1 Calcul littéral - rappels

1.1 Monômes et polynômes

Un nombre réel, une lettre ou un produit d'un nombre réel et de lettres est appelé **monôme**.

Un monôme ou une somme de monômes est appelé **polynôme**.

Pour **développer** le produit de deux ou plus de polynômes on utilise les règles de la distributivité.

Factoriser un polynôme consiste à l'écrire sous forme d'un produit de polynômes.

La **mise en évidence** d'un monôme apparaissant dans tous les termes d'un polynôme est une factorisation. Elle permet d'écrire la somme de départ sous forme de produit d'un monôme et d'un polynôme.

1.2 Exercices

1. Réduire les expressions suivantes :
   (a) $1 - 5x^2 - 2x^3 + 13 + 12x \cdot x^2 - 4x \cdot 8x$
   (b) $a^3bc^2 - 3baba - 2a^2 \cdot bb + 7ca^2 \cdot (-3abc)$
   (c) $3abc - bcd + 4cda - 2dab$
   (d) $3x + 2 - 5y - 7 + 5x + 8y - 4y$
2. Développer et réduire les expressions suivantes :
   (a) $-(4x^2 + 17 - 6x^2)$
   (b) $5acd \cdot (7 - 3ab + 4c^2d^3 - ac)$
   (c) $(5x - 17) \cdot (3 - 2x)$
   (d) $(rt + s) \cdot (st - r) - rst^2$
3. Mettre en évidence au maximum :
   (a) $91x^2 - 39 - 130x$
   (b) $3abc - bcd + 4cda - 2dab$
   (c) $12x^2y^3 - 6y^5 + 15x^3y^2$
   (d) $130r^3s^5t + 10r^3s^2t - 60r^4s^3t^5$
4. Factoriser au maximum :
   (a) $9 - x^2$
   (b) $4b^2 - 4a^2b + a^4$
   (c) $x^2 - 4xy + xy^2$
   (d) $t^3 - t$

2 Factorisation

2.1 Mise en évidence par étapes

Dans les rappels ci-dessus nous avons réduit la mise en évidence au simple monôme apparaissant dans tous les termes d'une expression algébrique (mise en évidence simple).

Parfois on ne peut mettre en évidence aucun monôme dans l'ensemble d'une expression, mais en groupant les termes de manière adéquate, effectuer des mises en évidence successives qui permettent de factoriser l'expression.

Exemple :

$ax + bx + ay + by =$

Exercices :

1. Factoriser au maximum en groupant les termes :

   (a) $2ax + 2ay + bx + by$

   (b) $4ay - 2by + 2az - bz$

   (c) $ap + ax - 2bx - 2bp$

   (d) $2ax - 4xy + 3ay - 6y^2$

   (e) $x^2 + ax + bx + ab$

   (f) $6x^3 - 5y + 15x^2y - 2x$

   (g) $x^3 - x^2 + x - 1$

   (h) $7x - 7y + ay - ax$

   (i) $9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$

   (j) $x^2 - x - ax + a$

2. Factoriser au maximum en groupant les termes :

   (a) $ax - bx + ay - by$

   (b) $2ax - bx - 2ay + by$

   (c) $3a - 6 - ab + 2b$

   (d) $2ax + 4y - ax^2 - 2xy$

   (e) $ax^2 - bx - abx + b^2$

   (f) $b^2y - a^2 - b^2 + a^2y$

   (g) $x + y + ax + ay$

   (h) $2 - 4x + x^2 - 2x^3$

   (i) $a^2 - 4a + ac - 4c$

   (j) $x^3 + x^2 + 2x + 2$

2.2 Identités remarquables

2.2.1 $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$ et $\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$

Ces identités nous permettent de factoriser des expressions algébriques contenant trois termes. Si deux termes sont des carrés (a^2 et b^2), il suffit de vérifier que le troisième terme correspond bien au double produit ($2ab$) puis tenir compte du signe devant le double produit.

Exemples :

$x^2 + 6x + 9 =$

$z^2 - 2\sqrt{2}z + 2 =$

Exercices :

1. Factoriser au maximum :

   (a) $x^2 + 4x + 4$

   (b) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

   (c) $16x^2 - 56x + 49$

   (d) $4x^2y^2 + 12xy + 9$

   (e) $x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{9}$

   (f) $\frac{9}{4}a^6x^4 - 2a^3x^2 + \frac{1}{9}$

   (g) $4x^2 + y^2 - 4xy$

   (h) $x^6 + 4x^3 + 4$

2. Factoriser au maximum :

   (a) $x^2 + 12x + 36$

   (b) $4a^4 - 12a^2 + 9$

   (c) $\frac{x^2}{4} - xy + \frac{y^2}{4}$

   (d) $9x^2 + \frac{1}{4} + 3x$

   (e) $1 + 4x^2 + x^4$

   (f) $a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$

   (g) $x^4 - 10x^2 + 25$

   (h) $4a^2x^2 + 8abx + b^2$

2.2.2 $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Cette identité nous permet de factoriser une différence de deux carrés.

Exemples :

$1 - x^2 =$

$a^4 - b^4 =$

$x^2 - 2 =$

Exercices :

1. Factoriser au maximum :

   (a) $4x^2 - 9$

   (b) $25x^2 - 4$

   (c) $x^4 - 1$

   (d) $(5x - 3y)^2 - 4x^2$

   (e) $(a - b)^2 - (a + b)^2$

   (f) $(x - 1)^2 - y^2$

2. Factoriser au maximum :

   (a) $16x^2 - 25$

   (b) $36x^2 - 25z^2$

   (c) $x^2y^4 - 1$

   (d) $(2x - y)^2 - 9y^2$

   (e) $(x + 2y)^2 - (2x + y)^2$

   (f) $(x + 5)^2 - (x + 3)^2$

2.2.3 $\mathbf{x^2 + (a+b) \cdot x + ab = (x+a) \cdot (x+b)}$

Exemples :

$x^2 + 5x + 6 =$

$x^2 + x - 12 =$

$x^4 + 5x^2 + 6 =$

Exercices :

1. Factoriser au maximum :
   (a) $x^2 + 5x + 4$
   (b) $x^2 - 3x - 10$
   (c) $x^2 + 2x - 15$
   (d) $x^2 - 7x - 8$
   (e) $x^2 + x - 20$
   (f) $x^2 + 2x - 8$
   (g) $x^2 - 7x - 30$
   (h) $x^2 - 9x + 20$

2. Factoriser au maximum :
   (a) $x^2 + 6x + 8$
   (b) $x^2 - 5x + 4$
   (c) $x^2 - 3x - 4$
   (d) $x^2 - 5x - 14$
   (e) $x^2 + 5x - 36$
   (f) $x^2 - x - 2$
   (g) $x^2 + 6x - 27$
   (h) $x^2 - x - 20$

3. Factoriser au maximum :
   (a) $x^4 + 7x^2 + 12$
   (b) $x^6 + 7x^3 + 10$
   (c) $(x+1)^2 - 3(x+1) - 18$
   (d) $(x^2+1)^2 + 4(x^2+1) + 3$
   (e) $x^4 + 5x^2 + 4$
   (f) $x^8 + 8x^4 + 7$
   (g) $(x-5)^2 - 3(x-5) - 4$
   (h) $(x^2+4)^2 + 6(x^2+4) + 8$

2.2.4 $\mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3}$

2.2.5 et $\mathbf{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3}$

Exercices :

1. Factoriser au maximum :

   (a) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

   (b) $1 - 6y + 3y^2 - y^3$

   (c) $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

   (d) $8x^3 + 12x^2 + 12x + 1$

   (e) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

   (f) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

2. Factoriser au maximum :

   (a) $ax^3 + 3a^2x^2 + 3ax + 1$

   (b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

   (c) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

   (d) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

   (e) $x^3 - 6x^2 + 8x - 8$

   (f) $1000a^3 - 1200a^2b + 4800ab^2 - 64b^3$

2.2.6 $\mathbf{a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)}$

2.2.7 et $\mathbf{a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}$

Exercices :

1. Factoriser au maximum :

   (a) $x^3 - 8$

   (b) $x^3 + 1$

   (c) $27x^3 - 1$

   (d) $a^3 + 8$

   (e) $x^3 + 64$

   (f) $1000x^3 - 1$

2. Factoriser au maximum :

   (a) $27a^3 - u^3$

   (b) $8x^3 + 1$

   (c) $x^3 - 1$

   (d) $8a^3 + 27y^3$

2.3 Utilisation "simultanée" des procédés de factorisation

Il peut être nécéssaire pour factoriser complètement une expression de procéder par étapes :

$$\text{mise en évidence ou groupement} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \text{identité(s) remarquable(s)}$$

On commencera si possible par la mise en évidence ou groupement, puis l'utilisation d'identité(s) remarquable(s), puis si nécessaire on recommence.

Exemples :

$(c-d)x^2-(c-d)y^2=$

$x^2y^2-y^2+x^2-1=$

$x^2-2xy+y^2-4=$

$x^2+2xy+y^2-x-y=$

Exercices :

1. Factoriser au maximum :
   (a) $5a^3 + 10a^4x - 15a^4x^2$
   (b) $2ax + 2ay - bx - by$
   (c) $-ax^2 + ay^2$
   (d) $6x^3 - 5y + 15x^2y - 2x$
   (e) $-2a^3 - 2$
   (f) $64x^2 - (4x - b)^2$
   (g) $2x^3 - 20x^2 + 42x$
   (h) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$
   (i) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1)$
   (j) $27 + 27x + 9x^2 + x^3$

2. Factoriser au maximum :
   (a) $-4 + 4x^2$
   (b) $4x^4 - 5x^3 + 5x - 4$
   (c) $a^4 - ax^3$
   (d) $x^2 - 10x + 25 - y^2$
   (e) $ap^2 + bp^2 - aq^2 - bq^2$
   (f) $-2x^2 + 36x - 162$
   (g) $(a + b)^2 - (a - b)^2$
   (h) $-2x^2 - 24x - 70$
   (i) $2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$
   (j) $-3x^4 - 33x^2 + 126$

3. Factoriser au maximum :
   (a) $x^4 - 18x^2 + 81$
   (b) $4a^3bc - 36ab^3c$
   (c) $x^6 - y^6$
   (d) $x^2y^2 - y^2 + x^2 - 1$
   (e) $a^8x^8 - 1$
   (f) $x^2 + 25x + 156$
   (g) $x^2 + ax + bx + ab$
   (h) $2x^6 - 28x^3 + 66$
   (i) $8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$
   (j) $a^2 - c^2 + 2ab + b^2$

4. Factoriser au maximum :

(a) $a^2 - c^2 + 2a + 2c$
(b) $-3x^2 - 3x + 18$
(c) $y^2 - 4 + (y+2)(y-1)$
(d) $x^4 a - x a^4$
(e) $2a^8 - 2b^8$
(f) $16 - 24x + 12x^2 - 2x^3$
(g) $-5x^2 + 35x - 30$
(h) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$
(i) $4a^3 - a^2 x - 100ax^2 + 25x^3$
(j) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$

5. Factoriser au maximum :

(a) $a^2 b^4 - a^4 b^2$
(b) $a^4 x + a x^4$
(c) $-3a^4 x^4 + 6a^2 x^2 - 3$
(d) $a^4 - 2a^3 b + 2ab^3 - b^4$
(e) $-2x^2 - 20x - 48$
(f) $9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$
(g) $(x-1)^2 - (x+1)^2$
(h) $-7x^2 - 28x + 35$
(i) $4a^2 b^2 - 9a^2 - b^2 + 6ab$
(j) $a^2 - b^2 - x^2\left(a^2 - b^2\right)$

6. Factoriser au maximum :

(a) $-2x^2 - 34x - 144$
(b) $u^6 - v^3 + 3u^2 v^2 - 3u^4 v$
(c) $(x-1)^2 + 2(x-1) + 1$
(d) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
(e) $\left(x^2 - x + 1\right)^2 - \left(x^2 + 2x - 1\right)^2$
(f) $x^2(a+b)(b-c) + y^2(a+b)(c-b)$
(g) $-5x^2 + 20x + 25$
(h) $x^7 - x^4 y^3 - x^3 y^4 + y^7$
(i) $x^2 - y^2 - b\left(x^2 - y^2\right)$
(j) $5a^2 - 5b^2 - 5a^2 c^2 + 5b^2 c^2$

7. Factoriser au maximum :

(a) $(m-n)^2 n - (m-n)$
(b) $-3x^4 + 6x^2 y^2 - 3y^4$
(c) $3x^3 - 9x^2 + 9x - 3$
(d) $4a^4 - 625$
(e) $64x^6 - 1$
(f) $a^4 + 2a^3 b - 2ab^3 - b^4$
(g) $(3x-6)\left(x^2 - 1\right) - (5x-10)(x+1)^2$
(h) $8y^4 + y - 1 - 8y^3$
(i) $-3x^2 - 12x - 9$
(j) $(x-5)^2 - x^2 + 25$

8. Factoriser au maximum :

   (a) $4x^3y - 9xy^3$
   (b) $y^3 + 7y^2 + 12y$
   (c) $x^8 - y^2x^2$
   (d) $-5x^8 - 30x^4 - 45$
   (e) $a^2 - y^2 - 2xy - x^2$
   (f) $x^2y^2 - 2axy^2 + bxy^2 - 2axy^2b$
   (g) $3a^3 - 3a^2 - 18a$
   (h) $a^2y + bz^2 - a^2z^2 - by$
   (i) $50x^2 - 20x + 8$
   (j) $2 - 6x^3 + 6x^6 - 2x^9$

9. Factoriser au maximum :

   (a) $b^3 - b^2c - bc^2 + c^3$
   (b) $(3a + b)^2 - 64$
   (c) $-2a^2x^2 + 4ax - 2$
   (d) $81x^4 - y^4$
   (e) $a^9 - 64a^3 - a^6 + 64$
   (f) $2a^6 + 6a^4b^2 + 6a^2b^4 + 2b^6$
   (g) $-3x^2 + 21x - 30$
   (h) $4a^4 - 8a^3 + 4a - 8$
   (i) $a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2$
   (j) $-2x^3 + 10x^2 + 48x$

10. Factoriser au maximum :

   (a) $2n^4 - 26n^2 + 84$
   (b) $2\left(1 - x^2\right) - 3(1 + x) - (1 + x)(3x - 2)$
   (c) $4x^2 + 2x - 9y^2 + 3y$
   (d) $(x + 2)^2 - 4(x + 2) + 4$
   (e) $b^2 + c^2 - bc - a^2$
   (f) $(a + b)x^2 + 2x(a + b) + a + b$
   (g) $-x^2 - 4x + 96$
   (h) $4x(u - v)^2 - 16x^2\left(u^2 - v^2\right)$
   (i) $c^2 + d - d^2 - c$
   (j) $4(x - 3y)^2 - 9(3x + y)^2$

11. Factoriser au maximum :

   (a) $b^2y - b^2 + a^2y - a^2$
   (b) $250a^3 + 2$
   (c) $x^2 + 4x + 4 - y^2$
   (d) $-8x^2y - 8xy - 2y$
   (e) $(2m + n)^2 - (2m - n)^2$
   (f) $a^3 - x^3 + a^2 + x^2 - 2ax$
   (g) $5a^3 + a^2 - 20a - 4$
   (h) $x^3 + 2x^2 + x$
   (i) $1 - 256x^8$
   (j) $4x^2 + 1 - y^2 - 4x$

3 Equations

3.1 Terminologie

Le signe = signifie

Une **équation** est

Dans une équation, l'expression algébrique à gauche du signe = s'appelle

Dans une équation, l'expression algébrique à droite du signe = s'appelle

Une **inconnue** est

L'**ensemble-solution** S d'une équation est

Résoudre une équation c'est

Deux équations sont **équivalentes** si

Pour transformer une équation en une équation équivalente, on peut

1.

2.

3.

4.

5.

3.2 Equations du premier degré à une inconnue

Definition :

On appelle **équation du premier degré à une inconnue** (x) toute équation équivalente à une équation de la forme

$$ax + b = 0$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Il s'agit d'une équation qui peut être ramenée sous une forme où la variable x n'apparaît que à la puissance 1.

Exemples :

1. $5x + 2 = 3x - 1$

2. $\frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{7} = \frac{1}{5} - \frac{3}{7}x + \frac{4}{3}x^2$

Exemple de résolution :

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{7} = \frac{1}{5} - \frac{3}{7}x + \frac{4}{3}x^2$$

Exercices :

1. Résoudre :

   (a) $3x+5=2x+9$
   (b) $3x-10=15+5x-3$
   (c) $-(10-8x)-(6-12x)=2-4x$
   (d) $8x-(9+4x)-5=7x-6$
   (e) $\frac{2x}{7}+\frac{x}{11}=\frac{29}{7}$
   (f) $3x+100=\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-4$
   (g) $3x-\frac{1}{2}(4-x)=x-\frac{1}{3}$
   (h) $(x-3)^2-5(10+x)=x^2-8$
   (i) $(x-4)^2-5(16-x)=x(x-1)$
   (j) $(x+2)(x+3)=x^2-19$

2. Résoudre :

   (a) $8x+(x-7)=9x-(3+4x)$
   (b) $-9x=(7x+15)-(10x-8+5x)$
   (c) $10(x+3)-4=5(3-x)-4$
   (d) $\frac{5x}{18}-\frac{4x-3}{8}=\frac{9-2x}{9}$
   (e) $\frac{3x+2}{5}-\frac{x+6}{3}=\frac{1}{4}$
   (f) $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{3x-5}{2}$
   (g) $\frac{2x-1}{4}-\frac{x+1}{3}=1$
   (h) $\frac{x-3}{8}+\frac{x+9}{12}=\frac{3x+7}{20}+3$
   (i) $(4-2x)(3+2x)=-(-2x)^2$
   (j) $(5-x)(x+3)=8-x^2$

3. Résoudre :

   (a) $x-((3-6x)-(12x-9))=x+15$
   (b) $12x-(4x-(x+108))=36$
   (c) $3(5x-8)=4(5x-7)-1$
   (d) $\frac{5x-11}{4}-\frac{x-1}{10}=\frac{11x-1}{12}$
   (e) $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}=\frac{5x-36}{4}-1$
   (f) $\frac{x+1}{2}-\frac{6x+7}{8}=\frac{4-3x}{5}-\frac{1}{8}$
   (g) $\frac{5x-1}{7}-\frac{9x-7}{5}+\frac{9x-5}{2}=0$
   (h) $x^2-(50-x)^2=100$
   (i) $(x-7)(x+5)=(x+3)(x-2)$
   (j) $(8x-3)(2x+4)=(4x+1)^2$

3.3 Equations du deuxième degré à une inconnue

Definition :

On appelle **équation du deuxième degré à une inconnue** (x) toute équation équivalente à une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Il s'agit d'une équation qui peut être ramenée sous une forme où la variable x n'a que des puissances entières et sa plus grande puissance est 2.

3.3.1 Résolution par factorisation simple

Cette méthode part du constat que le produit de deux nombres réels est nul si et seulement si l'un ou l'autre ou les deux nombres sont nuls :

$$A \cdot B = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad B = 0$$

Attention, le <u>ou</u> est un "ou" logique : il n'est pas exclusif (ci-dessus on peut avoir $A = 0$ seulement, ou $B = 0$ seulement, ou encore $A = 0$ et $B = 0$) !

En ramenant une équation du deuxième degré sous la forme ... $= 0$ (deuxième membre nul), puis en factorisant le premier membre par les méthodes connues (y compris avec les racines cette fois-ci) on se ramène à résoudre des équations du premier degré.

Exemples :

1.
$$\begin{aligned} x^2 - 7x &= -10 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ (x-2)(x-5) &= 0 \\ x - 2 = 0 \quad &\underline{\text{ou}} \quad x - 5 = 0 \\ x = 2 \quad &\underline{\text{ou}} \quad x = 5 \qquad\qquad S = \{2; 5\} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 10x^2 &= x^2 + 2 \\ 9x^2 - 2 &= 0 \\ (3x - \sqrt{2})(3x + \sqrt{2}) &= 0 \\ 3x - \sqrt{2} = 0 \quad &\underline{\text{ou}} \quad 3x + \sqrt{2} = 0 \\ x = \tfrac{\sqrt{2}}{3} \quad &\underline{\text{ou}} \quad x = -\tfrac{\sqrt{2}}{3} \qquad\qquad S = \left\{-\tfrac{\sqrt{2}}{3}; \tfrac{\sqrt{2}}{3}\right\} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
4x^2-2x+3 &= 3x^2-4x+2\\
x^2+2x+1 &= 0\\
(x+1)(x+1) &= 0\\
x+1=0 \ \underline{\text{ou}} & \ x+1=0\\
x+1 &= 0\\
x &= -1 \qquad S=\{-1\} \qquad \text{(solution double)}
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
(x+1)(2x+3) &= (x+1)(5x-2)\\
(x+1)(2x+3)-(x+1)(5x-2) &= 0\\
(x+1)(2x+3-5x+2) &= 0\\
(x+1)(-3x+5) &= 0\\
x+1=0 \ \underline{\text{ou}} & \ -3x+5=0\\
x=-1 \ \underline{\text{ou}} & \ -3x=-5\\
x=-1 \ \underline{\text{ou}} & \ x=\tfrac{5}{3} \qquad S=\left\{-1;\tfrac{5}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Malheureusement la factorisation n'est pas simple dans tous les cas. Nous verrons par la suite comment généraliser cette méthode à tout type d'équations du deuxième degré.

Pour certaines équations il est facile de voir qu'elles ne possèdent pas de solution (p.ex. $x^2 = -1$). Nous verrons également par la suite comment reconnaître pour une équation quelconque du deuxième degré si elle possède ou non une solution.

Exercices :

1. Résoudre :

(a) $x^2 = 3x$

(b) $(3x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$

(c) $(9x-5)^2 = 9$

(d) $(x-5)(x+3) = (x-5)(3x+7)$

(e) $3(x-2) = (x-2)^2$

(f) $x^2+1 = 2x$

(g) $4(x-3) = x^2-9$

(h) $(5x+10)(x+3) = (x+2)(x-4)$

(i) $(2x+3)(4x-1) = 9-4x^2$

(j) $(x+5)^2-(2x-3)^2 = 0$

(k) $x^2-1 = 1-x$

(l) $(4x-1)(7x-3) = 14x-6$

(m) $1-4x+4x^2 = (3x-2)^2$

(n) $(2x-1)^2-(5x+2)^2 = 0$

(o) $x^2+64 = 20x$

(p) $\frac{x^2}{3}+\frac{12}{25} = \frac{4x}{5}$

(q) $(x-5)(x+7) = 25-x^2$

(r) $(2x+7)^2 = 9(x+2)^2$

3.3.2 Méthode générale de résolution

Savons-nous résoudre les équations suivantes ?

$(2x+1)^2-4=0$ $(3x-1)^2-16=0$ $(x+1)^2-5=0$

En se ramenant à la forme des équations ci-dessus ("carré moins carré"), résoudre les équations suivantes :

1. $4x^2+4x-15=0$
2. $9x^2-6x-8=0$
3. $4x^2+12x+5=0$
4. $x^2-6x+3=0$

Dans la résolution d'équations du deuxième degré, on peut rencontrer trois cas :

1. pas de solution réelle. Par exemple :

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

2. une solution réelle double. Par exemple :

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

3. deux solutions réelles. Par exemple :

$$x^2 - 6x + 3 = 0$$

Théorème :

Soit l'équation du deuxième degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Soit le discriminant de l'équation

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si	$\Delta < 0$	alors	l'équation ne possède pas de solution réelle.
			$S = \emptyset$
Si	$\Delta = 0$	alors	l'équation possède une solution réelle double.
			$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
Si	$\Delta > 0$	alors	l'équation possède deux solutions réelles distinctes.
			$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Méthode générale de résolution :

Pour résoudre une équation du deuxième degré qui ne se laisse pas facilement factoriser on peut donc procéder comme suit :

1. Mettre l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$
2. Calculer Δ
3. Si $\Delta < 0$, alors $S = \emptyset$

   sinon $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ (éventuellement une seule solution double)

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = 0$

Diviser par a pour avoir x^2 seul.
C'est possible car $a \neq 0$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Compléter $x^2 + \frac{b}{a}x$ en un carré parfait du type
$A^2 + 2AB + B^2$:
$A = x,\ 2AB = \frac{b}{a}x \Rightarrow 2xB = \frac{b}{a}x \Rightarrow B = \frac{b}{2a}$

$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

Ecrire le carré
et commencer à regrouper les autres termes.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

Regrouper.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0$

Regrouper.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

Différents cas à traiter.

Dans l'expression $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ le dénominateur $4a^2$ est strictement positif.
Le numérateur $\Delta = b^2 - 4ac$ peut être négatif, nul ou positif et détermine le signe de l'expression complète $\frac{\Delta}{4a^2}$.
Il y a donc trois cas à traiter :

$\Delta < 0$:

Dans ce cas $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ ne peut être nul, car

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \text{ et } -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$$

L'équation $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ ne possède donc pas de solution.

$$S = \emptyset$$

$\Delta = 0$ **:**

Dans ce cas l'équation $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ devient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

qui possède une solution double $x = -\frac{b}{2a}$

$$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

$\Delta > 0$ **:**

Dans ce cas on peut utiliser l'identité $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ pour factoriser le membre de gauche de l'équation $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, avec $A = x + \frac{b}{2a}$ et $B = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$.

On obtient alors

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right) = 0$$

qui possède deux solutions $x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ <u>ou</u> $x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$.

Ces deux solutions peuvent s'écrire de manière réduite

$$\text{si } a > 0 : x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \underline{\text{ou}} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{si } a < 0 : x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \underline{\text{ou}} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Que a soit positif ou négatif, l'ensemble de solutions est donc

$$S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

Remarque :

La formule des deux solutions

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

permet également d'obtenir la solution double.

En effet, si $\Delta = 0$ on obtient $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$.

Exercices :

1. En utilisant la méthode du discriminant Δ, résoudre les équations suivantes :
   Réduire les réponses au maximum.

   (a) $x^2 + x - 1 = 0$
   (b) $4x^2 - 20x = -25$
   (c) $-6x + x^2 + 4 = 0$
   (d) $3x^2 - x = 30$
   (e) $-2x^2 - 10x + 61 = 0$
   (f) $9x^2 - 30x + 25 = 0$
   (g) $(x-6)(x+1) - (2x+3)(x-5) = 0$
   (h) $x - 7 = 6 - (x-7)^2$
   (i) $(x-5)^3 - (x+2)^3 + 91 = 0$
   (j) $\frac{3x-7}{5} + \frac{x^2-9}{7} = 2$

2. En utilisant la méthode du discriminant Δ, résoudre les équations suivantes :
   Réduire les réponses au maximum.

   (a) $91x^2 = 2x + 45$
   (b) $7x + 2x^2 = -7$
   (c) $20x^2 + 117x - 161 = 0$
   (d) $4(x-3) + x(x-5) - 30 = 0$
   (e) $(5x-1)^2 + x^2 + 3 = 0$
   (f) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x-8)^2$
   (g) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x^2+1}{3} = \frac{x^2-11}{6}$
   (h) $\frac{(x-2)^2}{5} = \frac{(x-3)^2}{4}$

3. Trouver dans chaque équation la valeur du nombre p qui remplit la condition donnée :

   (a) L'équation $2x^2 - px + 4 = 0$ possède une solution égale à -3.
   (b) L'équation $3x^2 + (p+1)x + 24 = 0$ possède deux solutions dont l'une vaut le double de l'autre.

4. (a) Illustrer la remarque suivante à l'aide d'exemples.

   Remarque : Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

   Si l'équation possède des solutions réelles x_1 et x_2 (éventuellement les mêmes), on peut factoriser :

   $$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

   Si l'équation ne possède pas de solution réelle, il est impossible de factoriser.

   (b) Démontrer la formule suivante. (Indication : utiliser la factorisation vue dans la partie (a) de cet exercice.)

   Formule de Viète : Si x_1 et x_2 sont les solutions (éventuellement la même) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), alors

   $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

3.4 Equations de degrés supérieurs se ramenant à des équations du 1er ou 2e degré

Comment faire ?

Exercices :

1. Résoudre les équations suivantes. Réduire les réponses au maximum.

   (a) $(x^2-1)(x+3)=(x+1)(x^2-4x+3)$

   (b) $x^3-x^2-4x+4=0$

   (c) $27x^3+54x^2+36x+8=0$

   (d) $x^3-6x^2-5x+30=0$

   (e) $x^4-4=0$

   (f) $x^4+x^2-2=0$

   (g) $x^4+6x^3-5x-30=0$

   (h) $(x^2-1)^2+2(x^2-1)-3=0$

2. Résoudre les équations suivantes. Réduire les réponses au maximum.

   (a) $x^4+3x^2+2=0$

   (b) $x^4+x^3-5x^2=0$

   (c) $x^5+x^4-4x-4=0$

   (d) $x^5-5x^4-x+5=0$

   (e) $x^4-11x^2+30=0$

   (f) $x^4-10x^2+21=0$

   (g) $x^4+x^2-3=0$

   (h) $x^6+2x^3+1=0$

4 Inéquations du premier degré à une variable

Une **inéquation** est

Pour transformer une inéquation en une inéquation équivalente, on peut

Definition :

On appelle **inéquation du premier degré à une inconnue** (x) toute inéquation équivalente à une inéquation de la forme

$$ax + b < 0 \qquad \text{ou} \qquad ax + b \leq 0$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Il s'agit d'une inéquation qui peut être ramenée sous une forme où la variable x n'apparaît que à la puissance 1.

Exemples de résolution :

1. $5x + 2 < 3x - 1$

1. $\frac{4}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{7} < \frac{1}{5} - \frac{3}{7}x + \frac{4}{3}x^2$

Exercices :

1. Résoudre :

   (a) $3x + 5 < 2x + 9$

   (b) $3x - 10 > 15 + 5x - 3$

   (c) $-(10 - 8x) - (6 - 12x) \geq 2 - 4x$

   (d) $-(4 - x) - 2(3 + 2x) < 5 - 3x$

   (e) $8x - (9 + 4x) - 5 < 7x - 6$

   (f) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{11} \leq \frac{29}{7}$

   (g) $-(3x - 7) - (1 + x) \geq -2(2x - 3)$

   (h) $3x + 100 > \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4$

2. Résoudre :

   (a) $8x + (x - 7) < 9x - (3 + 4x)$

   (b) $-x + 7 < -(2x + 7) - (3 - x)$

   (c) $-9x \leq (7x + 15) - (10x - 8 + 5x)$

   (d) $10(x + 3) - 4 \geq 5(3 - x) - 4$

   (e) $\frac{5x}{18} - \frac{4x-3}{8} < \frac{9-2x}{9}$

   (f) $\frac{3x+2}{5} - \frac{x+6}{3} > \frac{1}{4}$

   (g) $5x + 3(x - 4) \geq 2(x - 3) + 6(x - 1)$

   (h) $\frac{7x+4}{5} - x \geq \frac{3x-5}{2}$

5 Systèmes d'équations

5.1 Equations linéaires à deux variables

Une **équation linéaire** à une, deux ou plusieurs variables est

Soit l'équation $2x + y = 8$

Quel est l'ensemble de solutions S de cette équation ?

Exercices :

1. Résoudre :

   (a) $x + 1 - y = y + 3$

   (b) $9x + 2y - 3 = 14y + 6$

   (c) $x - y = 2(x - 3) - (y - 4)$

   (d) $3(1 - x) - 2y + 7 = 2(2 - y) - 3(x - 2)$

2. Existe-t-il des situations réelles (physiques, économiques, ...) qui peuvent être décrites par une équation à deux variables ?

   Si oui, donner un exemple. Si non, expliquer pourquoi.

5.2 Systèmes de deux équations linéaires à deux variables

Un **système d'équations** est

Quelles méthodes connaissez-vous qui permettent de résoudre des systèmes de deux équations linéaires à deux variables ?

Exercices :

1. Résoudre les systèmes d'équations suivants en indiquant la méthode utilisée :

(a) $\begin{cases} 4x - y = -6 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ (a) $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 18 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 21 \end{cases}$ (a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

(a) $\begin{cases} x - 6y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 3 = 0 \end{cases}$ (a) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{2y}{15} = 4 \\ \frac{x}{12} - \frac{y}{10} = 1 \end{cases}$ (a) $\begin{cases} 9x - 5y = 38 \\ 24x - 25y = 148 \end{cases}$

(a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ (a) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 14 \\ -\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 16 \end{cases}$ (a) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 8 \\ \frac{x}{12} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

2. Etudier l'existence de solutions $(x; y)$ du système d'équations suivant, en fonction de la valeur que prend le nombre m :

$$\begin{cases} 2x + m \cdot y = 7 \\ -x + 5y = 13 \end{cases}$$

3. Dire en quoi les systèmes d'équations suivants diffèrent des précédents et les résoudre si possible :

(a) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - y = 7 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 5x + 2y = 1 \\ 7x - 4y = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ -4x + 14y = 2 \\ 6x - 21y = -3 \end{cases}$

5.3 Généralisations

En quoi le système d'équations suivant diffère-t-il des précédents ?

Comment peut-on le résoudre ?

$$\begin{cases} x & +3y & +2z & = & -13 \\ 2x & -6y & +3z & = & 2 \\ 3x & -4y & -z & = & 12 \end{cases}$$

En quoi le système d'équations suivant diffère-t-il des précédents ?

Comment peut-on le résoudre ?

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 8 \\ xy &= 2 \end{cases}$$

Exercices :

1. Résoudre

(a) $\begin{cases} 2x & -3y & +2z & = & 6 \\ x & +8y & +3z & = & -31 \\ 3x & -2y & +z & = & -5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x & +y & & = & 2 \\ & -4y & +z & = & 0 \\ 4x & & +z & = & 6 \end{cases}$

2. Résoudre

(a) $\begin{cases} xy &= 0 \\ x + y &= 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} xy &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x - y &= 8 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{cases}$

6 Mise en équation(s)

1. Trouver un nombre dont le triple vaut cinq de moins que le quadruple.
2. La somme de trois entiers consécutifs vaut 24. Trouver ces trois nombres.
3. Le périmètre d'un rectangle vaut 110 mètres. Trouver ses dimensions sachant que sa longueur vaut 5 mètres de moins que le double de sa largeur.
4. Dans un discount, Cyril paie un stylo 70 centimes moins cher que le prix suggéré. Dans une épicerie, Simine achète le même stylo, vendu avec un rabais de 55% sur le prix suggéré, et elle paie 55 centimes de plus que Cyril. Quel est le prix suggéré du stylo ?
5. La somme de deux nombres est 34 et le double du premier nombre vaut les $5/6$ du second. Quels sont ces deux nombres ?
6. La différence de deux nombres vaut 71 et le tiers de leur somme vaut 5 de plus que le double du deuxième nombre. Quels sont ces nombres ?
7. Ashling, qui a du temps à perdre, observe la promenade de deux escargots qui se déplacent avec une vitesse constante. Après une heure, le second a parcouru 92 cm de plus que le premier et la somme des distances parcourues par ces deux escargots est de 950 cm. Calculer la distance parcourue par chacun d'eux.
8. Un père a donné à son fils 1500 francs et un autre a donné au sien 1000 francs. Cependant, à eux deux, les fils n'ont accru leur capital cumulé que de 1500 francs. Comment expliquer cette situation ?
9. On veut partager équitablement une somme d'argent entre plusieurs personnes. Si chaque personne reçoit 14 francs, il reste encore 7 francs. Si chaque personne reçoit 15 francs, il manque alors 26 francs pour que chacun reçoive sa part. Quelle est la somme à partager et quel est le nombre de personnes qui la partagent. Un partage équitable est-il possible ?
10. Déborah empile quinze livres les uns sur les autres. La hauteur de la pile de livres atteint 65 cm. Certains livres ont une épaisseur de cinq cm et les autres de trois cm. Trouver le nombre de livres de chaque sorte.
11. Marc et Matteï se présentent à l'élection de Mister Première Année. Sur 100 électeurs, l'un a 24 voix de plus que l'autre. Combien chacun d'entre eux a-t-il eu de voix si l'on considère qu'il n'y a pas d'abstention ?
12. La somme des carrés de deux nombres est 34. Le premier est inférieur d'une unité au double du second. Quels sont ces nombres ?
13. Déterminer l'ensemble de nombres réels dont la somme et le produit sont égaux.
14. Un nombre est composé de 3 chiffres dont la sommes est 10 et celui du milieu est 0. Quand on retourne ce nombre (càd. on le lit de droite à gauche), le nombre obtenu vaut 29 unités de plus que 8 fois le nombre initial. Quel est le nombre initial ?

15. Aline possède une balance très mal réglée (mais fidèle) à deux plateaux où l'un des plateaux semble plus lourd que l'autre. En pesant des cubes elle réalise les deux équilibres suivants :

    Un poids de 300 g dans le plateau de gauche et 8 cubes dans celui de droite.

    Un cube dans le plateau de gauche et un poids de 600 g dans celui de droite.

    Quel est le poids d'un cube ?
16. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons ensemble 63 ans. Quels sont nos âges actuels respectifs ?
17. Déterminer quatre nombres pairs consécutifs dont la somme donne 1028.
18. Partager 16 en deux parties, telles que si à leur produit on ajoute la somme de leurs carrés, le résultat soit 208.
19. Comment peut-on payer la somme de 290 francs avec 88 pièces à choisir parmi des pièces de 2 francs et de 5 francs ?
20. Un nombre formé de deux chiffres consécutifs est supérieur de 1 au quintuple de la somme de ses chiffres. Quel est ce nombre ?
21. Déterminer 5 nombres consécutifs sachant que la somme des carrés des quatre premiers nombres vaut 42 fois le cinquième nombre.
22. Le prix des oeufs a augmenté de 40 centimes la douzaine. Alors on en reçoit un de moins pour 3 francs. Quels sont l'ancien et le nouveau prix ?
23. Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont l'aire est de 874 m^2 sachant que sa longueur a 15 m de plus que sa largeur ?

Sources

- *Formulaires et tables, Mathématiques, Physique, Chimie*
  Comission Romande des Mathématiques, Editions du Tricorne, Genève, 2000
- Cours de J.-M. Bacchiocchi
- Cours de D. Bopp
- Cours de M. Ducommun

Table des matières