mathbb{R}^*$)

   $D'(x) = \ldots = 2x - \dfrac{16}{x^5} = \dfrac{2x^6 - 16}{x^5}$

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$D'(x)$	$-$	0	$+$	X	$-$	0	$+$
D	$\searrow$		$\nearrow$	X	$\searrow$		$\nearrow$

   Aus $D(-\sqrt{2}) = 3$ und $D(\sqrt{2}) = 3$ folgt, dass D für $x = -\sqrt{2}$ und $x = \sqrt{2}$ absolut minimal ist.

   Also auch d.

   Die gesuchten Punkte sind : $P_1\left(-\sqrt{2}; 1\right)$ und $P_2\left(\sqrt{2}; 1\right)$

10. Sei r der Radius (in dm) des Bodens und h die Höhe (in dm) der Dose.

    Wir wissen $\pi r^2 h = 32$.

    Wir wollen $F = \pi r^2 + 2\pi r h$ minimieren.

    $F(r) = \ldots = \pi r^2 + \dfrac{64}{r}$ (mit $r > 0$)

    $F'(r) = \ldots = 2\pi r - \dfrac{64}{r^2} = \dfrac{2\pi r^3 - 64}{r^2}$

r	0		$2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$	
$F'(r)$	X	$-$	0	$+$
F	X	$\searrow$		$\nearrow$

    F ist für $r = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ absolut minimal.

    Die gesuchten Dimensionen der Dose sind : $r = h = 2\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ $\quad (\approx 2.17$ dm)

11. (a) Wir wissen $b = -\dfrac{1}{2}a^2 + 2$.

    Wir wollen $F = \frac{1}{2}(a + 2)b$ maximieren.

    $F(a) = \dfrac{1}{2}(a + 2)\left(-\dfrac{1}{2}a^2 + 2\right)$ (mit $a \in [0; 2]$)

    $F'(a) = \ldots = -\dfrac{3}{4}a^2 - a + 1$

a	0		$\frac{2}{3}$		2
$F'(a)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
F		$\nearrow$		$\searrow$	

F ist für $a = \dfrac{2}{3}$ absolut maximal.

Der gesuchte Punkt und die gesuchte Fläche sind : $P\left(\frac{2}{3}; \frac{16}{9}\right)$ und $F = \frac{64}{27}$

(b) Wir wissen $b = -\dfrac{1}{2}a^2 + 2$.

Wir wollen $S = a + 2 + b$ maximieren.

$S(a) = a + 2 - \dfrac{1}{2}a^2 + 2$ (mit $a \in [0; 2]$)

$S'(a) = -a + 1$

a	0		1		2
$S'(a)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
S		$\nearrow$		$\searrow$	

S ist für $a = 1$ absolut maximal.

Der gesuchte Punkt ist : $P\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$

12. (a) $y = \left(4a - 3a^2\right) x + 2a^3 - 2a^2$

(b) $S\left(0; 2a^3 - 2a^2\right)$

(c) und (d)

Die Höhe des Punktes S ist gegeben durch $H(a) = 2a^3 - 2a^2$ (mit $a \in [0; 2]$)

Wir wollen :

(c) H maximieren (d) H minimieren

$H'(a) = 6a^2 - 4a = 2a\,(3a - 2)$

a	0		$\dfrac{2}{3}$		2
$H'(a)$	0	$-$	0	$+$	$+$
H		$\searrow$		$\nearrow$	

(c) Aus $H(0) = 0$ und $H(2) = 8$ folgt, dass H für $a = 2$ absolut maximal ist.

Der gesuchte Punkt P ist : $P\,(2; 0)$

(d) H ist für $a = \dfrac{2}{3}$ absolut minimal.

Der gesuchte Punkt P ist : $P\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{27}\right)$

13. Wir wollen $S(x) = x + \dfrac{1}{x}$ (mit $x > 0$) minimieren.

$S'(x) = \ldots = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

x	0		1	
$S'(x)$	X	$-$	0	$+$
S	X	$\searrow$		$\nearrow$

S ist für $x = 1$ absolut minimal. Die gesuchte Summe ist : $S = 2$

14. (a) $f_k'(x) = 2x - 4k$

x		$2k$	
$f_k'(x)$	$-$	0	$+$
f_k	$\searrow$		$\nearrow$

f_k ist für $x = 2k$ minimal.

Der Tiefpunkt ist : $T\left(2k; -5k^2 - 2k\right)$

(b) Die Höhe des Punktes T ist gegeben durch $H(k) = -5k^2 - 2k$.

Wir wollen H maximieren.

$H'(k) = -10k - 2$

k		$-\frac{1}{5}$	
$H'(k)$	$+$	0	$-$
H	$\nearrow$		$\searrow$

H ist für $k=-\frac{1}{5}$ absolut maximal. Der gesuchte Wert ist : $k=-\frac{1}{5}$

15. Sei h die Höhe des Dreiecks ABC von B aus auf AC.

    Sei $x = AC$.

    Wir wissen : $\frac{\frac{x}{2}}{7}=\cos(\alpha)$ und $\frac{h}{7}=\sin(\alpha)$.

    Wir wollen $F=\frac{x\cdot h}{2}$ maximieren.

    $F(\alpha)=49\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (mit $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

    $F'(\alpha)=\ldots=49\left(-\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$F'(a)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
F		$\nearrow$		$\searrow$	

    F ist für $\alpha=\frac{\pi}{4}$ absolut maximal.

    Der gesuchte Winkel ist : $\alpha=\frac{\pi}{4}$

16. Wir wollen $K(v)=\left(25+\left(6+\frac{v^2}{300}\right)\cdot 2\right)\cdot\frac{150}{v}=\ldots=\frac{5550}{v}+v$ (mit $v>0$) minimieren.

    $K'(v)=\ldots=-\frac{5550}{v^2}+1=\frac{v^2-5550}{v^2}$

v	0		$5\sqrt{222}$	
$K'(v)$	X	$-$	0	$+$
K	X	$\searrow$		$\nearrow$

    K ist für $v=5\sqrt{222}$ absolut minimal.

    Die gesuchte Geschwindigkeit und die gesuchten Kosten sind :

$$v=5\sqrt{222}\quad(\approx 74.50\text{ km/h})\qquad\text{und}\qquad K=10\sqrt{222}\quad(\approx 149.00\text{ SFR})$$

3.10.1 Ganzrationale Funktionen, Seite 77

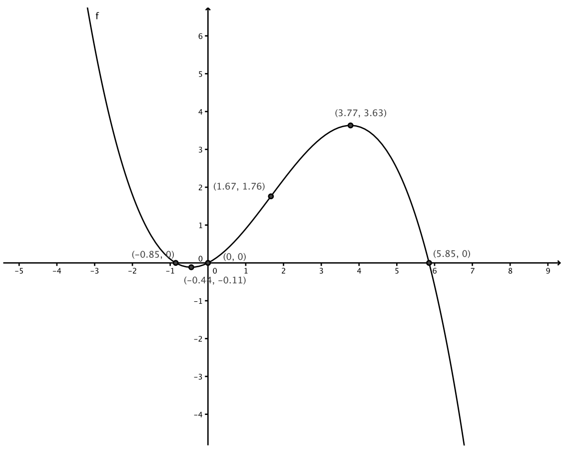
Achtung keine vollständige Korrektur !

Die Koordinaten der Punkte sind (wenn nötig) auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

1. $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{10}=\frac{-x\left(x^2-5x-5\right)}{10}$

   $f'(x)=-\frac{3x^2}{10}+x+\frac{1}{2}=\frac{-3x^2+10x+5}{10}$

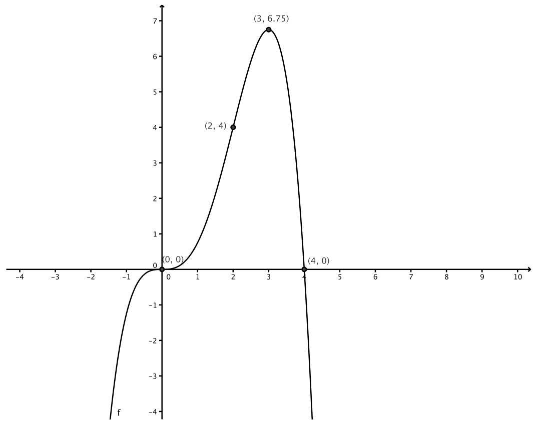
   $f''(x)=-\frac{3x}{5}+1$



2. $f(x) = x^3 - \dfrac{x^4}{4} = \dfrac{x^3\,(4-x)}{4}$

   $f'(x) = 3x^2 - x^3 = x^2\,(3-x)$

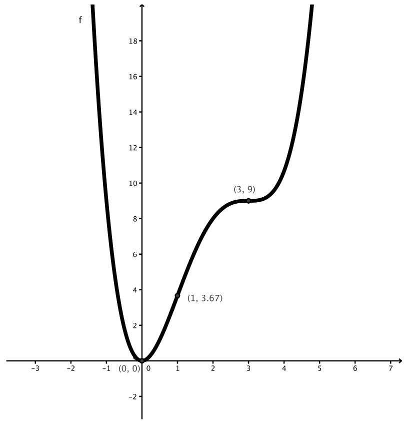
   $f''(x) = 6x - 3x^2 = 3x\,(2-x)$



3. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{8}{3}x^3 + 6x^2 = \dfrac{x^2\left(x^2-8x+18\right)}{3}$

   $f'(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 8x^2 + 12x = \dfrac{4x\,(x-3)^2}{3}$

   $f''(x) = 4x^2 - 16x + 12 = 4\,(x-1)\,(x-3)$



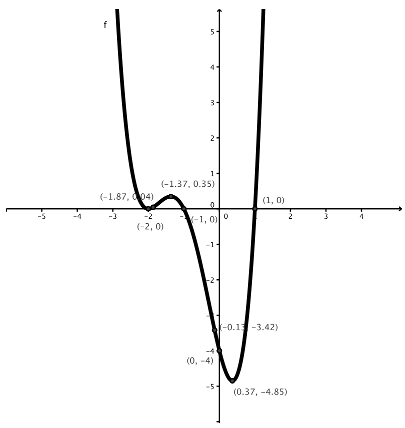
4. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$

   $= (x+1)\,(x-1)\,(x+2)^2$

   $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 6x - 4$

   $= 2\,(x+2)\left(2x^2+2x-1\right)$

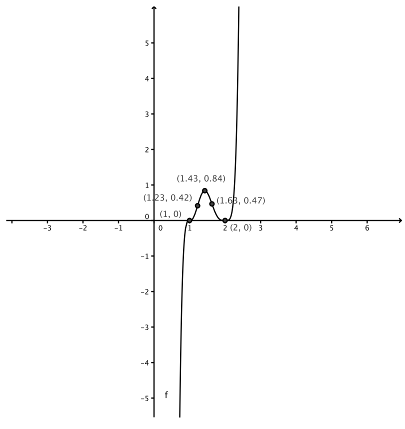
   $f''(x) = 12x^2 + 24x + 6 = 6\left(2x^2+4x+1\right)$



5. $f(x) = 100(x-1)^3(x-2)^4$

   $f'(x) = 100\,(x-1)^2\,(x-2)^3\,(7x-10)$

   $f''(x) = 600\,(x-1)\,(x-2)^2\left(7x^2-20x+14\right)$



3.10.2 Gebrochenrationale Funktionen, Seite 81

Achtung keine vollständige Korrektur !

Die Koordinaten der Punkte sind (wenn nötig) auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

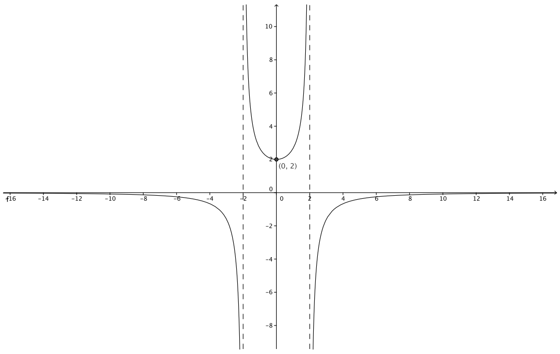
1. $f(x) = \dfrac{8}{4-x^2} = \dfrac{8}{(2-x)(2+x)}$

   v.A. in $x=-2$ und $x=2$

   h. A. $y=0$ für $x \to \pm\infty$

   $f'(x) = \dfrac{16x}{(4-x^2)^2} = \dfrac{16x}{(2-x)^2(2+x)^2}$

   $f''(x) = \dfrac{16\left(3x^2+4\right)}{(4-x^2)^3} = \dfrac{16\left(3x^2+4\right)}{(2-x)^3(2+x)^3}$



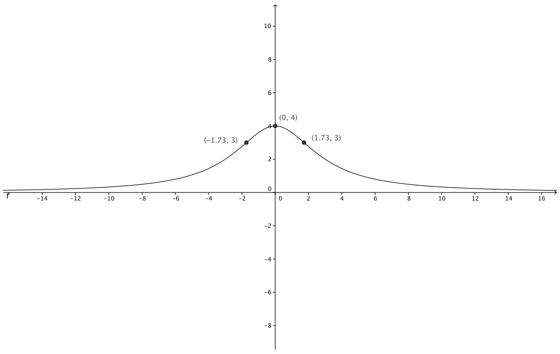
2. $f(x) = \dfrac{36}{x^2+9}$

   keine v.A.

   h. A. $y=0$ für $x \to \pm\infty$

   $f'(x) = -\dfrac{72x}{(x^2+9)^2}$

   $f''(x) = \dfrac{216\left(x^2-3\right)}{(x^2+9)^3}$



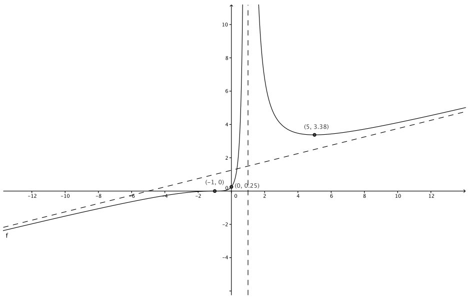
3. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{4(x-1)^2} \left(= \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{4x^2-8x+4}\right)$

   v.A. in $x=1$

   as. G. $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ für $x \to \pm\infty$

   $f'(x) = \dfrac{(x-5)(x+1)^2}{4(x-1)^3}$

   $f''(x) = \dfrac{6(x+1)}{(x-1)^4}$



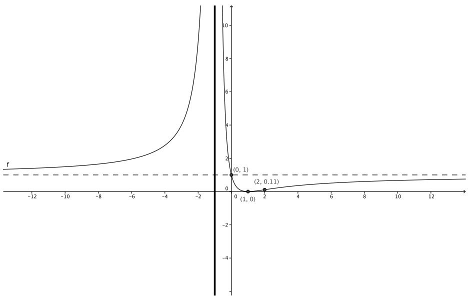
4. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

   v.A. in $x=-1$

   h.A. $y=1$ für $x \to \pm\infty$

   $f'(x) = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

   $f''(x) = \dfrac{8(2-x)}{(x+1)^4}$



3.10.3 Funktionen mit Wurzeln, Berechnung der Asymptoten für $x \to \pm\infty$, Seite 87

Achtung keine vollständige Korrektur !

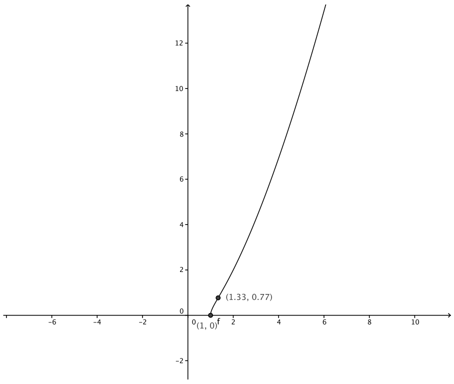
Die Koordinaten der Punkte sind (wenn nötig) auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

1. $f(x) = x\sqrt{x-1}$

   keine v.A., keine as. G.

   $$f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

   $$f''(x) = \frac{3x-4}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$



2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

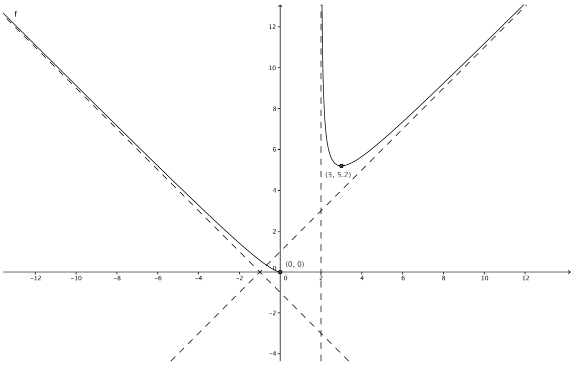
   v.A. in $x = 2$

   as. G. $y = -x-1$ für $x \to -\infty$

   as. G. $y = x+1$ für $x \to +\infty$

   $$f'(x) = (x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}}$$

   $$f''(x) = \frac{3}{(x-2)^2\sqrt{x(x-2)}}$$



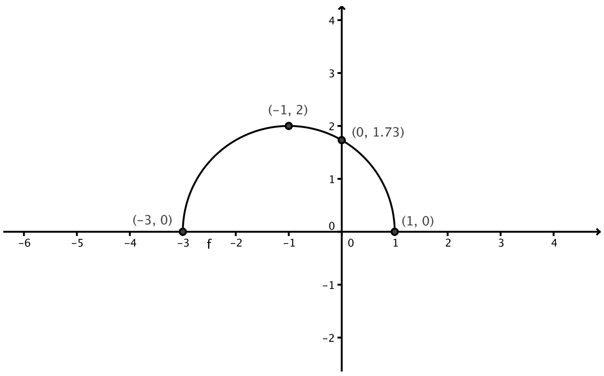
3. $f(x) = \sqrt{-x^2-2x+3}$

   keine v.A.

   keine as. G.

   $$f'(x) = -\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$$

   $$f''(x) = \frac{4}{(x-1)(x+3)\sqrt{-x^2-2x+3}}$$



3.10.4 Funktionen mit $\ln$ und $\exp$, Regel von L'Hospital, Seite 93

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x+1} = 0$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-3}{e^x+5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}1 = 1$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x^2\cdot\ln(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^{-x} = -\infty$

2. **Achtung keine vollständige Korrektur !**

Die Koordinaten der Punkte sind (wenn nötig) auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

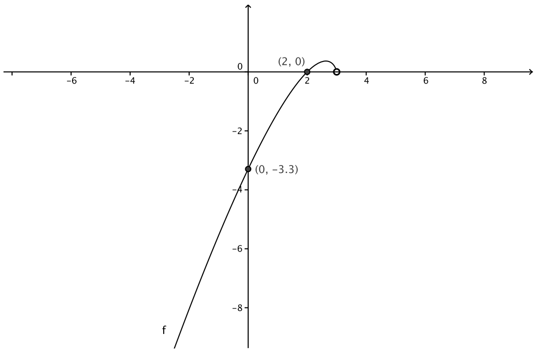
(a) $f(x) = (x-3)\ln(3-x)$

keine v.A.

keine as. G.

$f'(x) = \ln(3-x) + 1$

$f''(x) = \dfrac{1}{x-3}$



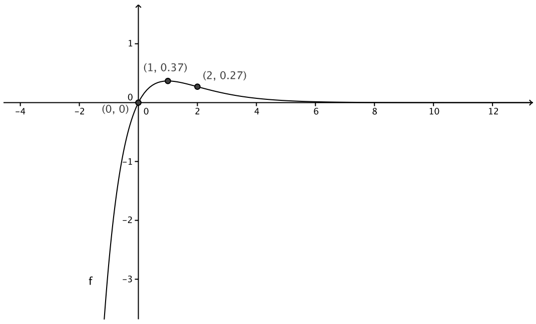
(b) $f(x) = xe^{-x}$

keine v.A.

h.A. $y = 0$ für $x \to +\infty$

$f'(x) = (1-x)\,e^{-x}$

$f''(x) = (x-2)\,e^{-x}$



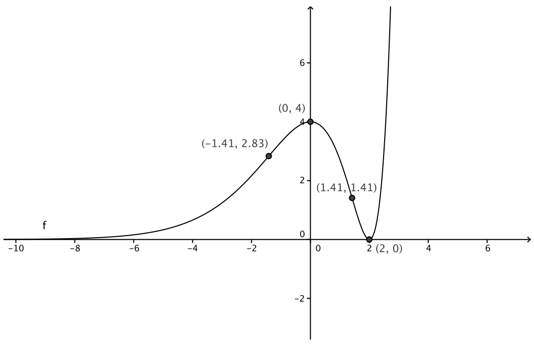
(c) $f(x) = (x-2)^2\,e^{x}$

keine v.A.

h.A. $y = 0$ für $x \to -\infty$

$f'(x) = x\,(x-2)\,e^{x}$

$f''(x) = \left(x^2-2\right)e^{x}$



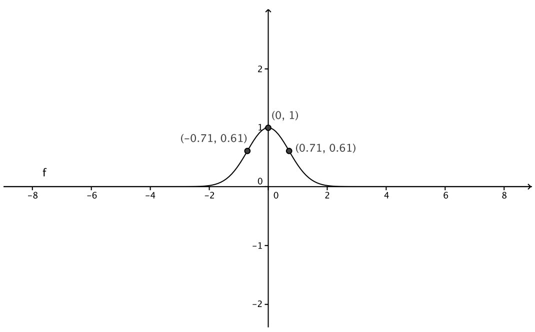
(d) $f(x) = e^{-x^2}$

keine v.A.

h.A. $y = 0$ für $x \to \pm\infty$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = 2\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$



4.2 Rechenregeln, Seite 99

Für alle Lösungen gilt : $c \in \mathbb{R}$

1. $\int 3\,\mathrm{d}x = 3x + c$

2. $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

4. $\int \cos(3x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \int \cos(3x) \cdot 3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + c$

5. $\int (x+3)^3\ \mathrm{d}x = \frac{(x+3)^4}{4} + c$

6. $\int 5x\,\mathrm{d}x = \frac{5x^2}{2} + c$

7. $\int \left(1 + \tan^2(x)\right)\ \mathrm{d}x = \tan(x) + c$

8. $\int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) - x + c$

9. $\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + c = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + c$

10. $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(-\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + c = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

11. $\int (2x-1)^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int (2x-1)^2 \cdot 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^3}{3} + c = \frac{(2x-1)^3}{6} + c$

12. $\int ax^2\,\mathrm{d}x = \frac{ax^3}{3} + c$

13. $\int ax^2\,\mathrm{d}a = \frac{a^2x^2}{2} + c$

14. $\int (2x+1)\ \mathrm{d}x = x^2 + x + c$

15. $\int \frac{5x-4}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} \cdot x + c = \frac{5x^2}{6} - \frac{4x}{3} + c$

16. $\int -\frac{7}{x^5}\,\mathrm{d}x = -7 \cdot \int x^{-5}\,\mathrm{d}x = -7 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{7}{4x^4} + c$

17. $\int (7x-2)^5\ \mathrm{d}x = \frac{1}{7} \cdot \int (7x-2)^5 \cdot 7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7x-2)^6}{6} + c = \frac{(7x-2)^6}{42} + c$

18. $\int \left(3x^2 + x\right)^3 \cdot (6x+1)\ \mathrm{d}x = \frac{\left(3x^2+x\right)^4}{4} + c \quad \left(= \frac{x^4 \cdot (3x+1)^4}{4} + c\right)$

19. $\int \frac{5}{4 \cdot \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4} \cdot \int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{15}{8} \cdot \sqrt[3]{x^2} + c$

20. $\int \frac{-2x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^3 - 3x^2 + 6x - 5}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} \cdot \int \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 5\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3x^2 - 6x + 6\right)\ \mathrm{d}x = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 5\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$
$= -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3 - 3x^2 + 6x - 5} + c$

21. $\int x \cdot \sin\left(x^2\right) \cdot e^{\cos\left(x^2\right)} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \int e^{\cos\left(x^2\right)} \cdot \left(-\sin\left(x^2\right)\right) \cdot 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot e^{\cos\left(x^2\right)} + c$

22. $\int \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{1}{7}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{7} \cdot x + c = \frac{2x^3}{9} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{7} + c$

23. $\int 4 \cdot \left(3x^5 + 2x^4 - 1\right) \mathrm{d}x = 4 \cdot \left(3 \cdot \frac{x^6}{6} + 2 \cdot \frac{x^5}{5} - x\right) + c = 4 \cdot \left(\frac{x^6}{2} + \frac{2x^5}{5} - x\right) + c$

24. $\int \sqrt{x+3} \, \mathrm{d}x = \int (x+3)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x+3)^3} + c = \frac{2}{3} \cdot (x+3) \cdot \sqrt{x+3} + c$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \int (3x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3x+1} + c$

26. $\int \frac{2}{x^3} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int x^{-3} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x^2} + c$

27. $\int x \cdot \left(4x^2 + 3\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \cdot \int \left(4x^2 + 3\right)^4 \cdot 8x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \cdot \frac{\left(4x^2+3\right)^5}{5} + c = \frac{\left(4x^2+3\right)^5}{40} + c$

28. $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^3(x)}{3} + c$

29. $\int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \int (\tan(x))^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = \frac{\tan^3(x)}{3} + c$

30. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \left(x^2+2x\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x+2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2+2x\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{\left(x^2+2x\right)^2} + c$

31. $\int (2x-3) \cdot (7x+1) \, \mathrm{d}x = \int \left(14x^2 - 19x - 3\right) \mathrm{d}x = \frac{14x^3}{3} - \frac{19x^2}{2} - 3x + c$

32. $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \ln\left(\left|1+\sqrt{x}\right|\right) + c$

4.3 Integrale und Flächenberechnung, Seite 103

1. (a) $\int_1^3 \left(3x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x = \left(x^3 + 2x^2\right)\Big|_1^3 = \ldots = 42$

   (b) $\int_{-1}^2 \left(4x^3 + 6x\right) \mathrm{d}x = \left(x^4 + 3x^2\right)\Big|_{-1}^2 = \ldots = 24$

   (c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \ldots = \frac{1}{2}$

   (d) $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3} \, \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{1}{x^2}\Big|_{-2}^{-1} = \ldots = -\frac{3}{4}$

   (e) $\int_1^4 \frac{1}{(2x-1)^3} \, \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{1}{4\,(2x-1)^2}\Big|_1^4 = \ldots = \frac{12}{49}$

   (f) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+8x}} \, \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1+8x}\Big|_1^3 = \ldots = \frac{1}{2}$

   (g) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{(4x+1)^3} \, \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{3}{8\,(4x+1)^2}\Big|_{-2}^{-1} = \ldots = -\frac{5}{147}$

   (h) $\int_{-5}^{-2} \frac{5}{2x+2} \, \mathrm{d}x = \ldots = \frac{5}{2} \cdot \ln\left(|2x+2|\right)\Big|_{-5}^{-2} = \ldots = -\frac{5}{2} \cdot \ln(4)$

   (i) $\int_{-2}^{-1} \frac{10x+3}{5x^2+3x+1} \, \mathrm{d}x = \ldots = \ln\left(5x^2+3x+1\right)\Big|_{-2}^{-1} = \ldots = -\ln(5)$

   (j) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin(4x) \, \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{1}{4} \cdot \cos(4x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} = \ldots = -\frac{3}{8}$

(k) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x)\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{3}\cdot\sin(3x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}$

(l) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(5x)\cdot\sin(5x)\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\sin^2(5x)}{10}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \ldots = \frac{1}{10}$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2(x)\right)\ \mathrm{d}x = \tan(x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ldots = 1$

(n) $\displaystyle\int_{-3}^{3} e^x\ \mathrm{d}x = e^x\big|_{-3}^{3} = e^3 - e^{-3}$

(o) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{3}} e^{3x}\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{e^{3x}}{3}\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \ldots = \frac{e-1}{3}$

(p) $\displaystyle\int_{0}^{1} 4x\cdot e^{2x^2}\ \mathrm{d}x = e^{2x^2}\Big|_0^1 = \ldots = e^2 - 1$

(q) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(|\sin(3x)|\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \ldots = -\frac{1}{6}\cdot\ln(2)$

(r) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x)\cdot\sin(x)\ \mathrm{d}x = \ldots = -\frac{\cos^3(x)}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ldots = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

2. (a) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig, Schnittstellen mit der x-Achse ? … $x=0$, $x=-1$ und $x=\frac{1}{2}$

$$I_1 = \int_{-1}^{0}\left(2x^3+x^2-x\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = \ldots = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(2x^3+x^2-x\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} = \ldots = -\frac{5}{96}$$

gesuchte geometrische Fläche : $|I_1| + |I_2| = \frac{37}{96}$

(b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig, Schnittstellen mit der x-Achse ? … $x=-1$, $x=1$, $x=-2$ und $x=2$

$$I_1 = \int_{-2}^{-1}\left(x^4-5x^2+4\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-2}^{-1} = \ldots = -\frac{22}{15}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\left(x^4-5x^2+4\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-1}^{1} = \ldots = \frac{76}{15}$$

$$I_3 = \int_{1}^{2}\left(x^4-5x^2+4\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x\right)\Big|_{1}^{2} = \ldots = -\frac{22}{15}$$

gesuchte geometrische Fläche : $|I_1| + |I_2| + |I_3| = 8$

3. (a) $f(x) = 4x - x^3$, $g(x) = -9x + 12$ sind beide auf $\mathbb{R}$ stetig, Schnittstellen ? … $x=1$, $x=-4$ und $x=3$

$$I_1 = \int_{-4}^{1}\left(x^3-13x+12\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{13x^2}{2}+12x\right)\Big|_{-4}^{1} = \ldots = \frac{375}{4}$$

$$I_2 = \int_{1}^{3}\left(x^3-13x+12\right)\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{13x^2}{2}+12x\right)\Big|_{1}^{3} = \ldots = -8$$

gesuchte geometrische Fläche : $|I_1| + |I_2| = \frac{407}{4}$

(b) $f(x) = \frac{16}{x^2} - 6$ ist nur auf $\mathbb{R}^*$ stetig, $g(x) = 11 - x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig

Schnittstellen ? … $x=-4$, $x=4$, $x=-1$ und $x=1$

Da f in 0 nicht stetig ist (hier : Asymptote) ist die Fläche zwischen den Funktionen dort nicht begrenzt.

Es gibt also bloss zwei Intervalle um die man sich kümmern muss.

$$I_1 = \int_{-4}^{-1}\left(\frac{16}{x^2}+x^2-17\right)\ \mathrm{d}x = \ldots = \left(-\frac{16}{x}+\frac{x^3}{3}-17x\right)\Big|_{-4}^{-1} = \ldots = -18$$

$$I_2 = \int_{1}^{4}\left(\frac{16}{x^2}+x^2-17\right)\ \mathrm{d}x = \ldots = \left(-\frac{16}{x}+\frac{x^3}{3}-17x\right)\Big|_{1}^{4} = \ldots = -18$$

gesuchte geometrische Fläche : $|I_1| + |I_2| = 36$

4. (a) …

(b) geometrische schwarze Fläche : $\displaystyle\int_{-8}^{-6}\left(h(x)-g(x)\right)\ \mathrm{d}x + \int_{-6}^{-3}\left(h(x)-f(x)\right)\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{4}\left(f(x)-g(x)\right)\ \mathrm{d}x$